GAODENG SHUXUE ZHIDAO

高等数学指导(经、管等非理工类)

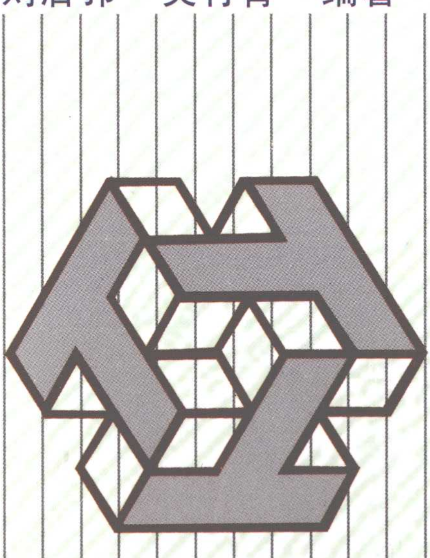
GAODENG SHUXUE ZHIDAO

同济、人大·高等数学（非理工类）基础题选解

重点大学期考考题（非理工类）及解答

1987~2009年经、管类考研试题（数学三）解答

刘后邪　吴竹青　编著



湖南科学技术出版社

高等数学

指导（经、管等非理工类）

GAODENG SHUXUE ZHIDAO

同济、人大·高等数学（非理工类）基础题选解
重点大学期考考题（非理工类）及解答
1987～2009年经、管类考研试题（数学三）解答

刘后邦　吴竹青　编著

湖南科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学指导（经、管等非理工类）/ 刘后邪，吴竹青编著.
—长沙：湖南科学技术出版社，2009.11
ISBN 978-7-5357-5957-3

I. 高… II. ①刘…②吴… III. 高等数学－高等学校－教学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 197353 号

高等数学指导（经、管等非理工类）

编　　著：刘后邪　吴竹青
责任编辑：陈一心
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市湘雅路 276 号
　　　　　http://www.hnstp.com
邮购联系：本社直销科 0731-84375808
印　　刷：衡阳博艺印务有限责任公司
　　　　　（印装质量问题请直接与本厂联系）
厂　　址：湖南省衡阳市黄茶岭光明路 21 号
邮　　编：421008
出版日期：2009 年 11 月第 1 版第 1 次
开　　本：850mm×1168mm　1/32
印　　张：15
字　　数：524000
书　　号：ISBN 978-7-5357-5957-3
定　　价：28.00 元

著名数学家侯振挺为本书出版题词：

学好数学

打好基础

贺"高等数学指导"出版

侯振挺

二〇〇八年十月

前 言

进入21世纪，科学技术飞速发展，作为科学技术基础的高等数学也越发凸显出它的重要性。正因为如此，在高等院校（包括职业高等院校）中，无论是经济、管理专业，还是医药、农林、旅游等专业都把高等数学（或称为“微积分”）列为一门重要的必修理论基础课，本书是高等数学学习与教学的一本指导性参考书，也是一本备战高等数学考研（数学三）的指导性参考书。它有以下两个特点：

第一个特点是：它能帮助经济、管理及医药、农林、旅游等专业的读者循序渐进学好高等数学（或称为“微积分”）。

为了做到这一点，本书的章节与教材同步，每章由5个部分组成，其中的前4个部分就服务于上述宗旨：

第1部分《要点概述》，包括学习该章的缘由、要解决的问题、重要定义、定理及各种典型问题求解程序与解题方法小结等。实际上，《要点概述》就是一个简要的课堂笔记，是这一章内容的浓缩，掌握了它就等于拿到了解题的钥匙。

第2部分《疑难解析》，包括该章重要是非问题的判断，对重要定义、定理的理解、解题中易犯错误的分析等，通过这一部分学习可加深对教材的理解，特别是为考试中“选择题”的正确选择打下了坚实基础。

第3部分《基础习题选解》，作者从同济大学、中国人民大学等重点院校所编高等数学（非理工类）教材中，选取除最简单题（这些题的答案显而易见）外的所有习题，进行了规范式求解，这些习题的特点是具有基础性、典型性。在高等数学学习过程中，解题是一项运用所学知识去解决和分析实际问题的重要技能，著名数学家、数学教育家波利亚（G. Polya）在《数学的发现》一书中指出：“任何一门学问都是由知识和技能组成的”，“在数学中技能比仅仅掌握一些知识重要得多”。古往今来，考查

学生掌握数学的手段都还是通过考试中的解题技能来实现的，正因为如此，学好数学的第一要素就是做够、做好基本题，本章正是为此提供了这方面的练习。

第 4 部分《练习题选》，这部分的习题大多是从高等数学期末考题中摘录的，在难度上高于基础习题，题型变化也多些，建议同学们在做完基础习题后，动手练习或阅读这部分习题，常言道："熟能生巧，见多识广"，这部分的学习是期末考试中考出好成绩的必不可少的条件。

第二个特点是：作者汇总了关于经济、管理类高等数学全部考研试题（现称"数学三"试题，过去称"数学三"、"数学四"试题；1987～2009）把它们分类编排在本书每章的第 5 部分，标题为"历届考研试题详解"，考虑到读者是非理工类同学，在试题解答上尽量使其通俗简明易懂，解题过程不省略，必要时一题给出了两种不同解法，对许多题都加配了"解题思路"、"注意"、"附注"等，目的是帮助读者举一反三，触类旁通。

对正在学习高等数学又立志准备大学毕业后投考经济、管理类研究生的读者，本书能使他（她）们在一边学习高等数学的同时，一边就了解到考研信息，及早地与考研试题零距离接触。考研试题题型灵活、难度较大、综合性强，但如果在学习高等数学时，就已动手练习或阅遍了历届考题，今后在走进考研试场又还有什么可畏惧的呢？

对正准备报考经济、管理类研究生的读者，本书是一本有针对性的复习参考书：《要点概述》、《疑难解析》囊括了教育部考研考试大纲（数学三）的全部要求，《历届考研试题详解》最大量地提供了考研题的信息，集中阅读本书每章中的这 3 个部分，无疑将缩短备考时间，达到事半功倍的效果。

参加本书编写的还有吴映华、刘可等。

感谢著名数学家侯振挺教授为本书的出版题词；感谢我国几代从事数学教育的专家、学者为本书提供了极为珍贵的素材。

本书疏漏和不妥之处，恳请读者批评指正。

刘后邘

于中南大学荷花村

目 录

第一章　函数与极限

一、要点概述

I　问题的提出

本章是高等数学的开篇，高等数学主要内容是微积分. 微积分研究的对象是变量以及变量与变量之间的关系，于是就引入了函数概念；我们是用辩证的观点，即运动的观点研究函数，于是引入了极限概念. 在函数中有一类函数具有一个特性：当自变量趋于 x 时，函数的极限即为 $f(x)$，这种函数称为连续函数. 今后我们将看到连续函数具有许多优良性质，例如可导函数一定连续，连续函数一定可积等. 于是连续概念成为本章引入的又一个重要概念.

总之，本章有三个重要概念：函数、极限、连续.

Ⅱ　函数

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 数集 D 叫这个函数的定义域，x 叫自变量，y 叫因变量.

1. 称函数值全体组成的数集：$W=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 为函数的值域.

2. 函数可分为多值函数与单值函数，高等数学中只研究单值函数.

3. 函数概念中有两个要素：

①定义域 D，常根据下面两方面确定：

$$\begin{cases}\text{使实际问题有意义,}\\ \text{使表达式有意义,}\end{cases}$$

例如：
$$\begin{cases}\dfrac{1}{u(x)}, & u(x)\neq 0,\\ \sqrt{u(x)}, & u(x)\geqslant 0,\\ \ln u(x), & u(x)>0,\\ \arcsin u(x), & |u(x)|\leqslant 1.\end{cases}$$

②对应法则：通常用表达式、表格、图象表示出.

4. 函数可分为：

①显函数：从方程 $F(x,y)=0$ 中解出了 y 的函数.

②隐函数：由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=y(x)$.

5. 函数特性：

1) 有界性：它有两个等价定义.

①若 $\exists M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M, x\in D$，则称 $f(x)$ 为有界函数，否则称为无界函数.

②若 $\exists$ 实数 $a,b,a\leqslant b$ 使得 $a\leqslant f(x)\leqslant b, x\in D$，则称 $f(x)$ 为有界函数，否则称为无界函数.

2) 单调性：设 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\in D$，若对 I 上任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加，记为↗；反之，则称单调减少，记为↘.

3) 奇偶性：若 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，对任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$ 为奇函数；恒有 $f(-x)=f(x)$，称 $f(x)$ 为偶函数.

奇函数图象关于原点对称，偶函数图象关于 y 轴对称，显然：

奇＋奇＝奇，偶＋偶＝偶，奇×奇＝偶，偶×偶＝偶，奇×偶＝奇.

4) 周期性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个不为零的数 l，使得对于任一 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 为周期. 通常称 $f(x)$ 的最小正周期为周期.

6. 反函数：设 $y=f(x)$，W 为值域，D 为定义域，若对任意数值 $y\in W$，在 D 上至少可以确定一个数值 x 与 y 对应，使适合 $f(x)=y$，则称这个对应法则 $x=\varphi(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数，有时也记为 $x=f^{-1}(y)$.

反函数不一定是单值函数，但若函数是单值单调函数，则反函数亦是单值函数. 由于本课程只研究单值函数，故只研究主值区间的反函数，例如，$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot}\, x$ 等；反函数的值域为函数的定义域，反函数的定义域为函数的值域；求反函数步骤是：①反解；②改写. 函数与反函数(经过改写的)其图象关于 $y=x$ 对称.

7. 初等函数：

(1) 基本初等函数：包括以下 5 类函数，简称“三指幂反对”. ①三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$. ②指数函数：$y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$. ③幂函数：$y=x^\mu$ $(\mu\neq 0)$. ④反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot}\, x$. ⑤对数函数：$y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$.

(2) 复合函数：设 $y=y(u)$，$u=u(x)$，则 $y=y(u(x))$ 称为复合函数，$u=u(x)$ 为中间变量. 复合函数分解的步骤是：由外向内，层层引入中间变量，使

每一个中间表达式都形如基本初等函数或它们与常数通过四则运算构成的式子.例如,$y=e^{\cos\sqrt{3x^2+(\ln x)^3}}$ 可分解为 $y=e^u$,$u=\cos v$,$v=t^{\frac{1}{2}}$,$t=3x^2+w^3$,$w=\ln x$.

(3) 初等函数:由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

8. 几个常见重要函数:

(1) 符号函数 $$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

(2) $y=[x]$(y 为 x 的最大整数部分).

(3) 狄利克雷函数 $$y=\begin{cases}1,\text{当 } x \text{ 为有理数时};\\ 0,\text{当 } x \text{ 为无理数时}.\end{cases}$$

(4) 双曲函数 双曲正弦 $\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$,

双曲余弦 $\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,

双曲正切 $\operatorname{th}x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

显然 $$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1.$$

Ⅲ 极限

当自变量在某过程下,数列(或函数)无限趋近于数 A(或∞)时,引出极限概念.

①数列极限:数列 x_n 可视为自变量为正整数的函数:$x_n=f(n)$.过程 $n\to\infty$可用时刻 $N>0$ 刻画,极限 $x_n\to A$ 可用围墙 $\varepsilon>0$ 刻画:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

直观理解:在 A 附近任意筑一道围墙(ε),存在一个时刻(N),只要过这个时刻($n>N$),x_n 即落在围墙内($|x_n-A|<\varepsilon$).下面定量描述“$\varepsilon-N$ 语言”.

定义 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N>0$,只要 $n>N$,就有$|x_n-A|<\varepsilon$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

②函数极限:由于自变量 x 的变化过程有 6 种:$x\to x_0$(以及 x_0^+,x_0^-,$+\infty$,$-\infty$,∞),函数 $f(x)$的变化趋势有 4 种:$f(x)\to A$(以及$+\infty$,$-\infty$,∞),故函数极限总共有 24 种.

在函数极限定义中:

过程 $x\to x_0$(x_0^+,x_0^-)用“时刻”$\delta>0$ 刻画;

$x\to\infty$($+\infty$,$-\infty$)用“时刻”$X>0$ 刻画.

变化趋势:$f(x)\to A$ 用“围墙”$\varepsilon>0$ 刻画;

$f(x)\to\infty(+\infty,-\infty)$用“围墙”$M>0$刻画.

例如：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$($\varepsilon-\delta$语言)：

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,只要$0<|x-x_0|<\delta$,就有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,称为右极限($\varepsilon-\delta$语言)：

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,只要$0<x-x_0<\delta$,就有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$,称为左极限($\varepsilon-\delta$语言)：

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,只要$0<x_0-x<\delta$,就有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$($X-M$语言)：

$\forall M>0,\exists X>0$,只要$x>X$,就有$|f(x)|>M$.

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty$($M-\delta$语言)：

$\forall M>0,\exists\delta>0$,只要$0<x_0-x<\delta$,就有$f(x)<-M$.

1. 极限性质：①唯一性. ②有界性. ③保号性. ④常数极限为本身.

2. 极限运算性质：若存在$\lim f(x),\lim g(x)$,则

$$\lim(f(x)+g(x))=\lim f(x)+\lim g(x),$$

$$\lim(f(x)\cdot g(x))=\lim f(x)\cdot\lim g(x),$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\quad[要求\lim g(x)\neq0],$$

$$\lim Cf(x)=C\lim f(x).$$

3. 极限不存在分类：

①在给定过程下函数趋于$\infty(+\infty,-\infty)$,这类极限不存在又称为“极限”为$\infty(+\infty,-\infty)$,并可用语言描述(见前),例如$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$.

②振荡不存在：在给定过程下，函数无变化趋势. 例如，$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$不存在.

Ⅳ 无穷小与无穷大

在给定过程下，其极限为零的变量称为无穷小量(无穷小)；在给定过程下，其绝对值无限制变大的变量称为无穷大量(无穷大).

1. 性质.

①有限个无穷小之和为无穷小；

②有限个无穷小之积为无穷小；

③无穷小乘有界变量为无穷小；

④无穷大加有界变量为无穷大；

⑤有限个无穷大之乘积为无穷大；

⑥$\frac{1}{\text{无穷大}}$为无穷小；

⑦$\alpha(x)$为无穷小且$\alpha(x)\neq 0$，则$\frac{1}{\alpha(x)}$为无穷大.

2. 极限存在的两个充要条件.

① $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\exists\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A.$

② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中$\alpha(x)$为无穷小，即$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$

3. 无穷小比较. 设在同一过程下α,β为无穷小，若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，称$\beta$为$\alpha$的高阶无穷小，记为$\beta=o(\alpha)$.

若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=C(C\neq 0)$，称$\beta$与$\alpha$为同阶无穷小.

若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，称$\beta$为$\alpha$的等价无穷小，若$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}(k>0)=C(C\neq 0)$，称$\beta$为$\alpha$的$k$阶无穷小. 显然$\beta\sim C\alpha^k$，称$C\alpha^k$为$\beta$的主部.

记住几个常用等价无穷小：当$x\to 0$时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$；$e^x-1\sim x$；$\ln(1+x)\sim x$；$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$.

V 连续

①若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，称$f(x)$在点$x_0$处连续.

②若$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0[\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]$，称$f(x)$在$x_0$处连续.

定义①与定义②是等价的.

1. 连续三要素：①$f(x)$在x_0处有定义；②$\exists\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$；③$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$. 三要素中缺一，称$f(x)$在$x_0$处间断.

2. 间断点分类：设x_0为间断点，若要素②成立，称x_0为第一类间断点.

当$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，称$x_0$为一类可去间断点.

当$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，称$x_0$为一类跳跃间断点（或一类不可去间断点）.

若要素②不成立，则x_0为第二类间断点.

当左、右极限中至少有一个为$\infty(+\infty,-\infty)$，称x_0为二类无穷间断点，否则称x_0为二类振荡间断点.

3. 若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，称$f(x)$在$x_0$右连续；

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，称 $f(x)$ 在 x_0 左连续. 显然 $f(x)$ 在 x_0 处连续$\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处有左、右连续.

4. 连续函数性质：

①连续函数和、差、积、商(要求分母$\neq 0$)仍连续.

②连续函数复合在其有意义点上仍连续.

③若 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(或单调减少)且连续，那么它的反函数 $x=\varphi(y)$ 在对应区间 $I_y=\{y|y=f(x),x\in I_x\}$ 上单调增加(或单调减少)且连续.

④一切初等函数在其定义区间内都连续.

⑤闭区间连续函数性质：若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则

a. 最值定理：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可以达到最大值、最小值.

b. 有界定理：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

c. 介值定理：设 $f(a)=A, f(b)=B, A\neq B$，对任给的 C：$A\cdots C\cdots B$，则至少存在一点 $\zeta\in(a,b)$ 使 $f(\zeta)=C$.

d. 零点定理：设 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\zeta\in(a,b)$ 使 $f(\zeta)=0$.

5. 求极限方法(小结)：

(1) 代入法：若 $f(x)$ 为初等函数，$f(x_0)$ 有意义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

(2) 利用初等数学技巧计算：这些技巧包括变量代替、通分、约分、有理化、积化和差、求和公式、提取公因式等.

(3) 利用两个重要极限计算：

重要极限一：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

重要极限二：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

(4) 利用等价无穷小代替求极限(只限于对因子进行等价无穷小代替).

(5) 利用两个极限存在准则求极限：

准则Ⅰ：(夹逼定理)设 $v(x)\leqslant f(x)\leqslant u(x)$，又 $\lim v(x)=\lim u(x)=A$，则 $\lim f(x)=A$.

准则Ⅱ：单调递增有上界的数列(或单调递减有下界的数列)必有极限.

*　这里单调递增包括单调不降；单调递降包括单调不增.

(6) 利用求极限法则及连续函数性质求极限.

二、疑难解析

1. 常数函数 $y=1$ 是幂函数.

答 非. 幂函数形如 $y=x^{\mu}$，但 $\mu\neq0$.

2. $y=\sin x, x\in[0,2\pi]$是奇函数.

答 非. 因奇偶函数定义域必关于原点对称.

3. 定义在对称区间$(-l,l)$上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

答 是. 设 $f(x)$为定义在$(-l,l)$上任意一个函数，令 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，显然知 $\varphi(x)$为偶函数；$\psi(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，显然知 $\psi(x)$为奇函数，而 $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$.

由此还可推知：奇＋偶＝非奇非偶结论是错误的.

4. 周期函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

答 非. 周期函数的定义域是既无上界，也无下界.

5. 周期函数一定有最小正周期.

答 非. 例如：狄利克雷函数 $y=\begin{cases}1, \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, \text{当 } x \text{ 为无理数},\end{cases}$ 任何实数都是周期，而最小正实数是不存在的.

6. 分段函数不是初等函数.

答 非. 分段函数有的不是初等函数，例如 $y=\operatorname{sgn}x$；但有的是初等函数，例如：$y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

7. 无限个无穷小之和为无穷小.

答 非. 例如：当 $n\to\infty$时，$\underbrace{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\cdots+\dfrac{1}{n}}_{n\text{个}}=n\cdot\dfrac{1}{n}=1$.

8. 无穷大＋无穷大＝无穷大.

答 非. 例如：当 $n\to\infty$时，n 与$-n$ 都是无穷大. 但 $n+(-n)=0$.

9. 无界变量是无穷大.

答 非. 例如：数列 1,0,2,0,3,0,…为无界变量但不是无穷大量. 注意：无穷大量是无界变量，但无界变量不一定是无穷大量.