新培优奥赛系列

根据义务教育课程标准实验教材编写

黄冈特高级教师联合编写

知识方法点击

精典考题速递

初中新奥赛时代同步辅导

训练巩固提高

为学生升入重点中学服务，为各级各类学科奥赛服务

数学

主编　吕伦兵

九年级

（人）

湖北科学技术出版社

初中

新奥赛时代

同步辅导

新培优·新理念·新奥赛

ISBN 978-7-5352-4340-9

9 787535 243409 >

定价：27.70元

知识方法点击

精典考题速递

初中 新奥赛时代 同步辅导

训练巩固提高

数学

主　编：占春生　吕伦兵　李金明

编　者：陈秋芬　吴菊元　占春生　吕伦兵　胡胜银
江　华　缪玉华　陈莲蓬　胡清华　胡开明
尹新生　张向阳　余启平　郭金喜　胡利生
王泽文　徐林广　汪　芳　江志平　陈昌盛
黄　海　张玉芳　刘云松　陈风娥　丁仔强
田　琪　宋典虎　吕发明　叶利军

九年级（人）

湖北科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

新奥赛时代．九年级数学/吕伦兵主编．—武汉：湖北科学技术出版社，2009．6

ISBN 978-7-5352-4340-9

Ⅰ．新…　Ⅱ．吕…　Ⅲ．数学课—初中—教学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 082554 号

责任编辑：黄主梅　　　封面设计：戴　旻

出版发行：湖北科学技术出版社　　　电话：027－87679468

地　　址：武汉市雄楚大街 268 号　　　邮编：430070

（湖北出版文化城 B 座 12－13 层）

网　　址：http://www.hbstp.com.cn

印　　刷：汉川市三星印务有限责任公司　　　邮编：431600

889×1194　1/16　　　15.50 印张　300 千字

2009 年 6 月第 1 版　　　2009 年 6 月第 1 次印刷

定价：27.70 元

前言

QIAN YAN

为了选拔和发现人才，每年全国各地都要举行各级各类的升学考试和奥林匹克竞赛活动。为了给一线的辅导教师和学生提供一套优质的培优辅导书，我们特邀请了一批长期战斗在教学前线的优秀奥赛辅导教师，经过精心的构思，认真的锤炼，历时一年而完成此书。

本丛书在力求与教材同步的前提下，把教材中需要拓宽和引伸的竞赛知识点以及奥赛的基础知识，以“讲”为单位呈现给师生。达到好教、易学的目的。用好此书，学生不仅能在升学考试中取得优异的成绩，而且在奥林匹克竞赛中也能一展身手。

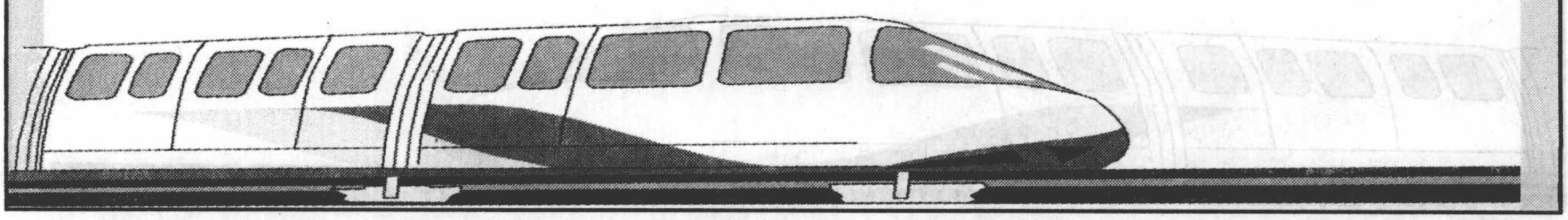
本丛书的每一讲都设置有**“赛点解析、专题精讲、实战演练”**三个环节，加深学生对培优知识的掌握和灵活运用。其中**“赛点解析”**以精炼的语言把该讲所涉及的主要知识点和解题方法作一个概括总结。**“专题精讲”**，每讲视其内容的多少设置了2～3道例题，每个例题尽量说明出处，同时还有分析、解、反思说明三个环节。**分析**侧重对具体题目的引导；**解**就是把题目中的解题过程写出来（视其对题目的分析情况，解有详有略）；反思说明主要是对该题所涉及的解题方法和技巧加以总结，也可以指出该题的易错点和易混淆点，还可以对该题加以拓展、引伸。**“实战演练”**这一环节，主要是配备一定数量的习题，供学生训练使用。每一讲训练题目的总数力求控制在20道以内，分为A、B两组，A组为能力训练，主要以中考题为主，B组为奥赛热身，主要来源于近几年全国各地的奥赛题。

本丛书在每一章（或若干讲）后都附有一套单元过关检测题，其目的是检测学生阶段性训练效果。丛书最后还附有几套实战模拟训练题，主要是培养学生的实战应考能力。

亲爱的读者，“追求卓越，不断创新”是我们努力的方向，希望本套丛书能帮你走向成功。

编者

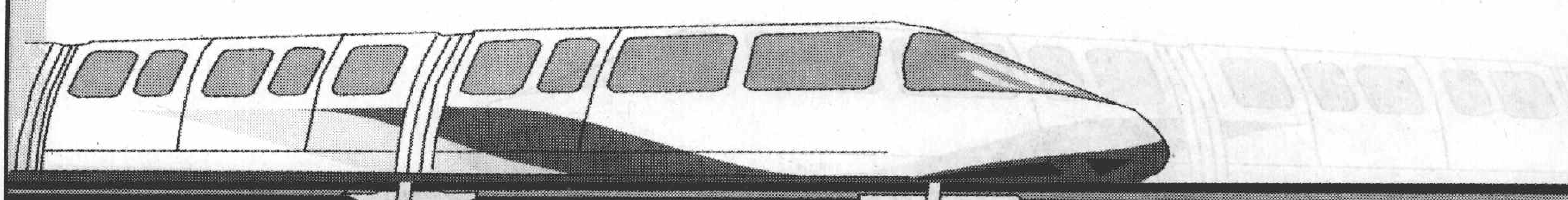
2009.6



SHU

目录

XUE



第一讲 二次根式

赛点解析

1. 二次根式的性质

(1) $\sqrt{a}\geqslant 0(a\geqslant 0)$（二次根式的"双非负"） (2) $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$；

(3) $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a>0)\\0(a=0)\\-a(a<0)\end{cases}$ (4) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$；

(5) $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0,b>0)$； (6) $\sqrt{abcd\cdots k}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}\cdot\sqrt{d}\cdot\cdots\cdot\sqrt{k}$（$a$、$b$、$c$、$d$、$\cdots k$ 均非负）.

2. 二次根式的运算

(1) $a\sqrt{c}\pm b\sqrt{c}=(a\pm b)\sqrt{c}(c\geqslant 0)$； (2) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$；

(3) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geqslant 0,b>0)$； (4) $(\sqrt{a})^n=\sqrt{a^n}(a\geqslant 0)$.

3. 有理化因式及分子、分母有理化

两个含有二次根式的代数式相乘，能化去根号，则称这两个代数式互为有理化因式；把分母中的根号化去叫分母有理化，把分子中的根号化去叫分子有理化.

4. 二次根式的化简求值常用到最简根式、同类根式、分子、分母有理化等知识点，还常用到分解、裂项相消、换元、二次根式的非负性、"双非负"性等方法技巧.

专题精讲

例1 已知实数 a 满足 $|2009-a|+\sqrt{a-2010}=a$，那么 $a-2009^2$ 的值是（ ）

A. 2008 B. 2009 C. 2010 D. 4019

分析 由 $a-2010$ 作被开方数可知 $a\geqslant 2010$，从而可化简 $|2009-a|$，进而得到 $a-2009^2$ 的值.

解 由题意可知：$a-2010\geqslant 0$，则 $a\geqslant 2010$，原等式可简化为 $a-2009+\sqrt{a-2010}=a$，$\therefore\sqrt{a-2010}=2009$，$\therefore a-2010=2009^2$，$a-2009^2=2010$. 故选 C.

反思说明 "二次根号下被开方数非负"是解本题的关键点，求出 $a-2009^2$ 这一整体的值而不单独求 a 的值是解本题的技巧. 有时还可以由"被开方数非负性"列混合组求解.

例如：$\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}+a=3$ 中，$x-2\geqslant 0$ 且 $2-x\geqslant 0$，则可知 $x=2$，$a=3$.

例2 （2001 年全国初中数学联赛）a、b、c 为有理数，且等式 $a+\sqrt{2}b+\sqrt{3}c=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ 成立，则 $2a+999b+1001c$ 的值是（ ）

A. 1999 B. 2000 C. 2001 D. 不能确定

分析 先化简 $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{2+2\sqrt{6}+3}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+2\cdot\sqrt{2}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$. 题目简化成 $a+\sqrt{2}b+\sqrt{3}c=\sqrt{2}+\sqrt{3}$. 而 a、b、c 均为有理数，除 0 以外的有理数与无理数的加、减、乘、除运算均为无理数，由此可分析出 a、b、c 的值.

解 $\because a+\sqrt{2}b+\sqrt{3}c=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，而 a、b、c 均为有理数，

$\therefore a=0, b=1, c=1$，则 $2a+999b+1001c=2\times0+999\times1+1001\times1=2000$. 故选 B.

反思说明　不要忽视"a、b、c 为有理数"这一重要条件，因为除 0 以外的有理数同无理数的加减乘除运算结果均为无理数，有理数≠无理数，这些都是题目隐含的条件.

例 3　(2007 年黄冈市三科联赛)对于正整数 n，有 $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，若某个正整数 k 满足 $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{1}{2}$，求 k 的值.

分析　由提供的公式可将每个根式列成两个根式的差的形式，从而达到互相抵消，进行简化，转化成关于 k 的简单方程，可求 k 的值.

解　由 $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 可将原等式转化成：

$\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{1}{2}$，即 $1-\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{1}{2}$，$\sqrt{k+1}=2$，$k+1=4$，$k=3$. 经检查：$k=3$ 符合方程及题意. $\therefore k=3$.

反思说明　题目里面带有省略号的计算，应仔细分析题目的特征，寻找一般规律.

简化式子，$n\geqslant0$ 时，$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=$

$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

例 4　("希望杯"全国邀请赛)$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{3-\sqrt{6}-\sqrt{10}+\sqrt{15}}$

分析　如果用分母有理化的方法化简，需要 3 次有理化，计算非常复杂，因此考虑能不能用简单方法化简？分母中每个数都含 $\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{5}$，所以将分母用"因式分解"的方法"提公因式"与分子约分，达到化简的目的.

解　原式 $=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{3+\sqrt{15}-(\sqrt{6}+\sqrt{10})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{5})-\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

反思说明　①对于分母只含一个根号的式子，如 $\frac{2}{\sqrt{a}}$，$\frac{1}{2-\sqrt{a}}$ 等可直接用分母有理化化简；②对于分母含有两个根号的式子：如：$\frac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$，$\frac{1}{a\sqrt{b}\pm c\sqrt{d}}$ 等也可直接用有理化因式 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$、$a\sqrt{b}\pm c\sqrt{d}$ 化简；③对于分母中含有三个根号的式子：如：$\frac{1}{e\sqrt{a}+f\sqrt{b}+g\sqrt{c}}$，可分两次分母有理化：先用有理化因式 $e\sqrt{a}+f\sqrt{b}-g\sqrt{c}$ 简化成分母只含有一个根号的，再用①的方法化简；④对于分母含有三个或三个以上的根号的式子，应另辟蹊径，避开繁杂的有理化化简，常用的方法有：倒数法、换元法、配方法、因式分解法.

例 5　(2006 年全国初中数学竞赛)已知 $m=1+\sqrt{2}$，$n=1-\sqrt{2}$，且 $(7m^2-14m+a)(3n^2-6n-7)=8$，则 a 的值等于(　　)

A. -5　　B. 5　　C. -9　　D. 9

分析　如果将 m、n 的值代入等式，将原等式转化成 a 的方程，可求 a 的值，但计算比较复杂，如果将已知条件适当变形，整体代入计算就非常简便，解：由 $m=1+\sqrt{2}$ 得 $m-1=\sqrt{2}$，$(m-1)^2=2$，于是 $m^2-2m+1=2$，即 $m^2-2m=1$，用相同的方法将 $n=1-\sqrt{2}$ 变形整理，得 $n^2-2n=1$.

解　$\therefore[7(m^2-2m)+a][3(n^2-2n)-7]=8$，即 $(7+a)(3-7)=8$，$a=-9$. 故选 C.

反思说明　整体代入的思想方法是解决这类较复杂求值问题常用的方法．二次根式的求值问题，经常要转化已知条件．如例题中将 $m=1+\sqrt{2}$ 转化成 $m^2-2m=1$.

例 6　（2007 年全国初中数学竞赛）设 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$，a 是 x 的小数部分，b 是 $-x$ 的小数部分，则 $a^3+b^3+3ab=$________.

分析　一个无理数的小数部分是指这个无理数除整数部分外的部分，而无理数的整数部分是指不超过该无理数的最大的整数．如：$\sqrt{2}$ 的整数部分是 1，小数部分是 $\sqrt{2}-1$；$-\sqrt{2}$ 的整数部分是 -2，小数部分是 $-\sqrt{2}-(-2)=2-\sqrt{2}$．明确了无理数的整数部分、小数部分，就容易找到 a、b，可发现 $a+b=1$，利用 $a+b=1$ 整体求值．

解　$\because x=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$，$\therefore a=\sqrt{2}+1-2=\sqrt{2}-1$．$-x=-(\sqrt{2}+1)$，$\therefore b=-(\sqrt{2}+1)-(-3)=2-\sqrt{2}$.

则 $a+b=1$．$\therefore a^3+b^3+3ab=(a+b)^3-3ab(a+b)+3ab=1-3ab+3ab=1$.

反思说明　求含有 $\sqrt{a}$（$a>0$，有 a 为非完全平方数）的无理数的整数部分和小数部分，常常需要对 $\sqrt{a}$ 进行估算．确定它在哪两个连续正整数之间．如：$\sqrt{5}$，$2<\sqrt{5}<3$，则 $\sqrt{5}$ 的整数部分为 2，小数部分为 $\sqrt{5}-2$，而 $-\sqrt{5}$ 呢？$-3<-\sqrt{5}<-2$，则 $-\sqrt{5}$ 的整数部分为 -3，小数部分为 $-\sqrt{5}-(-3)=3-\sqrt{5}$．特别提醒：找无理数的小数部分不能用计算器求，那样求得的不是该无理数准确的小数部分．

实战演练

A 能力训练

1.（2008 年潍坊中考）若 $(a+\sqrt{2})^2$ 与 $|b+1|$ 互为相反数，则 $\dfrac{1}{b-a}$ 的值为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{2}+1$　　C. $\sqrt{2}-1$　　D. $1-\sqrt{2}$

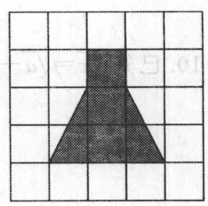
2.（2008 年广州中考）如图，每个小正方形的边长为 1，把阴影部分剪下来，用剪下来的阴影部分拼成一个正方形，那么新正方形的边长是（　　）

A. $\sqrt{3}$

B. 2

C. $\sqrt{5}$

D. $\sqrt{6}$

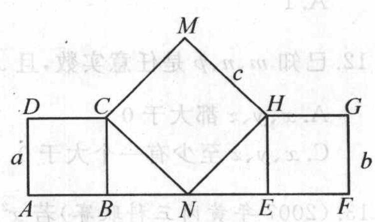


3.（2008 年苏州中考）若 $x^2-x-2=0$，则 $\dfrac{x^2-x+2\sqrt{3}}{(x^2-x)^2-1+\sqrt{3}}$ 的值等于（　　）

A. $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}$ 或 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

4．已知 a、b 是一个等腰三角形的两边之长，且满足等式 $2\sqrt{3a-6}+3\sqrt{2-a}=b-4$．则此等腰三角形的周长和面积分别为________.

5.（2008 年浙江台州中考）如图，四边形 $ABCD$，$EFGH$，$NHMC$ 都是正方形，边长分别为 a、b、c，A、B、N、E、F 五点在同一直线上，则 $c=$________．（用含有 a、b 的代数式表示）



6．叶智炜在做数学题时发现 $\sqrt{1-\dfrac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$，$\sqrt{2-\dfrac{2}{5}}=2\sqrt{\dfrac{2}{5}}$，$\sqrt{3-\dfrac{3}{10}}=3\sqrt{\dfrac{3}{10}}$，$\sqrt{4-\dfrac{4}{17}}=4\sqrt{\dfrac{4}{17}}$，…，按上述规律，第五个等式应是________，由此猜想第 n 个等式是________.

7. 已知 $9+\sqrt{13}$ 与 $9-\sqrt{13}$ 的小数部分分别是 a,b，求 $ab-3a+4b+8$ 的值.

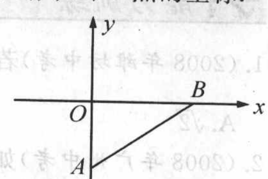
8. 先阅读下面的材料，再解答问题.

$\because(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$，$\therefore a-b=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$，特别地，$(\sqrt{12}+\sqrt{11})(\sqrt{12}-\sqrt{11})=1$，$\therefore \frac{1}{\sqrt{12}-\sqrt{11}}=\sqrt{12}+\sqrt{11}$. 当然也可以利用 $12-11=1$ 得 $1=12-11$. 故 $\frac{1}{\sqrt{12}-\sqrt{11}}=\frac{12-11}{\sqrt{12}-\sqrt{11}}=\frac{(\sqrt{12})^2-(\sqrt{11})^2}{\sqrt{12}-\sqrt{11}}=\frac{(\sqrt{12}+\sqrt{11})(\sqrt{12}-\sqrt{11})}{\sqrt{12}-\sqrt{11}}=\sqrt{12}+\sqrt{11}$，这种变形也是将分母有理化，利用上述思路解答下列问题.

(1) 计算：$\frac{1}{3-\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+2}$

(2) 计算：$\frac{5}{4-\sqrt{11}}-\frac{4}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}-\frac{2}{3+\sqrt{7}}$

9. 如图，点 A、B 的坐标分别为 $(0,-3)$ 和 $(6,0)$，点 P 在 x 轴上，$\triangle PAB$ 可以是等腰三角形吗？请求出 P 点的坐标.



10. 已知 $\sqrt{x}=\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}(0<a<1)$，求代数式 $\frac{x^2+x-6}{x}\div\frac{x+3}{x^2-2x}-\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{x-2-\sqrt{x^2-4x}}$ 的值.

B 奥赛热身

11. (2008年北京市中学生数学竞赛) 化简 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ 的结果是(　　)

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 0

12. 已知 m、n、p 是任意实数，且 $x=n^2-2p+\frac{\sqrt{10}}{3}$，$y=p^2-2m+\frac{\sqrt{10}}{6}$，$z=m^2-2n+\frac{\sqrt{10}}{2}$，则(　　)

A. x、y、z 都大于 0

B. x、y、z 都小于 0

C. x、y、z 至少有一个大于 0

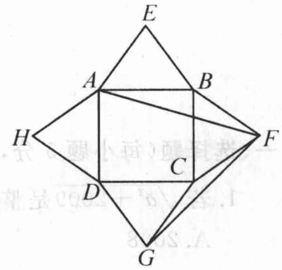
D. 以上都有可能

13. (2007年黄冈三科联赛) 若 $x^2-\frac{\sqrt{19}}{2}x+1=0$，则 $x^4+\frac{1}{x^4}$ 等于(　　)

A. $\frac{11}{4}$　　B. $\frac{121}{16}$　　C. $\frac{89}{16}$　　D. $\frac{27}{4}$

14.（第十届"希望杯"竞赛）如果 $x=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}}$，那么 $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=$______.

15.（2002 年"五羊杯"）如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，从各边往外作等边三角形 ABE、BCF、CDG、DAH，则四边形 $AFGD$ 的周长为______.



16. 设 $2007x^3=2008y^3=2009z^3$，$xyz>0$，且 $\sqrt[3]{2007x^2+2008y^2+2009z^2}=\sqrt[3]{2007}+\sqrt[3]{2008}+\sqrt[3]{2009}$，则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=$______.

17.（2006 年全国初中数学联赛）使 $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{(8-x)^2+16}$ 取最小值的实数 x 的值为______.

18. 求满足等式 $x\sqrt{y}+\sqrt{x}y-\sqrt{2009x}-\sqrt{2009y}+\sqrt{2009xy}=2009$ 的正整数 x、y 的值.

19. 计算：$\frac{1}{3+\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}+\frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{101\sqrt{99}+99\sqrt{101}}$

20.（2006 年全国初中数学竞赛）已知 $x=\frac{b}{a}$，a、b 为互质的正整数，且 $a\leqslant 8$，$\sqrt{2}-1<x<\sqrt{3}-1$.

（1）试写出一个满足条件的 x；

（2）求出所有满足条件的 x.

单元过关检测题

一、选择题(每小题 5 分,共 30 分)

1. 若 $\sqrt{a^2+2009}$ 是整数,则所有满足条件的正整数 a 的和为(　　)

A. 2008　B. 1004　C. 2009　D. 1148

2. 设 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$,$b=2+\sqrt{6}-\sqrt{10}$,则 $\dfrac{a}{b}$ 的值为(　　)

A. $\dfrac{1}{2}$　B. $\dfrac{1}{4}$　C. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$　D. $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{10}}$

3. (2007 年山东初中数学预赛)已知 $\sqrt{25-x^2}-\sqrt{15-x^2}=2$,则 $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}$ 的值为(　　)

A. 3　B. 4　C. 5　D. 6

4. (2007 年武汉市数学竞赛)已知实数 a 满足 $|2006-a|+\sqrt{a-2007}=a$,那么 $a-2006^2$ 的值是(　　)

A. 2005　B. 2006　C. 2007　D. 2008

5. 设 $M=\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}-2\right)\times(2009^2-2009\times2008+2008^2)$,则下列结论中正确的是(　　)

A. $M<0$　B. $M>1$

C. $M=0$　D. $0<M<2009\times2008$

6. (2007 年华师一附预录)已知 $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[n]{2007}-\dfrac{1}{\sqrt[n]{2007}}\right)$,$n$ 是大于 1 的自然数,那么 $(x-\sqrt{1+x^2})^n$ 的值是(　　)

A. $\dfrac{1}{2007}$　B. $-\dfrac{1}{2007}$　C. $(-1)^n2007$　D. $(-1)^n\dfrac{1}{2007}$

二、填空题(每小题 5 分,共 30 分)

7. 已知 $A=n-\dfrac{1}{2}$,$B=3\sqrt{n}-2$(n 为正整数),当 $n\leqslant5$ 时,有 $A<B$;请用计算器计算当 $n\geqslant6$ 时,A、B 间的大小关系为________.

8. (2007 年武汉 CASIO 杯选拔赛)设 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ 的整数部分为 x,小数部分为 y,则 $x^2+\dfrac{1}{2}x^2y+y^2=$________.

9. (第 15 届"希望杯"邀请赛)已知 $x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$,$y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$,则 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=$________.

10. 已知实数 a、b 满足 $3\sqrt{a}+5|b|=7$,$S=2\sqrt{a}-3|b|$,则 S 的取值范围是________.

11. (2002 年江苏初中数学竞赛)已知 $(x+\sqrt{x^2+2002})(y+\sqrt{y^2+2002})=2002$,则 $x^2-3xy-4y^2-6x-6y+58$ $=$________.

12. 已知正数 a、b,有下列命题:

(1)若 $a=1$,$b=1$,则 $\sqrt{ab}\leqslant1$;

(2)若 $a=\dfrac{1}{2}$,$b=\dfrac{5}{2}$,则 $\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{3}{2}$;

(3)若 $a=2$,$b=3$,则 $\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{5}{2}$;

(4)若 $a=1$,$b=5$,则 $\sqrt{ab}\leqslant3$.

根据以上几个命题所提供的信息,请猜想:若 $a=6$,$b=7$,则 $\sqrt{ab}\leqslant$________.

三、解答题(每题 15 分,共 60 分)

13. 计算

(1) $(1+\sqrt{3})^{2010}-2(1+\sqrt{3})^{2009}-2(1+\sqrt{3})^{2008}+2009$

(2) $\dfrac{1+2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}+\dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{7}+3}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{7}+3)}$

14. 正数 m,n 满足 $m+4\sqrt{mn}-2\sqrt{m}-4\sqrt{n}+4n=3$,求 $\dfrac{\sqrt{m}+2\sqrt{n}-8}{\sqrt{m}+2\sqrt{n}+2002}$ 的值.

15. (2007 年华师一附招生)学校食堂改建一个开水房,计划用电炉或煤烧水,但用煤烧水时也要用电鼓风及时排气,用煤烧开水时每吨开水的费用为 S 元,用电炉烧开水时每吨开水的费用为 P 元. 且 $S=5x+0.2y+5$,$P=10.2y+20\sqrt{76-y}$,其中 x 为每吨煤的价格,y 为每百度电的价格. 如果烧煤时费用不超过用电炉的费用,则用煤烧水,否则就用电炉烧水.

(1)如果每吨煤的价格为 135 元,当两种方法烧水费用相同时,每百度电的价格应为多少元?

(2)如果每百度电价不低于 60 元,为了确保用煤烧水,则每吨煤的最高价是多少?

16. 已知 a、b 为实数,且满足 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$,求 a^2+b^2 的值.

第二讲 一元二次方程的根

赛点解析

1. 形如 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的整式方程称为一元二次方程，一元二次方程的解法有：①直接开平方法；②配方法；③公式法；④因式分解法. 隐含条件：$a\neq0$.

若 $a=0,b\neq0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 为一元一次方程.

2. 配方法：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 可用配方法变形为：$a(x^2+\frac{b}{a}x)=-c$，$a(x+\frac{b}{2a})^2-a\cdot\frac{b^2}{4a^2}=-c$，$a(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$，$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. 配方法解得一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，配方法是一种重要的数学思想方法. $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 就是求根公式.

3. 两个一元二次方程有公共根的问题：探求两个一元二次方程有公共根问题常用的思路：①求根后对比确定出公共根；②设公共根代入方程后再对比.

专题精讲

例 1 解方程 $x^2-(1+2\sqrt{3})x+3+\sqrt{3}=0$

分析 一元二次方程的系数有无理数的，通常应该用求根公式求根，观察本题中各系数的特征，可尝试使用因式分解法，本题既可用"十字交叉"法因式分解求根，也可用"分组法"因式分解求根.

解 ①用求根公式法：$\Delta=(1+2\sqrt{3})^2-4\times1\times(3+\sqrt{3})=1$，

$\therefore x=\frac{1+2\sqrt{3}\pm\sqrt{1}}{2}$，$x_1=\sqrt{3}$，$x_2=1+\sqrt{3}$.

②用"十字交叉"法分解因式：

$$\begin{array}{ccc}1 & & -\sqrt{3}\\ & \times & \\ 1 & & -(1+\sqrt{3})\end{array}$$

即：原方程可整理为 $(x-\sqrt{3})[x-(1+\sqrt{3})]=0$，

$\therefore x-\sqrt{3}=0$ 或 $x-(1+\sqrt{3})=0$

$x_1=\sqrt{3}$，$x_2=1+\sqrt{3}$.

③用分组分解法：$\because x^2-(1+2\sqrt{3})x+3+\sqrt{3}=0$

$\therefore (x^2-2\sqrt{3}x+3)-(x-\sqrt{3})=0$

即 $(x-\sqrt{3})^2-(x-\sqrt{3})=0$，$(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{3}-1)=0$

$\therefore x_1=\sqrt{3}$，$x_2=1+\sqrt{3}$.

反思说明 求根公式是求一元二次方程根的"万能钥匙"，但有时不够简便. 因式分解法求一元二次方程根简便但不易观察，不易分解，求一元二次方程根时，通常应先尝试用因式分解法，再考虑用求根公式求解.

例2 解关于 x 的方程 $(t^2-1)x+(tx^2-t)=t^2(x^2-x+1)$.

分析 对字母系数进行讨论，讨论这个方程是一元二次的、一元一次的各种可能情况，二次项系数、一次项系数含有字母的，常常先将方程整理成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式.

解 原方程整理为：$t(t-1)x^2-(2t^2-1)x+t(t+1)=0$

①当 $t(t-1)=0$，即 $t=0$ 或 $t=1$ 时，原方程为一元一次方程.

由 $t=0$ 得 $x=0$；由 $t=1$ 得 $x=2$；

②当 $t(t-1)\neq0$，即 $t\neq1$，$t\neq0$ 时，原方程为一元二次方程，运用因式分解法，得 $[tx-(t+1)][(t-1)x-t]=0$

$\therefore tx=t+1$ 或 $(t-1)x=t$，

即 $x_1=\dfrac{t+1}{t}$，$x_2=\dfrac{t}{t-1}$.

反思说明 本题容易忽视 $t(t-1)=0$ 这一条件. 含有字母系的整式方程，一定要注意字母系数等于 0 或不等于 0 的情况.

例3 若方程 $x^2+ax+b=0$ 和 $x^2+bx+a=0$ 有且只有一个公共根，求 $(a+b)^{2009}$ 的值.

分析 a、b 的大小关系不确定，须分 $a=b$ 和 $a\neq b$ 两种情况讨论，再比较两方程可求 a、b 的值或 $a+b$ 的值，进而求 $(a+b)^{2009}$ 的值.

解 设两方程的公共根为 x_0，则

$x_0^2+ax_0+b=0$ ①

$x_0^2+bx_0+a=0$ ②

①－②得 $(a-b)x_0=a-b$ ③

若 $a=b$，则两方程相同，要使两方程有且只有一个公共根，则必有

$\Delta=a^2-4b=0$，故 $a=b=0$ 或 $a=b=4$，此时 $(a+b)^{2009}=0$ 或 8^{2009}.

若 $a\neq b$，则由③得 $x_0=1$，故 $a+b+1=0$，即 $a+b=-1$，此时 $(a+b)^{2009}=-1$.

综上所述：$(a+b)^{2009}=0$ 或 8^{2009} 或 -1.

反思说明 解两方程有公共根的问题通常设公共根. 得到以公共根为元的两个方程，再作差求解. 方程两边同时除以一个整式(如：题目中的 $(a-b)$)时一定要注意这个整式是否为 0. 特别提醒：设出的公共根只是作为过渡的桥梁.

例4 已知 α 是方程 $x^2+x-\dfrac{1}{4}=0$ 的根，求 $\dfrac{\alpha^3-1}{\alpha^5+\alpha^4-\alpha^3-\alpha^2}$ 的值.

分析 如果先求方程 $x^2+x-\dfrac{1}{4}=0$ 的根，再将根代入求值，计算繁杂，不可取. 若将要求的代数式化简，再整体代入求值，将非常简单.

解 $\because \alpha^3-1=(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)$；

$\alpha^5+\alpha^4-\alpha^3-\alpha^2=\alpha^2(\alpha-1)(\alpha+1)^2$，

$\therefore \dfrac{\alpha^3-1}{\alpha^5+\alpha^4-\alpha^3-\alpha^2}=\dfrac{(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)}{\alpha^2(\alpha-1)(\alpha+1)^2}=\dfrac{\alpha^2+\alpha+1}{[\alpha(\alpha+1)]^2}=\dfrac{\alpha^2+\alpha+1}{(\alpha^2+\alpha)^2}$.

又 $\because \alpha$ 是方程 $x^2+x-\dfrac{1}{4}=0$ 的根，

$\therefore \alpha^2+\alpha-\dfrac{1}{4}=0$ 得 $\alpha^2+\alpha=\dfrac{1}{4}$.

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{\frac{1}{4}+1}{(\frac{1}{4})^2}=\dfrac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{16}}=20$.

反思说明 “α 是方程 $x^2+x-\frac{1}{4}=0$ 的根”这一条件可变形为：①$\alpha^2+\alpha-\frac{1}{4}=0$；②$\alpha^2+\alpha=\frac{1}{4}$；③$\alpha^2-\frac{1}{4}=-\alpha$；④$\alpha^2=\frac{1}{4}-\alpha$ 等，也可直接求出 $x^2+x-\frac{1}{4}=0$ 的根.

例 5 解方程 $x^2-|x-1|-1=0$.

分析 解含有绝对值的方程，首先应化掉绝对值符号.

解 当 $x-1\geqslant 0$ 时，原方程可化为 $x^2-(x-1)-1=0$，$x^2-x=0$.

$\therefore x_1=0$(不合题意，舍)，$x_2=1$.

当 $x-1<0$ 时，原方程可化为 $x^2+x-2=0$，$(x+2)(x-1)=0$，$x_1=-2$，$x_2=1$(舍去)

综上所述原方程根为 $x=1$ 或 $x=-2$.

反思说明 分类讨论后，要注意检验根是否适合 x 的取值范围，不满足的应舍去.

例 6 若实数 a、b 满足 $(a^2+b^2)^2-(a^2+b^2)=6$，求 a^2+b^2 的值.

分析 由已知的关于 a、b 的一个方程求不出 a、b 的值，因此，把已知等式看作是以 (a^2+b^2) 为元的一元二次方程，再求根 (a^2+b^2).

解 $\because (a^2+b^2)^2-(a^2+b^2)=6$，$\therefore (a^2+b^2)^2-(a^2+b^2)-6=0$，

即 $[(a^2+b^2)-3][(a^2+b^2)+2]=0$

$\therefore a^2+b^2=3$，$a^2+b^2=-2$(舍)，即 $a^2+b^2=3$.

反思说明 本题中 $a^2+b^2=-2$ 应该舍去，看似一个高次方程，但用换元法可将 (a^2+b^2) 看作一个元(整体).

实战演练

A 能力训练

1.(2008 年成都中考)已知 $x=1$ 是关于 x 的一元二次方程 $2x^2+kx-1=0$ 的一个根，则实数 k 的值是________.

2.(2008 年丽水中考)一元二次方程 $(x+6)^2=5$ 可转化为两个一次方程，其中一个一次方程是 $x+6=\sqrt{5}$，则另一个一次方程是________.

3.(2007 年梅州中考)将 4 个数 a、b、c、d 排成 2 行、2 列，两边各加上一条竖直线记成 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$，定义 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$，上述记号就叫做 2 阶行列式，若 $\begin{vmatrix} x+1 & x-1 \\ 1-x & x+1 \end{vmatrix}=6$，则 $x=$________.

4.(2007 年潍坊中考)关于 x 的一元二次方程 $x^2-5x+P^2-2P+5=0$ 的一个根为 1，则实数 P 的值是(　　)

A. 4　　B. 0 或 2　　C. 1　　D. -1

5.(2008 年滨州中考)若关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2+5x+m^2-3m+2=0$ 有一个根为 0，则 m 的值等于(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 1 或者 2　　D. 0

6.(2008 年烟台中考)已知方程 $x^2+bx+a=0$ 有一个根是 $-a(a\neq 0)$，则下列代数式的值恒为常数的是(　　)

A. ab　　B. $\frac{a}{b}$　　C. $a+b$　　D. $a-b$

7.(2008 年浙江温州中考)我们已经学习了一元二次方程的四种解法：因式分解法，开平方法，配方法和公式法，请从以下一元二次方程中任选一个，并选择你认为适当的方法解这个方程.

①$x^2-3x+1=0$；②$(x-1)^2=3$；③$x^2-3x=0$；④$x^2-2x=4$

8.(2008 年乐山中考)解方程：$x^2-\frac{12}{x^2-2x}=2x-1$.

9.方程 $2009^2x^2-2010\times2008x-1=0$ 的较大根为 s，方程 $2008x^2-2009x+1=0$ 的较小根为 t，求 $s-t$ 的值.

10.已知 $a>2,b>2$，试判断关于 x 的方程 $x^2-(a+b)x+ab=0$ 与 $x^2-abx+(a+b)=0$ 有没有公共根，并说明理由.

B 奥赛热身

11.(2006 年全国初中数学联赛)关于 x 的方程 $\left|\frac{x^2}{x-1}\right|=a$ 仅有两个不同的实根，则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $a>0$　　B. $a\geqslant4$　　C. $2<a<4$　　D. $0<a<4$

12.(2007 年全国初中数学竞赛)已知三个关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0,bx^2+cx+a=0,cx^2+ax+b=0$，恰有一个公共实数根，则 $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}$ 的值为(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

13.(2005 年"鲁中杯"竞赛)方程 $x|x|-3|x|+2=0$ 的实根个数为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

14.(山东竞赛)已知 a、b 是方程 $x^2-4x+m=0$ 的两个根，b、c 是方程 $x^2-8x+5m=0$ 的两个根，则 $m=$________.

15.(2001 年重庆竞赛)若 $a^2-3a+1=0$，则 $3a^3-8a^2+a+\frac{3}{a^2+1}=$________.

16.已知关于 x 的两个方程 $x^2+2bx+a=0$ 与 $x^2+ax+2b=0$ 有且仅有一个公共根，则 a^2+b^2 的最小值是________.