高等学校教材

数学物理方法

郭敦仁 编

高等教育出版社

高等学校教材

数学物理方法

郭敦仁 编

高等教育出版社

本书内容分两部分：第一部分是复变函数論及其应用，侧重于应用方面；第二部分是数理方程，着重介紹了几种常用的解法．书中各章配有相应的练习題．

本书可作为綜合大学物理系各专业数学物理方法課程的教材．

数 学 物 理 方 法

郭　敦　仁　编

北京市书刊出版业营业許可証出字第119号

高等教育出版社出版（北京景山东街）

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

統一书号K13010·1222　开本 850×1168 $^{1}/_{32}$　印张 $14^{14}/_{16}$

字数 357,000　印数 0,001—3,200　定价（5）¥1.40

1965年12月第1版　1965年12月北京第1次印刷

序

本书是在北京大学物理系数学物理方法课程讲义的基础上编写的，有些地方，为了便于读者参考，作了补充．内容分为两个部分：第一部分是复变函数论的基本知识和它的一些应用；第二部分是数理方程．后一部分是按照解法编写的，故把关于方程的分类放到较后的第二十一章．积分方程没有包括进去．

讲授本书大约需要 110 学时．对于讲授 90 学时的课程，可略去其中第十九、二十、二十二、二十三各章以及所有带 * 号的各节．

在本书初稿完成后，复变函数论部分和数理方程部分曾分别得到王竹溪先生和萧树铁先生的许多宝贵意见，谨在此致谢．

由于编者的水平所限，书中一定有错误和不妥的地方，希望使用本书的教师和同学在发现后提出批评和意见，以便在有机会再版时改正．

编　者

1965 年 2 月

目　　录

第一部分　复变函数论及其应用

第一章　复数的基本概念

复变函数的理论在物理学中有广泛的应用．本书的第一部分将讨论复变函数的基本概念和理论，以及一些应用，如计算定积分，解常微分方程等；在第二部分还要用它来讨论一些特殊函数的性质和解某一类边值问题。

1.1　复数及其运算规则

复数是遵从一定运算规则（见下）的一对**有序**实数，通常用 $(a,\ b)$ 或者 $a+bi$ 表示，其中 a 和 b 是实数，$i=\sqrt{-1}$（即 $i^2=-1$）．

实部和虚部　a 称为复数 $\alpha=a+bi$ 的实部，常用符号 $\mathrm{Re}(\alpha)$［或 $\mathrm{R}(\alpha)$］表示；b 称为 α 的虚部，用 $\mathrm{Im}(\alpha)$［或 $\mathrm{I}(\alpha)$］表示．

共轭复数　复数 $a-bi$ 称为 $\alpha=a+bi$ 的共轭复数，通常用 $\bar{\alpha}$（或 α^*）表示．显然，$\bar{\bar{\alpha}}=\alpha$．

两个复数，当而且只有当它们的实部和虚部分别相等时，才是相等的．如果一个复数的实部和虚部同时为零，则称这复数等于零．

复数的基本运算规则如下：

加法和减法：两个复数 $\alpha_1=a_1+b_1i$，$\alpha_2=a_2+b_2i$ 之和与差是

$$\alpha_1\pm\alpha_2=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i. \tag{1}$$

乘法：α_1 和 α_2 的乘积是

$$\alpha_1\cdot\alpha_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i. \tag{2}$$

除法：α_1 被 $\alpha_2\neq 0$ 除的商是

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\alpha_1\cdot\bar{\alpha}_2}{\alpha_2\cdot\bar{\alpha}_2}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}$$

$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(b_1a_2-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}. \tag{3}$$

从上面的运算规则看到，复数满足下列规律：设 α,β,γ 是复数，则

$$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha \quad (交换律), \tag{4}$$

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) \quad (结合律), \tag{5}$$

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma \quad (分配律). \tag{6}$$

1.2 复数的几何表示

复数的几何表示对于了解复变函数理论中的一些概念，例如多值函数，解析开拓等，很有帮助，而在复变函数论的一个重要应用方面——保角映像，复数的几何表示更是必需的.

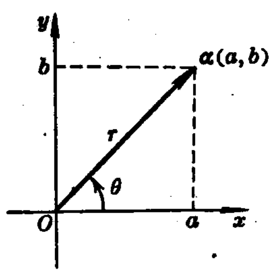

图 1

一个复数 $\alpha=a+bi$ 可以用平面上的一点表示(参看图 1).

在平面上作一直角坐标系，原点为 O，并取横轴 Ox 为实轴，纵轴 Oy 为虚轴，则复数 α 就可以用横坐标等于 a、纵坐标等于 b 的点表示. 显然，对于每一复数，平面上有唯一的一个点与之相应；反过来，对于平面上的每一点有唯一的一个复数与之相应. 这也就是说，复数的全体与平面上的点有一一对应的关系. 这样的平面称为**复数平面**.

模与辐角 除了直角坐标，一个复数 α 还可以用极坐标 (r,θ) 表示(参看图 1)：

$$r=\sqrt{a^2+b^2}\,(\geqslant 0),\quad \theta=\arctan\frac{b}{a}, \tag{1}$$

其中 θ 以逆时针方向为正向，即 θ 增加的方向. r 称为 α 的模，θ 称为 α 的辐角；前者又常用 $|\alpha|$ 表示，后者常用 $\arg\alpha$ 表示，即

$$r=|\alpha|,\quad \theta=\arg\alpha. \tag{2}$$

与直角坐标表示不同，用极坐标表示一个复数时，辐角 $\arg\alpha$ 之值不是唯一的，可以加上 2π 的任意整数倍①. 通常称满足

$$-\pi<\arg\alpha\leqslant\pi \tag{3}$$

的 $\arg\alpha$ 之值为**辐角的主值**.

又，由于 $\arctan\frac{b}{a}$ 是多值的，(1)式中比值 $\frac{b}{a}$ 与 θ 之间的对应关系需要确定. 若规定

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arctan\frac{b}{a}\leqslant\frac{\pi}{2}, \tag{4}$$

则当 $\alpha=a+bi$ 时，

$$\left.\begin{array}{ll}\text{在第一、四象限内，} & \theta=\arctan\dfrac{b}{a},\\ \text{在第二象限内，} & \theta=\pi+\arctan\dfrac{b}{a},\\ \text{在第三象限内，} & \theta=-\pi+\arctan\dfrac{b}{a}.\end{array}\right\} \tag{5}$$

用极坐标表示复数 $\alpha=a+bi$ 时，因 $a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$，故有

$$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta). \tag{6}$$

这是复数的三角函数表示.

引进纯虚数指数函数②

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \tag{7}$$

① 复数 0（即原点）的极坐标表示较为特殊，其模为零，辐角完全不确定.

② 关于复数指数函数的普遍定义见 3.2 节和 5.4 节.

后，复数 α 又可表示为

$$\alpha=re^{i\theta}. \tag{8}$$

由(7)式可以证明指数函数的下列性质：

$$e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \tag{9}$$

证明如下：

$$\begin{aligned}e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2}&=(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\\&\quad+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\\&=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)=e^{i(\theta_1+\theta_2)}.\end{aligned}$$

在复数的乘、除、开方等运算中用(8)式的表示最方便．例如两复数 $\alpha_1=r_1e^{i\theta_1}$，$\alpha_2=r_2e^{i\theta_2}$ 的乘积是

$$\alpha_1\cdot\alpha_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \tag{10}$$

即两复数的乘积之模等于两者的模的乘积，乘积的辐角则等于两者的辐角之和．类似地，有

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}\quad(r_2\neq0). \tag{11}$$

加法的几何表示　从 1.1 节(1)式可以看出，复数的加法与平面矢量的加法一样．复数的实部和虚部分别与矢量在直角坐标系中的两个分量相应．因此，常用平面上的矢量 $\overrightarrow{O\alpha}$(图 2) 表示复数 α．当然，用矢量表示一个复数 α 时，矢量的起点不必一定在原点 O，终点也不必一定在 α 点，只要矢量在实轴 Ox 和虚轴 Oy 方

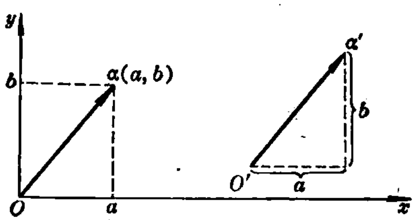

图　2

向上的分量分别等于 α 的实部和虚部即可，例如图 2 中的矢量 $\overrightarrow{O\alpha}$ 和 $\overrightarrow{O'\alpha'}$ 都代表同一复数 α.

因此，复数的加法可用平行四边形作图法表示如图 3(a)，也可以用三角形作图法表示如图 3(b). 在图 3(b)中 $\overrightarrow{\alpha_1\alpha_2'}=\overrightarrow{O\alpha_2}$.

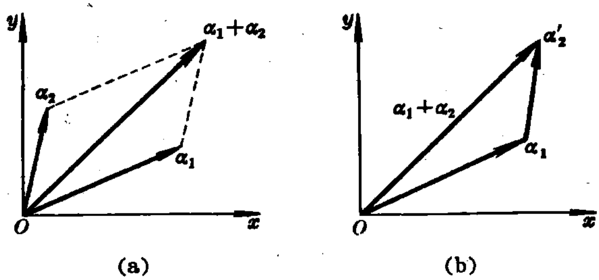

图 3

应当指出，复数的加法虽然与平面矢量的加法一样，复数的乘法与平面矢量的乘法(无论是标积或矢积)却是完全不同的.

由几何作图法易证下列重要不等式：

$$|\alpha_1+\alpha_2|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|, \tag{12}$$

$$|\alpha_1-\alpha_2|\geqslant\Big||\alpha_1|-|\alpha_2|\Big|. \tag{13}$$

1.3 复数序列·极限的概念

复数 $z_n=x_n+iy_n \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$的全体称为一**复数序列**，用$\{z_n\}$表示.

聚点(或极限点) 给定序列$\{z_n\}$，如果存在复数 z，对于任意的 $\varepsilon>0$，恒有无穷个 z_n 满足$|z_n-z|<\varepsilon$，则 z 称为$\{z_n\}$的一个**聚点(或极限点)**.

一个序列可以有不止一个聚点，例如序列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \cdots, \frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}, \cdots$就有两个聚点，即 0 和 1.

极限 给定序列$\{z_n\}$，如果存在复数 z，对于任意的 $\varepsilon>0$，总能找到 $N(\varepsilon)>0$，使当 $n>N$ 时有$|z_n-z|<\varepsilon$，则 z 称为序列$\{z_n\}$的极限，或者说序列$\{z_n\}$收敛于 z，而写成

$$\lim_{n\to\infty} z_n=z.$$

一个序列的极限必定是这序列的聚点，而且是唯一的聚点.

有界序列和无界序列 给定序列$\{z_n\}$，如果存在一个正数 M，使对于所有的 n 都有$|z_n|<M$，则序列称为有界的；如果对于任何正数 M，总有一个 n 使$|z_n|>M$，则$\{z_n\}$称为无界的.

玻-外(Bolzano-Weierstrass)定理 一个有界的（无穷）序列至少有一个聚点.

这定理的证明与实数情形类似，也是用区间套的方法，这里从略①.

序列收敛的判据——科希(Cauchy)充要条件 一个序列$\{z_n\}$收敛的充要条件是：任意给定 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N(\varepsilon)$，使对于任意正整数 p 有

$$|z_{N+p}-z_N|<\varepsilon.$$

证明如下：条件是必要的，因为若 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z$，则对于任意的 $\varepsilon>0$，必存在 $N(\varepsilon)$，使$|z_N-z|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|z_{N+p}-z|<\frac{\varepsilon}{2}$，因此有

$$|z_{N+p}-z_N|=|z_{N+p}-z+z-z_N|\leqslant|z_{N+p}-z|+|z_N-z|<\varepsilon,$$

其中 p 是任意正整数.

要证明条件是充分的，以 z_N 为圆心，ε 为半径，作一圆. 既然不论 p 是什么正整数都有$|z_{N+p}-z_N|<\varepsilon$，故在所作的圆内有$\{z_n\}$的无穷个点，而在圆外只能有$\{z_n\}$的有限个点. 因此，$\{z_n\}$是有界序列. 按玻-外定理，$\{z_n\}$至少有一个聚点，且位于圆内. 现在证

① 可参看，例如，И.И. 普里瓦洛夫，复变函数引論，第一章 §3.4(1954).

明，在这种情形下，$\{z_n\}$只能有一个聚点，因而是收敛的. 设$\{z_n\}$有两个聚点A和B，则因A和B都在所说圆内，故$\overline{AB}<2\varepsilon$，或者$\varepsilon>\frac{1}{2}\overline{AB}$，而这是与$\varepsilon$为任意正数相矛盾的.

练习题 1. 证明：如果$z_n=x_n+iy_n$而$\{z_n\}$收敛于$z=x+iy$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$；反之亦然(由此可见一个复数序列的收敛问题与两个实数序列的收敛问题等价).

练习题 2. 证明下列定理：若$\{z_n\}$和$\{z'_n\}$都收敛，则

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n\pm z'_n)=\lim\limits_{n\to\infty}z_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}z'_n$，

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}z_n\cdot z'_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}z'_n$，

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{z_n}{z'_n}=\lim\limits_{n\to\infty}z_n\Big/\lim\limits_{n\to\infty}z'_n$ (设$\lim\limits_{n\to\infty}z'_n\neq0$).

1.4 无穷远点

根据上节科希充要条件知道，一个无界序列不可能是收敛的. 因为如果$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z$(有限)，则对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在正数$N$，使当$n>N$时$|z_n-z|<\varepsilon$，故一定能找到一个正数$M$，例如$M$等于$|z_1|$，$|z_2|$，…，$|z_N|$和$|z|+\varepsilon$中的最大者，使对于所有的$n=1,2,\cdots$都有$|z_n|<M$，而这与序列是无界的相矛盾.

一个无界序列，如果在有界处没有聚点，则说这序列的极限为无穷，而写成

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\infty.$$

也就是说，对于任意给的正数M，总可以找到$N>0$，使当$n>N$时$|z_n|>M$.

在复变函数理论中常把无穷也了解为复数平面上的一个"点"，其模大于任何正数，辐角不定. 包括无穷远点在内的复数平面称为**扩充了的复数平面**.

在平面上用一个点来代表无穷是比较难于直观地理解的. 因此对于包括无穷在内的几何图象，也用复数球面的表示法：在复数平面上作一任意半径的球面与平面上的坐标原点O相切(图 4). 从O引垂直于平面的直线，与球面交于Q点. 对于复数平面上的

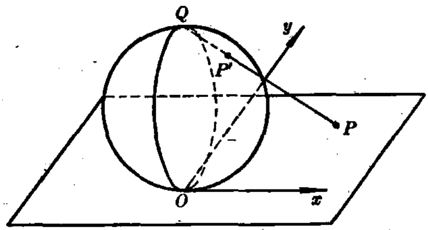

图 4

每一点P (代表一复数 z)作直线PQ交球面于P'点(测地投影). 于是，对于每一复数z都有球面上的一点P'与之相应. 因此，这球面也可用来表示复数的全体. 现在如果让P点以**任何方式**无限地远离原点O，则相应的P'点将无限地趋近球面的顶点Q. 这样，Q就可以看作无穷远的代表点，而整个球面就把无穷远点包括在内. 这样的球面称为**复数球面**或者**里曼**(Riemann)**球面**.

第二章　解析函数

2.1　复变函数·区域的概念·连续和一致连续

设有复数平面（或者球面，下同）上的一个点集E（复数的集合），复变数$z=x+iy$可以取E中每一点的复数值．如果对于E中的每一个z值，都有一个或多个复数值$w=u+iv$（u和v为实数）与之相应，则w称为z的函数——复变函数，定义域为E，用符号

$$w=f(z),\quad z\in E$$

表示．因$z=x+iy$，故u和v都是x和y的实函数，即

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y).\qquad(1)$$

这表明，一个复变函数无非是两个二元实变函数的有序组合．

但在复变函数论中要研究的不是这么普遍的复变函数，而是研究一类具有特殊性质的复变函数——解析函数（见 2.3 节）．

区域的概念　在解析函数论中，函数的定义域不是一般的点集，而是满足一定条件的特殊点集，称为区域，常用G来表示．

为了说明区域的概念，先解释什么叫做点集的内点．点集的**内点**是这样的点，以它为圆心作一圆，只要半径足够小，则圆内所有的点均属于该点集．

区域是满足下列两个条件的点集：

a）全由内点组成；

b）具有连通性，即是点集中的任何两个点都可以用一条折线连接起来，折线上的点全属于这点集．

区域常用不等式表示．例如$|z|<r$表示圆心在原点、半径为r的圆内区域；$a<|z-c|<b$表示一环形区域，环形的内外圆心均