東北人民政府教育部編譯

高級中學教科書

平面幾何

東北人民出版社

東北人民政府教育部編譯

高級中學教科書

平面幾何

一、二年級用

東北人民出版社

高中平面幾何

編譯者：東北人民政府教育部
出版者：東北人民出版社
發行者：新華書店東北總分店
印刷者：新華印刷廠

初版 16,000册（長） 1952. 1.
再版 2,400册（長） 1952. 3.
定價：2,800元

編譯者聲明

這一套中學自然科學教科書，包括算術、代數、平面幾何、物理、化學、動物、植物、人體解剖生理學等，是根據蘇聯十年制中學的教科書翻譯的。為了適合我國的情況，在校閱時作了必要的修改，所以說是編譯。

這套教科書的初中用部分於一九四九年下半年匆匆編譯，一九五〇年起在東北各地中學試用。由於時間和人力的不足， 發生了不少錯誤與不妥之處。 一九五〇年下半年，我們一面修改了初中用書，一面又編譯出版了高中用的一部分。時間和人力仍然很受限制，在校閱時仍然感到很多地方不能趕上原書的精彩，特別是在理論與實際結合一方面。

我們希望，各地教師同志和別的同志們，指正我們的錯誤，提供我們進一步修改的要點，幫助我們來把這套教科書修訂得更好。

東北人民政府教育部

一九五〇年十二月

目　　錄

第三章

相似形

I. 關於量的測量的概念

144. 線段的測量. 在比較二線段的長度時，我們可以知道此二線段是否相等；如果不相等時，則可以知道此二線段中那一線段較長（§6）。在前幾章裏，我們也學過：在三角形中，邊與角的關係（§46、47），直線和折線長度的比較（§50、51），以及其他的情形（§53、54、55）。但是我們對線段的長度，還沒有準確的表示出來。

現在我們開始研究關於線段長度的概念，以及用數字表示線段長度的方法。

145. 公度. 兩個線段各含有第三個線段的整數倍而沒有剩餘時，則第三個線段叫做前兩個線段的**公度**。例如線段 AM（圖162），在線段 AB 中含有 AM的 5 倍，在線段 CD 中含有 AM 的 3 倍，所以線段 AM 是線段 AB 和 CD 的公度。與此相似，可以求出同圓或等圓中二弧的公度與二角的公度以及各種二同類量的公度。

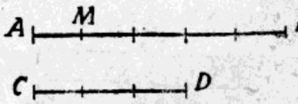

圖 162

注意：很顯明的，如果線段 AM 是線段 AB 與 CD 的公度，則把線段 AM 分成 2、3、4 或更多的等份時，每個小的等份線段也是線段 AB 與 CD 的公度。因此，如果二

線段含有任意的一個公度，則可以說他們含有無數的公度，而其中有一個是最大的。

146. 關於求二線段最大公度的定理.

爲了求二線段的最大公度，我們利用輾轉相截的方法，這個方法和在算術中求二數最大公約數的方法相似。這個方法是根據以下的各定理。

1. 若在二線段中（A、B，圖163），用短的線段量長的線段得出整數倍(即分成若干短的線段而沒有剩餘)時，則短的線段爲此二線段的最大公度。

例如　線段A（圖163）含有線段B的三倍時，因爲這時線段B只含有本身的一倍，所以線段B是線段A和B的公度；並且是最大公度。因爲任一比線段B大的線段，都不能把線段B截成它的整數倍。

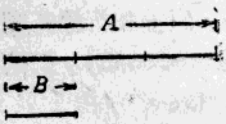

圖 163

2. 若在二線段中，用短線段（B，圖164）來量長線段，得出整數的倍數及剩餘（R，比短線段B小）時，則此二線段的最大公度等於短線段（B）與剩餘（R）的最大公度。

例如　A＝B＋B＋B＋R.

在此等式中我們可以看到：

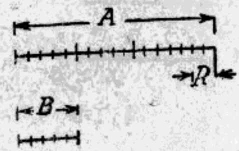

圖 164

1）如用一線段量線段B和R，能恰好量盡沒有剩餘時，則用此線段來量線段A也沒有剩餘。例如用一線段量線段B得出5倍，然後量線段R得出2倍，則線段A含有此線段的5＋5＋5＋2倍就是17倍（沒有剩餘）。

2）相反的，如用一線段量線段 A和線段 B沒有剩餘，則用此線段量線段R時，也沒有剩餘。

例如用一線段量線段A得17倍，量線段B得 5 倍，則在線段A中等於 3B 的一部分含有15倍，而等於剩餘R的一部分含有17－15即 2 倍。

因此在兩組線段

$\overbrace{A\text{與}B}$　　　　　$\overbrace{B\text{與}R}$

中，必有相同的**公度**（如果有公度存在），所以這兩組線段的**最大公度**也必須相同。

除這兩個定理以外還必須補加以下的**測量公理（阿基米得公理）**：

不論較大的線段（A）如何大，較小的線段（B）如何小，用較小線段量較大線段，逐次得 1、2、3 以至若干倍，而到達一定的m 倍時，或者不得剩餘，或者得小於較小線段的剩餘。換句話說，永遠能求出一個適當大的正整數m，而使 $B\cdot m<A$, 但 $B(m+1)>A$。

147. 二線段最大公度的求法. 求二已知線段AB與CD（圖165）的最大公度。

在較大的線段上截取（用圓規）較小的線段，使次數盡可能多，這時根據以上的公理有以下兩種情形：

1）用線段 CD 量線段 AB 沒有剩餘時，由定理 1 線段 CD 就是最大公度。

2）有剩餘時，剩餘的線段 EB（如圖）小於 CD, 適合於定理 2 。

在求二小線段（線段 CD 及第一個剩餘 EB）的最大公度時，可以用以前的方法，在線段CD上截取線段EB，

使次數盡可能多。

這時又產生出兩種情形：

1）用線段 EB 量線段 CD 沒有剩餘時，則最大公度就是 EB。

2）有剩餘時，剩餘的線段 FD（如圖）小於 EB，必須再求二小線段即線段EB及 第二個剩餘FD的最大公度。

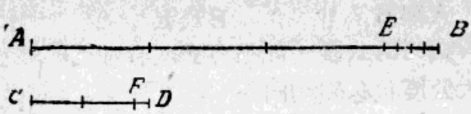

圖 165

這樣繼續作下去，我們便能得到以下的兩種情形：

1）在最終不得任何剩餘；

2）繼續用以上的方法，最終還得剩餘（在豫想中我們可能分到任意小的線段，當然這也只有在理論上才可能作到）。

在第一種情形，最後的剩餘就是已知二線段的最大公度。爲了便利的求出在已知 線段 中含 有最 大公度的若干倍，我們可以順次寫出由於每次相截後所得出的等式，如由上圖我們可得以下的等式：

在第一次相截以後……$AB=3\,CD+EB$

在第二次相截以後……$CD=2\,EB+FD$

在第三次相截以後……$EB=4\,FD$

在以上的等式中，把最小的線段 FD 代入最大的線段時，則得：

$$EB=4FD,\ CD=(4FD)\cdot 2+FD=9FD,$$

$$AB=(9FD)\cdot 3+4FD=31FD.$$

用同樣的方法，可以求出同圓或等圓中兩弧以及兩角的最大公度。

在第二種情形下，已知二線段不可能有公度。為了證明這點，假定已知的二線段AB和CD有公度，我們知道，不但線段 AB 與 CD 含有這個公度的整數倍，而且剩餘的線段 EB 也含有這個公度的整數倍，所以在第二個剩餘線段 FD，在第三、第四以及第五個剩餘線段等等，也必須含有這個公度的整數倍。因為以上這些剩餘是漸次減小的，所以在每個剩餘中所含公度的倍數，必須小於以前剩餘中所含公度的倍數，例如假定在線段 EB 中含有公度的100倍（一般來說含有m倍）則在線段 FD 中含有公度的倍數必須小於100（不能大於99倍）；在這以下的剩餘中，所含公度的倍數也必須小於99（不能大於98倍）等等。因為在漸次減小的正整數：100、99、98、…（在一般來說是 m、$m-1$、$m-2$、…）中兩端是有限的（大不能大於m），所以我們順次的做下去，必能到達一個終點（就是不得任何剩餘）。但，如果我們順次的相截而無止境（到任何時候也有剩餘）時，則已知的二線段不能有任何的公度。

148. 可度及不可度的線段. 如已知的二線段有公度，則此二線段叫做**可度線段**。如已知的二線段沒有公度，則此二線段叫做**不可度線段**。

不可度線段的存在，是不可能使人輕易相信的。然而，實際上繼續輾轉相截，我們永遠能得到一個適當小的剩餘，而在前一個剩餘中含有這個剩餘的整數倍及一個剩餘，這是可能而且應當的。不過由於用具（圓規）的不精和視覺的不準確，我們觀察不到罷了。現在我們就來證

明這種不可度線段的存在。

149. 定理. 正方形的對角線和邊是不可度的。

因爲正方形的對角線把正方形分成兩個等腰直角三角形，所以這個定理也可用以下的說法：**等腰直角三角形的斜邊與直角邊是不可度的。**

我們先證明以下的三角形性質：如果在 $\triangle ABC$ 的斜邊上（AC，圖166）截取線段AD，使AD等於此三角形的一個直角邊（如AB），作 DE 垂直 AC，這時所得的直角三角形 DEC 也是等腰直角三角形，並且直角邊 BC上的線段 BE等於斜邊上的線段 DC。

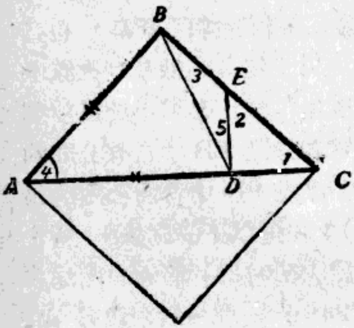

圖 166

爲了證明這一點，我們作一直線 BD，再看一看三角形 DEC 和 BED 的角。因爲ABC 是等腰直角三角形，所以$\angle 1=\angle 4$，因此$\angle 1=\angle 45°$，但在直角三角形 DEC 中，$\angle 2=45°$，所以三角形DEC 有兩個相等的角，因此邊 DC 等於 DE。

在 $\triangle BDE$ 中，$\angle 3=\angle B-\angle ABD$，$\angle 5=\angle ADE-\angle ADB$，並且 $\angle ADB=\angle ABD$（因爲$AB=AD$）；$\angle B$ 與 $\angle ADE$ 都是直角，所以 $\angle 3=\angle 5$。由此可知三角形 DBE 是等腰三角形，所以 $BE=ED=DC$。

由此我們再求線段AB與AC的公度。因爲$AC>AB$與$AC<AB+BC$，即 $AC<2AB$，所以用直角邊 AB量斜邊 AC 只能得一倍和剩餘 DC。現在用這個剩餘 DC 量 AB 或

和它相等的BC，已經證出BE=DC，所以再用DC量EC。然而 EC 是等腰直角三角形 DEC 的斜邊， 所以為了求出公度繼續進行相截，就是用等腰直角三角形 DEC 的直角邊 DC 量斜邊 EC。如此順次做下去，就是順次用新的等腰直角三角形的直角邊去量斜邊， 很明顯的， 這樣量的過程中，永遠有剩餘，所以線段 AC 和 AB 的公度是不存在的。

150. 關於測量線段的概念. 為了明確表示出已知線段的長度 ，必須將已知線段與另一線段比較 ，例如與一公尺長的線段比較（這個與已知線段比較的線段叫做**長度單位**）。此時可能有二種不同的情形：就是所測量的線段和長度單位可度或不可度。

1） 用一長度單位測量可度的線段，也就是要求出在此線段中含有若干個長度單位或長度單位的部分。

例如利用與任一線段A（圖167)為可度的長度單位B測量線段A。則可求出一個公度和線段B與A中含有此公度的若干倍。如果公度等於B本身，則所測量的結果是整數，例如線段A含有線段B的三倍時，則說線段A的長度等於3個單位長度。如果公度是線段B的一部分時，則所測量的結果是分數，例如公度是線段B的$\frac{1}{4}$，而線段A含有此公度的9倍（如圖167)，則說線段A的長度等於$\frac{9}{4}$。

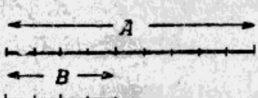

圖 167

測量以後所得的數叫做所測的量的**值**。整數和分數叫做**有理數**。

2） 已知線段A與單位B不可度時，可用間接量法；

即用與單位B爲可度的另外二線段代替線段A的測量，且其中一個大於A，另一個小於A，並且這兩個線段和A的差都可以任意小。 爲了找到這樣的可度線段， 須如下進行：假設我們要求出與A的差小於$\frac{1}{10}$單位長度B的這樣的可度線段。將單位B分成10等份（圖168），並用其中的一

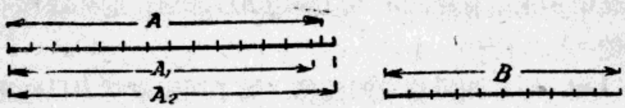

圖 168

小份量線段A，使量得的次數盡可能多。設量得13次同時得一個小於$\frac{1}{10}$B的剩餘。這時我們將得出一個與單位可度且小於A的線段A_1。再用$\frac{1}{10}$B量一回，則可得出另一個與單位可度但是大於A的線段A_2，同時這兩個線段與A的差都小於$\frac{1}{10}$單位。線段A_1和A_2的長用$\frac{13}{10}$和$\frac{14}{10}$表示。這些數就是A線段長的近似值：第一個是不足近似值，第二個是過剩近似值。因爲線段A和線段A_1或A_2的差小於單位的$\frac{1}{10}$，所以就說，這些數中的每一個都表示線段A的長，且精確到$\frac{1}{10}$。

一般來說，爲了求出線段A的長度近似值精確到單位的$\frac{1}{n}$，可將單位B分成n等份，並求出A含有$\frac{1}{n}$單位的若干倍；如果A含有m倍和一個小於$\frac{1}{n}$B的剩餘，則$\frac{m}{n}$和$\frac{m+1}{n}$就是線段A的長度近似值，且精確到$\frac{1}{n}$，第一個是不足近似值，第二個是過剩近似值。

當所測量的線段A和單位B可度時，我們用這種方法可以求出測量的近似結果；而當不可度時，就不能用一個有理數表示出正確的結果。如果我們希望得出正確的結果時，亦可能得到。

當線段A與測量單位不可度時，爲了求出一個數，來表示線段A的長度眞值，用以下的方法。

順次計算線段A長度的不足近似值，首先精確到0.1，然後精確到0.01，再精確到 0.001 並無限繼續這種過程，每次的精確程度增大一個小數位。由這種過程將順次得出小數，首先是一位小數，然後兩位小數、三位小數以至最後得更多位的小數。無限繼續上述過程所構成的小數是無限不循環小數。（這個小數不能是循環的，否則它可以變爲普通分數，這就表示線段 A 和長度單位是可度的。）

由代數可知，任一無限不循環小數都是**無理數**。我們最常見的無理數是不盡根數，例如$\sqrt{2}$是**無理數**。化爲無限小數則爲

$$\sqrt{2}=1.4142\cdots\cdots。$$

即，當線段A和單位B不可度時，測量線段A所得的無限小數是無理數。規定這個數是線段 A 的長度眞值。

注意：順次計算線段A的長度近似值精確到0.1、0.01、0.001、…，則無論取不足近似值或過剩近似值，都可以得到同一的無理數。事實上，關於帶有相同的十進精確程度的兩個近似值——一個不足，另一個過剩，其中間的差別只在最後的小數位上。而當順次增大精確的程度時，這

個最後的小數位離小數點向右方愈來愈遠，小數的位數愈來愈多。若無限繼續這種過程，關於以上兩種情形將得出同一個無限小數，也就是同一個無理數。

作爲眞值的無限小數大於其任何一個不足近似值，而小於其任何一個過剩近似值。

151. 無限小數. 無限小數的理論在代數學中是以下列定義爲基礎。

1. 無限小數叫做實數。

2. 如果兩個無限小數的各同位數相等， 則這兩個 無限小數相等。

3. 關於兩個不等的無限小數，在第一個不相等位上的數大的叫做較大的無限小數。

如果在一個無限小數中， 由某位起以後所有的小數位都等於0時，則這個小數等於一個有限小數， 這個有限小數是由已知無限小數抹去最後的有效數字右邊所有的0得出來的。例如無限小數7.8530078000……等於有限小數 7.8530078。循環節爲9的無限循環小數永遠可以用一個有限小數代替， 這個有限小數是由已知無限小數，在不是9的最後小數位上加1，再抹去以下所有的9得來的。例如小數 3.72999……用小數 3.73代替。

152. 無限小數的近似值. 如果取已知無限小數到第n位，則所得的有限小數叫做這個無限小數的精確到 $\frac{1}{10^n}$ 的不足近似值。如果在這個小數的最後一位上加1，也就是這個小數加$\frac{1}{10^n}$，則得一個新的有限小數，這個有限小數叫做無限小數的過剩近似值而帶有相同的精確程度。設有一實數 α，小數位爲 n 位的不足近似值用 α_n 表示，其過剩近似值用 α'_n 表示 ，則$\alpha'_n=\alpha_n+\frac{1}{10^n}$。

由實數大小的定義可得，該實數大於其任何一個不足近似值，而小於其任何一個過剩近似值。例如假設已知實數是 $\sqrt{2}=1.414$

……。其精確到 0.01 的不足近似值是1.41，過剩近似值是1.42，因爲

$$1.41=1.41000\cdots\cdots$$

$$1.42=1.42000\cdots\cdots$$

則由實數大小的定義，可得：

$$1.41000\cdots<1.414\cdots<1.42000\cdots$$

或 $1.41<\sqrt{2}<1.42.$

153. 實數的運算・加法. 設已知二實數 α 和 β，取其含 n 位小數的近似值（n 是任意正整數），先取不足近似值，再取過剩近似值。用 α_n 和 β_n 各表示 α 和 β 的不足近似值，而用 α'_n 和 β'^n 各表示 α 和 β 的過剩近似值。這樣

$$\alpha'_n=\alpha_n+\frac{1}{10^n}，\beta'_n=\beta_n+\frac{1}{10^n}. \qquad (1)$$

現在取 $\alpha_n+\beta_n$ 、$\alpha'_n+\beta'_n$ 。其中的每一個都含 n 位小數。把第一個和叫做 γ_n，第二個和叫做 γ'_n：

$$\alpha_n+\beta_n=\gamma_n, \alpha'_n+\beta'_n=\gamma'_n.$$

將等式（1）邊邊相加，得：

$$\alpha'_n+\beta'_n=\alpha_n+\beta_n+\frac{2}{10^n}$$

或 $$\gamma'_n=\gamma_n+\frac{2}{10^n}.$$

這個等式說明，小數 γ'_n 是由小數 γ_n 在最後的小數位上加 2 得來的。若 n 無限增大，γ_n 就變成無限小數；用 γ 來表示。這個小數或是循環的或是不循環的。假設小數 γ 不循環，在這種情形下，它應當含有無限多個不是 9 的小數位。同時在小數 γ_n 中，不是 9 的小數位數應當隨着 n 的增大而增多。因爲小數 γ_n 加 $\frac{2}{10^n}$，並不影響不是9的最後兩位左邊的各小數位，所以小數 γ_n 和 γ'_n 中，相同的小數位數將隨着 n 的增大而無限增多。所以，γ'_n 和 γ_n 將趨於同一個無限小數。綜合以上所述，對於任意的正整數 n，可得

$$\gamma_n<\gamma<\gamma'_n. \qquad (2)$$

現在假設小數 γ 是循環的，在這種情形下，它代表某一個有理