

— 高等学校教材 —

# 線性代數

上海交通大学数学教研室編

樂汝書校訂

人 民 教 育 出 版 社

高等学校教材



代 数 线 性

上海交通大学数学教研室編

樂 汝 书 校 訂

人 民 教 育 出 版 社

本书原系天津大学等27所高等工业学校編“高等数学”(无线电等类型专业部分)一书的第一章(由上海交通大学数学教研室編),現由清华大学樂汝书同志审查和校訂,作了修改,并由高等工业学校高等数学課程教材編审委员会复审后,以小册子形式出版。本书介紹了行列式,矩陣及其特征方程的計算,綫性方程組和二次型等最基本的概念,写法上注意了从易懂的概念入手,可作为高等工业学校无线电类型专业試用教科书,其他类似专业也可作参考。

## 綫 性 代 数

上海交通大学数学教研室編

樂 汝 书 校 訂

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

人 民 教 育 印 刷 厂 印 装

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 經 售

统一书号K13010·1180 开本 850×1168  $\frac{1}{32}$  印张 1  $\frac{30}{16}$

字数 37,000 印数 0,001—8,000 定价(5) 0.19

1964年12月第一版 1964年12月北京第1次印刷

# 目 录

|                        |    |
|------------------------|----|
| § 1. 行列式的計算及其性质        | 1  |
| I. 含三个三元綫性方程的方程組与三阶行列式 | 1  |
| II. 高阶行列式的定义及其計算       | 6  |
| § 2. 矩陣                | 8  |
| I. 网络問題                | 8  |
| II. 綫性变换与矩陣的运算         | 10 |
| III. 逆矩陣               | 15 |
| § 3. 矩陣的秩与綫性方程組        | 19 |
| I. 矩陣的秩                | 20 |
| II. 綫性方程組              | 23 |
| III. 齐次綫性方程組           | 28 |
| § 4. 二次型               | 29 |
| § 5. 相似矩陣 特征多項式的計算     | 40 |
| 习題                     | 46 |

## 綫性代数

在这本书中,我們主要介紹綫性变换、矩陣及二次型的一些基本概念。这些概念在实用上及理論上都有重要的价值,特别是矩陣理論在解綫性方程組时很有用处,这在很多实际問題中是常常要碰到的。

此外,在电路的網絡理論中,可直接利用矩陣計算網絡中的問題而不必建立綫性方程組,故在網絡問題中利用矩陣进行計算,較其他方法优越

### § 1. 行列式的計算及其性质

在工程上有很多問題,常常归結到解一个綫性方程組的問題,本节先对含有三个三元綫性方程的方程組作一探討,由此引出三阶行列式,然后再把三阶行列式推广到高阶行列式。

I. 含三个三元綫性方程的方程組与三阶行列式 已知含有三个三元綫性方程的方程組

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (1)$$

在此方程組中,先从第一、第二两方程消去  $x_3$ ,再从第一、第三两方程消去  $x_3$ ,最后从这新得到的两个方程消去  $x_2$ ,得到

$$\begin{aligned} & (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ & - a_{12}a_{21}a_{33})x_1 = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 \\ & - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33}. \end{aligned} \quad (2)$$

我們把式(2)中  $x_1$  的系数  $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$  記作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (3)$$

并称之为三阶行列式, 行列式中出现的各数  $a_{11}, a_{12}, \dots$  称为它的元素, (3)中的横排称为行列式的行, 纵排称为行列式的列, 我們用  $D$  表示行列式(3), 容易看出: (2)式中等式右端刚好是将  $D$  中的  $a_{11}, a_{21}, a_{31}$  (也就是  $x_1$  的系数) 分别换成  $b_1, b_2, b_3$  的结果. 因此(2)中等式右端是

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

这样(2)式就可以写为:

$$Dx_1 = D_1. \quad (4)$$

同理可以得到:

$$Dx_2 = D_2, \quad (5)$$

$$Dx_3 = D_3, \quad (6)$$

这里  $D_2$  是  $D$  中的  $a_{12}, a_{22}, a_{32}$  分别换成  $b_1, b_2, b_3$  所得到的行列式;  $D_3$  的意义类似.

若  $D \neq 0$ , 则由(4)、(5)、(6)式得到

$$x_1 = \frac{D_1}{D},$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad (7)$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

将(7)代入方程组(1)就可以验证它是适合(1)的, 所以(7)就是方

程組(1)的唯一解.

例 1. 解下列綫性方程組:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

解 系数行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0,$$

所以方程組有唯一解:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-8} = -\frac{11}{8},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-8} = -\frac{9}{8},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{-8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}.$$

从上例看出要解綫性方程組, 只要算出行列式  $D_1, D_2, D_3$  和  $D$  就可以了. 为了便于計算行列式, 我們需研究三阶行列式的一些性质.

将行列式  $D$  的行列互换, 而不改变各行和各列的順序, 这样得到的行列式  $D'$  叫做  $D$  的轉置行列式, 例如

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的轉置行列式为

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 1 行列式与它的轉置行列式相等。

性质 2 交换行列式的任意两行(两列), 行列式仅改变正负号。 例如:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

性质 3 将一个行列式的某一行(列)的所有元素乘以某一数  $k$ , 等于用  $k$  乘这个行列式。 例如:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 4 如果某一行(列)的各元素是二項之和, 那么可以把这行列式写成两个行列式之和。 例如:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} & b_{23} + c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 5 将行列式的某一行(列)的元素乘以同一数后加到另一行(列)的对应元素上去, 行列式不变。 例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

若  $a_{ij}$  是三階行列式  $D$  中第  $i$  行、第  $j$  列的元素，所謂  $a_{ij}$  的代數余子式  $A_{ij}$  是指划去  $a_{ij}$  所在行和列的元素后，其余元素所构成的一個二階行列式与  $(-1)^{i+j}$  的乘积，例如：

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}).$$

性質 6 任一行(或列)中各元素与其代數余子式的乘积的和等于行列式的值；任一行(或列)的元素与另一行(或列)的对应元素的代數余子式的乘积的和等于 0. 例如

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3} &= \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ D & i = j. \end{cases} \\ a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + a_{3i}A_{3j} &= \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ D & i = j. \end{cases} \end{aligned}$$

以上性質讀者可以自己証明。

例 2. 利用上述性質計算下面行列式：

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

解 將第一行加到第二行上去，然後再將第一行乘以  $-2$  加到第三行上去，由性質 5 知行列式不變，即：

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & -7 \end{vmatrix}.$$

再由性質 6：

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & -7 \end{vmatrix} &= 1 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} \\ &\quad + 0 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 27. \end{aligned}$$

**II. 高阶行列式的定义及其计算** 对于任意正整数  $n$ , 我们来定义  $n$  阶行列式. 设有  $n^2$  个数排成  $n$  行  $n$  列 (横的称行, 纵的称列) 如下:

$$a_{11} \ a_{12} \cdots a_{1n}$$

$$a_{21} \ a_{22} \cdots a_{2n}$$

$$\cdots \cdots \cdots$$

$$a_{n1} \ a_{n2} \cdots a_{nn}$$

其中  $a_{ij}$  是第  $i$  行第  $j$  列的数. 今在每一行中选出一数, 并且要求这样选出的  $n$  个数都在不同的列上. 作这  $n$  个数的乘积, 然后按一定的规则乘以  $+1$  或  $-1$ , 将所有这样得到的乘积求代数数和, 这个和数称为和按上述次序排成  $n$  行  $n$  列的这  $n^2$  个数相对应的  $n$  阶行列式, 并记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}.$$

上面等式右端中所写出一项  $a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$  是选第 1 行第  $i_1$  列的数  $a_{1i_1}$ , 第 2 行第  $i_2$  列的数  $a_{2i_2}$ ,  $\cdots$ , 第  $n$  行第  $i_n$  列的数  $a_{ni_n}$  所得到的乘积. 由于要求这  $n$  个数在每一列中也恰有一个, 这样  $i_1 i_2 \cdots i_n$  就是  $1, 2, \cdots, n$  的一个排列. 上面和式是对所有不同排列  $i_1 i_2 \cdots i_n$  求和的, 所以和式中共有  $n!$  项.

现在来确定每一项前正负号的规则.

首先介绍排列  $i_1 i_2 \cdots i_n$  的逆序数的意义. 在排列中一个数字  $i$  的左面比  $i$  大的数字的个数称为该数字  $i$  的逆序数. 排列中所有数字的逆序数的和称为该排列的逆序数. 例如当  $n=5$  时, 排列  $32514$  中 1 的逆序数为 3, 2 的逆序数为 1, 4 的逆序数为 1, 3 与 5 的逆序数都为 0; 因此排列  $32514$  的逆序数为  $3+1+1=5$ . 一

个排列的逆序数就是在排列中将数字  $1, 2, \dots, n$  分别向左調动以調到自然排列  $12\dots n$  所需要調动的总次数.

現在規定, 在行列式定义中若項  $a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ni_n}$  的列的排列  $i_1i_2\dots i_n$  的逆序数为偶数, 則規定在該項前的符号为正; 若排列  $i_1i_2\dots i_n$  的逆序数为奇数, 則規定在該項前的符号为負.

讀者可以自己驗證, 我們已学过的二阶及三阶行列式都符合上面的定义.

上一节关于三阶行列式的六个性質对于  $n$  阶行列式也是正确的. 在一般情况下, 利用这些性質来計算  $n$  阶行列式, 比直接用定义計算要簡便得多.

**例** 計算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

**解** 把第三列加到第四列上去, 然后把第三列的  $-2$  倍加到第一列上去, 就得到

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\ & = (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \\ & = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 40. \end{aligned}$$

关于解含有  $n$  个  $n$  元綫性方程的方程組

[illegible]

可以把三元方程組的情形推廣而得到下面定理:

**克萊姆規則** 對於上述方程組,若係數行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

則方程組有唯一解, 且  $x_j = \frac{D_j}{D}$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ), 这里  $D_j$  是  $D$  中第  $j$  列換成方程組常數項  $b_1, b_2, \dots, b_n$  所得到的行列式. (證略)

## § 2. 矩陣

I. 網絡問題 設有一網絡，已知其各支路的阻抗為(圖1):  $Z_1=1, Z_2=9, Z_3=2, Z_4=9, Z_5=6$ . 電源電勢為  $E=100$ . 需要求解迴路電流  $I_1, I_2$  和  $I_3$ .

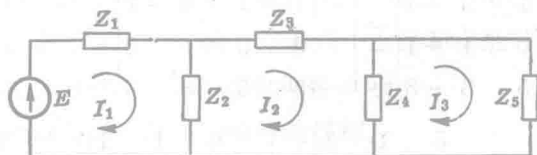


图 1

根据电工原理,可以得到三个迴路方程:

$$\begin{cases} I_1(Z_1 + Z_2) - I_2Z_2 = E, \\ -I_1Z_2 + (Z_2 + Z_3 + Z_4)I_2 - Z_4I_3 = 0, \\ -Z_4I_2 + I_3(Z_5 + Z_4) = 0. \end{cases}$$

代入数字, 上式可写成:

$$\begin{cases} 10I_1 - 9I_2 = 100, \\ -9I_1 + 20I_2 - 9I_3 = 0, \\ -9I_2 + 15I_3 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

此方程取决于其系数的排列, 方程左端的系数及右端可排成下面二个表:

$$\begin{pmatrix} 10 & -9 & 0 \\ -9 & 20 & -9 \\ 0 & -9 & 15 \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

若系数改变, 即表中的元素(数)改变, 对应的方程就会不同, 亦即具体的电路和参数都会不同. 这两个表对应了一个代数方程, 在数学上称这种具有一定排列的表为矩陣. 用矩陣的理論就可以解决网络及其他方面的问题.

从网络问题及其他问题中, 抽去电学或物理学的意义, 即得矩陣的一般定义.

定义 1 由  $m \times n$  个数按一定次序排成的含  $m$  行  $n$  列的表

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做矩陣, 其中  $a_{ij}$  叫做矩陣的元素.

当  $m=n$  时, 矩陣  $A$  叫做  $n$  阶矩陣(或  $n$  阶方陣).

当  $n=1$  时, 矩陣  $A$  叫做列矩陣, 或列向量, 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

当  $m=1$  时, 矩阵  $A$  叫做行矩阵, 或行向量, 即

$$A = (a_{11} a_{12} \cdots a_{1n}).$$

在电桥网络中, 我们常常见到下列矩阵:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

即  $a_{ij} (i \neq j)$  都等于零, 我们将这种矩阵叫做对角线矩阵, 当对角线矩阵中  $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$  时, 则称为么阵, 或单位矩阵, 记作  $E$ , 即

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

将矩阵  $A$  的列换成行所得到的矩阵  $A'$ , 称为  $A$  的转置矩阵, 例如:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

**II. 线性变换与矩阵的运算** 矩阵的运算是指二个矩阵的加、乘以及数与矩阵相乘等。我们以乘法为例来说明矩阵运算的实际意义。



图 2

设有一个四端网络 (图 2), 其参数  $A, B, C, D$ . 根据电工原理, 两端的电流  $I_1, I_2$ , 电压  $E_1, E_2$  有下面关系式:

$$\begin{cases} E_1 = AE_2 + BI_2, \\ I_1 = CE_2 + DI_2. \end{cases} \quad (2)$$

关系式 (2) 在数学上就是说用  $E_2, I_2$  线性地表示  $E_1, I_1$ . 这就叫做线性变换。

关系式(2)右端的系数可构成一个矩陣:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

称这矩陣为这网络的阻抗矩陣.

若有二个四端网络连接(图3), 由于这二个网络的结构, 第一个网络的输出为第二个网络的输入, 我们可以得到下面关系式:

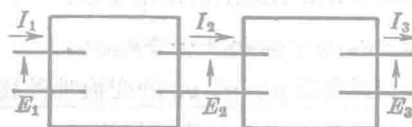


图 3

$$\begin{cases} E_1 = a_{11}E_2 + a_{12}I_2, \\ I_1 = a_{21}E_2 + a_{22}I_2. \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} E_2 = b_{11}E_3 + b_{12}I_3, \\ I_2 = b_{21}E_3 + b_{22}I_3. \end{cases} \quad (4)$$

这个网络的阻抗矩陣分别为:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

如果我们要在输出端有电流  $I_3$ , 电压  $E_3$ , 那么输入端的电流、电压应为多少. 这问题反映在数学上就是要求出  $E_1, I_1$  用  $E_3, I_3$  来表示的关系式, 将(4)代入(3)得到:

$$E_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})E_3 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})I_3,$$

$$I_1 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})E_3 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})I_3,$$

即为所求的结果. 也就是说这二个网络与具有阻抗矩陣  $C$  的网络等效. 这里

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

把矩陣  $C$  叫做矩陣  $A$  乘以  $B$  的积.



这里

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31},$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32},$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31},$$

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}.$$

簡写为:  $c_{ij} = \sum_{k=1}^3 a_{ik}b_{kj}$ . ( $i=1, 2; j=1, 2$ )

与此对应, 我們有下列矩陣乘法的定义.

設矩陣  $A$  的列数等于矩陣  $B$  的行数

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}.$$

**定义 3** 設有矩陣

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{pmatrix},$$

这里  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ , 則  $C$  称为  $A$  乘  $B$  之积, 記作  $AB$ .

若  $E$  为  $m$  阶单位矩陣, 則  $EA = A$ ; 若  $E$  为  $n$  阶单位矩陣, 則  $AE = A$ .

**例 設**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

求  $AB$  和  $BA$ .