行列式論與矩陣論

張遠達編

一九五五年七月廿日

生活·讀書·新知三聯書店出版

行列式論與矩陣論

張遠達編

生活·讀書·新知三聯書店

生活·讀書·新知三聯書店出版

北京東總布胡同10號

*

1952年6月在北京印造初版

31″×43″1/25·248定價頁·總號993·分號Q543

0001—2000册·定價12,400元

*

·總經售·

三聯·中華·商務·開明·聯營聯合組織

中國圖書發行公司

序

行列式與矩陣的理論不僅僅對於研究數學是一件很重要的東西，而且對於別門科學的研討也是一個不可缺少的工具。關於這門課程，想找一部有系統叙述的書籍，比較困難。譬如在我國行銷已久，且為各大學採用作為代數學教材的 Bocher, Introduction to Higher Algebra 一書，雖然叙述清暢，條理簡明，初學也易於了解，但是關於方陣的重要部分如標準形(canonical form)及對角形(diagonal form)均未提到，實在是一件很可惋惜的事情。

本書編纂的目的，是想拿代數學的觀點，先從行列式的來源解聯立線性方程式談起，逐漸地談到行列式的基本性質，再利用這些性質又回到一般聯立線性方程式的研究。然後叙述矩陣之意義而研究特殊方陣如對稱，斜對稱，Hermitian, skew-Hermitian, 直交以及 U-交方陣的基本性質；更進一步地研究一般矩陣的單因子，以及方陣之特徵多項式(characteristic polynomial)與特徵根(characteristic root)等等問題。最後，研究方陣的標準形及對角形。總而言之，我的意思是想將行列式與矩陣這個問題站在代數學的觀點來一個有系統的解說。又全書中行列式及矩陣的元素都是有理數，或實數，或複數，不是指一般體(field)內的元素，用意是想使初學的人容易了解。

至於分散在各章中的習題，採取的方法是想試驗讀者已否領會本文爲主旨，當然其中也包含一些例題及補充定理作爲後面有關聯部分而用的。解答方面，大致沒有什麼困難；凡是比較艱澀一點的，都略略給了些提示。

這篇稿子是我在武漢大學試敎了兩年以後寫的，寫成了以後又敎了兩年，當然其中常常有修正，删去和補充的地方。稿子固然是寫成了，但囿於個人的學識疏淺，力不逮意的地方當然很多，希望大家多多指正我的謬誤，多多給我嚴格的批評。

1950年5月28日，　張遠達於珞珈山

目　　錄

第一章 行 列 式

§1. 行列式的來源

凡已讀過初等代數學的皆略知行列式的意義及其一般基本性質. 然爲何如斯下行列式之定義及其歷史之來源非初等代數學所能詳言. 實際,行列式起源於二元及三元線性聯立方程式之解法. 編者欲求系統完整起見,先從二元三元線性聯立方程式着手循序以進而下 n 次行列式之定義並推演其一般性質.

茲欲解二個二元 x 及 y 之線性聯立方程式

$$(1)\qquad \begin{cases} a_1x+b_1y=k_1\ , \\ a_2x+b_2y=k_2\ , \end{cases}$$

則以第一個及第二個方程式分別乘以 b_2 及 $-b_1$,而後加其結果乃得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=k_1b_2-k_2b_1.$$

同理若以一二兩方程式分別乘以 $-a_2$ 及 a_1 而加之,則得

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1k_2-a_2k_1.$$

若 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, 則

$$(2)\qquad \begin{cases} x=\dfrac{k_1b_2-k_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}\ , \\[2ex] y=\dfrac{a_1k_2-a_2k_1}{a_1b_2-a_2b_1}\ . \end{cases}$$

反之，如斯之 x 及 y 之值確能滿足(1)式．故當 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 時，(1)之解確為(2)．至此，有一問題生焉，即(2)式雖可用為一般二元線性聯立方程式之解之公式，然(2)式頗不易記憶．故為方便記憶起見，不得不將(2)式改書另一記號．

若令 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$，則記號 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 實便於記憶，即將方程式(1)中 x 之係數書為第一縱行，y 之係數書為第二縱行，而將第一個方程式之係數書為第一橫行，第二個之係數書為第二橫行(為術語簡單計，吾人以後恆曰縱行為行，橫行為列)．而本無意義之符號 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，吾人今以其代表有意義之數 $a_1b_2-a_2b_1$ 者，兩相比較乃可規定 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 中自左上角至右下角二數相乘加上自左下角至右上角二數相乘之反號，即得 $a_1b_2-a_2b_1$，由此規定，又知 $k_1b_2-k_2b_1=\begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$a_1k_2-a_2k_1=\begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix}$，而(1)之解遂為

$$x=\frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}，\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}，$$

此為一較便利於記憶之形．

茲再轉論三元線性聯立方程式

$$(3)\qquad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=k_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=k_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=k_3. \end{cases}$$

以 $b_2c_3-b_3c_2$，$b_3c_1-b_1c_3$，$b_1c_2-b_2c_1$ 分別乘(3)之第一，二，三個方程式而再加其結果即得

$$(a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1)x$$
$$=k_1b_2c_3-k_1b_3c_2+k_2b_3c_1-k_2b_1c_3+k_3b_1c_2-k_3b_2c_1.$$

若 $\qquad a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1\neq 0,$

則 $$x=\frac{k_1b_2c_3-k_1b_3c_2+k_2b_3c_1-k_2b_1c_3+k_3b_1c_2-k_3b_2c_1}{a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1}.$$

此式又不易記憶，若與解(1)同樣而令(3)中 x, y, z 之係數書爲第一，二，三行（縱行），第一，二，三個方程式之係數書爲第一，二，三列（橫行），即以

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1,$$

則 x 之分子與分母所不同者只是分母之 a_1, a_2, a_3 分別換成了 k_1, k_2, k_3，故

$$x=\frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},$$

而爲一便於記憶之式，且同樣可得，

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

若令 $$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$ 而由

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1$$

觀之，可得下列二事項：——

i) D 爲 a,b,c 之乘積共 6 項之代數和，而每項均爲 a, b, c 三文字之積，a 居首，b 居次，c 居末；再將 a,b,c 之右下角附以 1,2,3 三數字之所有排列（共$3!=6$個排列）.

ii) 若視 123 爲自然順序，則 132 爲由 123 中 2 與 3 兩數字互調而成；231 由 123 中先互調 1 與 3 兩數字，然後將其結果再互調 2 與 3 即得（共互調兩次）；213 僅由 123 中互調 1 與 2；312 乃由 123 中先互調 1 與 3，再將其結果互調 1 與 2 共互調兩次而成；321 僅由 123 中互調 1 與 3．且由 D 之 6 項觀之，知 $a_i\, b_j\, c_k$ 或附以正號或附以負號於其前，純依$(i\ j\ k)$爲由(123)或互調二數字偶數次〔註：此時僅互調 2 次，或 0 次如 123 是〕或奇數次〔註：此時均爲互調 1 次〕而定。

然吾人所應注意者，D之第一，二，三行各別全爲 a,b,c；而於各文字之右下角各別附書 1,2,3 以表示 D 之第一，二，三列．故上述之 i) 及 ii) 兩事項又可言表如次：——

將 D 之第一，二，三行之文字 a,b,c 依順序排列後，再使列之順序作種種之排列（即使右下角之數字 1,2,3 作種種之排列）；若排列$(i\ j\ k)$ 由 1,2,3 互調二數字偶數次而成時，則將 $a_ib_jc_k$ 冠以正號；苟$(i\ j\ k)$ 由 1,2,3 互調二數字奇數次而成時，則將 $a_ib_jc_k$ 冠以負號．

至此，又有一問題生焉．如 132 本可由 123 中互調 2 與 3 二數字一次而成（奇數次）．若將 123 中先互調 1 與 2 得 213，再互調 2 與 3 得 312，最後互調 1 與 3 即得 132，故 132 又可視爲由 123 中互調二數字共 3 次而成．互調 1 次與 3 次雖均爲奇數次，然則吾人能否可由 123 互調二數字偶數次亦得 132 乎？爲回答此問題，乃考更一般之 n 個文字 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 之多項式

$$
\begin{aligned}
P(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)&\cdots\cdots(x_1-x_n)\\
(x_2-x_3)(x_2-x_4)&\cdots\cdots(x_2-x_n)\\
(x_3-x_4)&\cdots\cdots(x_3-x_n)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(x_{n-1}-x_n),
\end{aligned}
$$

此爲$x_1,\cdots,x_n$之交代式，可證如次：——

今互調任二文字x_k與x_l而考P之變化. P之$\frac{n(n-1)}{2}$個一次因子中不含x_k與x_l者對此互調不受影響，含x_k與x_l（僅一因子）者對此互調僅變更其符號，至含x_k不含x_l與含x_l不含x_k者可兩兩合併而書爲$\pm(x_k-x_i)(x_l-x_i)(i\neq k,\ i\neq l)$形，如斯之因子之積對此互調亦不受影響。故結局，互調x_k與x_l，則$P(x_1,\cdots,x_n)$僅相差一符號，即

$$P(\cdots,x_k,\cdots,x_l,\cdots)\equiv-P(\cdots,x_l,\cdots,x_k,\cdots),$$

故$P(x_1,\cdots,x_n)$爲$x_1,\cdots,x_n$之交代式.

茲令$(i_1i_2\cdots i_n)$爲$(12\cdots n)$之一排列. 某甲由$(12\cdots n)$互調二個數字m次乃得$(i_1i_2\cdots i_n)$，某乙乃由$(12\cdots n)$互調二個數字l次而得$(i_1 i_2\cdots i_n)$. 且當$(12\cdots n)$中某二個數字互調時，令$(x_1x_2\cdots x_n)$中相對應的二文字亦作如斯之互調〔如i與j二數字互調時，P中二文字x_i與x_j亦令其互調〕；故某甲所得之結果爲

$$P(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in})\equiv(-1)^mP(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

而某乙所得爲

$$P(x_{i1},\ x_{i2},\cdots,x_{in})\equiv(-1)^l\,P(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

因之 $$(-1)^mP(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)\equiv(-1)^l\,P(x_1,\ x_2,\cdots,x_n).$$

然$P(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)$非恆等於零，故由上恆等式兩邊消去之即得

$$(-1)^m=(-1)^l.$$

故m與l或同爲偶數或同爲奇數. 由是乃知：由$(12\cdots n)$互調二數字若一度爲偶數次而得$(i_1i_2\cdots i_n)$者，則不論用何方法互調$(12\cdots n)$中二數字而得$(i_1i_2\cdots i_n)$恆爲偶數次之互調也. 苟一度爲奇數次，則恆爲奇數次。至此，吾人之問題乃完全獲解矣。因之，若名$D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$曰三次行列式，則得$D=\sum(-1)^\lambda a_i\,b_j\,c_k$，而$(i\ j\ k)$爲$(123)$之一排

列，λ 爲由互調(123)中二數字而得$(i\ j\ k)$者之互調之次數〔因之，λ 或恆爲偶或恆爲奇〕.此展開法亦適用於 $\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}$，蓋 $\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \sum (-1)^{\lambda} a_i b_j$ 甚爲明顯.吾人名 $\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}$ 曰二次行列式.茲爲推廣計，命 n^2 個數 $a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 如次排列而成之正方形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

名曰 n 次行列式，而令其爲

$$\sum (-1)^{\lambda} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n},$$

式中$(i_1 i_2 \cdots i_n)$爲$(12\cdots n)$之一排列，λ 爲互調$(12\cdots n)$中二數字而得$(i_1 i_2 \cdots i_n)$者之互調之次數，Σ 乃代表 $n!$ 個排列所成 $n!$ 項之代數和.據 $P(x_1, \cdots, x_n)$爲交代式之理，此定義實可容許.故行列式之思想起源於聯立方程式之解法，至此甚明.

§2. 行列式的基本性質

行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中的 a_{ij} 稱爲 D 之元素.第一，二，$\cdots$，n 行之元素順次換爲第一，二，$\cdots$，n 列之元素，而第一，二，$\cdots$，n列者順次又換爲第一，二，$\cdots$，n 行(簡言之，行與列互換)所得之新行列式恆表以

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

若令 $a_{ij}=b_{ji}(i, j=1, 2, \cdots, n)$，則由行列式之定義，知

$$D'=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots b_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\lambda}b_{i_1 1}\,b_{i_2 2}\cdots b_{i_n n},$$

式中 $(i_1i_2\cdots i_n)$ 爲 $(12\cdots n)$ 之一排列，且由互調 $(12\cdots n)$ 之二數字共 λ 次而成．再由 $a_{ij}=b_{ji}$ 又得

(4) $$D'=\sum(-1)^{\lambda}a_{1i_1}\,a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}.$$

(4)式中每項 $(-1)^{\lambda}a_{1i_1}\,a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 共有 n 個文字 a_{ij}，而每 a 之右下角皆有兩個脚指數．且 n 個第二個指數 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 既爲 $1, 2, \cdots, n$ 之一排列，故可適當的重新排列之又能使 $(i_1i_2\cdots i_n)$ 回歸爲自然順序 $(12\cdots n)$。然當 $(i_1i_2\cdots i_n)$ 重新排列回至 $(12\cdots n)$ 時，則 n 個第一個指數 $1, 2, \cdots, n$ 之次序隨而亦受變化，如變爲 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 者，因之 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 又爲 $(12\cdots n)$ 之一排列，而

(5) $$(-1)^{\lambda}a_{1i_1}\,a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}=(-1)^{\lambda}a_{j_1 1}\,a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}.$$

若吾人使 $(i_1i_2\cdots i_n)$ 變至 $(12\cdots n)$ 之手續依照互調 $(12\cdots n)$ 中二數字共 λ 次而成 $(i_1i_2\cdots i_n)$ 者之逆序互調之，則 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 不僅爲 $(12\cdots n)$ 之一排列，且實際又爲由後者互調二數字共 λ 次而成也．再比較(4)與(5)又有

$$D'=\sum(-1)^{\lambda}a_{j_1 1}\,a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}.$$

然由行列式之定義，

$$D=\sum(-1)^{\lambda}a_{j_1 1}\,a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}.$$

故 $D=D'$，而有

定理1. 行列式之行與列互換，其值不變．〔D' 名曰 D 之轉置行列式 (transposed determinant)〕

再令 $s<t$ 而將行列式 $D=\begin{vmatrix} \cdots a_{1s}\cdots a_{1t}\cdots \\ \cdots a_{2s}\cdots a_{2t}\cdots \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ \cdots a_{ns}\cdots a_{nt}\cdots \end{vmatrix}$ 之第 s 及第 t 行互易

所得之新行列式爲 $\varDelta=\begin{vmatrix}\cdots a_{1t}\cdots a_{1s}\cdots\\ \cdots a_{2t}\cdots a_{2s}\cdots\\ \vdots \quad \vdots\\ \cdots a_{nt}\cdots a_{ns}\cdots\end{vmatrix}$. 則由定義,知

$$\varDelta=\Sigma(-1)^{\lambda}\cdots a_{i_{s-1},s-1}a_{i_st}a_{i_{s+1},s+1}\cdots a_{i_{t-1},t-1}a_{i_ts}a_{i_{t+1},t+1}\cdots,$$

但$(\cdots i_{s-1}i_si_{s+1}\cdots i_{t-1}i_ti_{t+1}\cdots)$爲$(\cdots,s-1,s,s+1,\cdots,t-1,t,t+1,\cdots)$之一排列且由後者互調二數字 λ 次而成. 茲將 a_{i_st} 與 a_{i_ts} 之位置互易,則得

$$\varDelta=\Sigma(-1)^{\lambda}\cdots a_{i_{s-1},s-1}a_{i_ts}a_{i_{s+1},s+1}\cdots a_{i_{t-1},t-1}a_{i_st}a_{i_{t+1},t+1}\cdots,$$

式中$(\cdots i_{s-1}i_ti_{s+1}\cdots i_{t-1}i_si_{t+1}\cdots)$當然亦爲$(\cdots,s-1,s,s+1,\cdots,t-1,t,t+1,\cdots)$之一排列,但由後者互調二數字 $\lambda+1$ 次而成.故

$$\varDelta=-\Sigma(-1)^{\lambda+1}\cdots a_{i_{s-1},s-1}a_{i_ts}a_{i_{s+1},s+1}\cdots a_{i_{t-1},t-1}a_{i_st}a_{i_{t+1},t+1}\cdots=-D,$$
而得

定理2. 若行列式之任二行互换,則行列式之值變號.

若對列而言,即將 D 之第 s 及第 t 列互調所得新行列式爲 $\varDelta$,而作 D 及 $\varDelta$ 之轉置行列式 D' 及 $\varDelta'$, 則由定理 2, $\varDelta'=-D'$,但據定理 1, $D=D'$, $\varDelta=\varDelta'$, 故 $\varDelta=-D$. 此即

定理3. 若行列式之任二列互换,則其值變號.

既然 D 之第 s 及第 t 行互换所產生之新行列式 $\varDelta=-D$;然當此二行完全一致即 $a_{is}=a_{it}$ 時,$(i=1,2,\cdots,n)$, $\varDelta$ 與 D 實際是一致, 即 $\varDelta=D$. 如是由定理 2, 乃得 $D=-D$, $2D=0$, $D=0$.故有

定理4. 行列式之任二行完全一致時其值爲零.

同理,由定理 3, 遂得

定理5. 行列式之任二列完全一致時其值爲零.

〔註〕 定理 4 與 5 尚有他證,後將見之.

若行列式 D 之任一行(如第 s 行)之元素皆以 k 乘之, 所得之新行列式命爲 $\varDelta$, 則由定義知