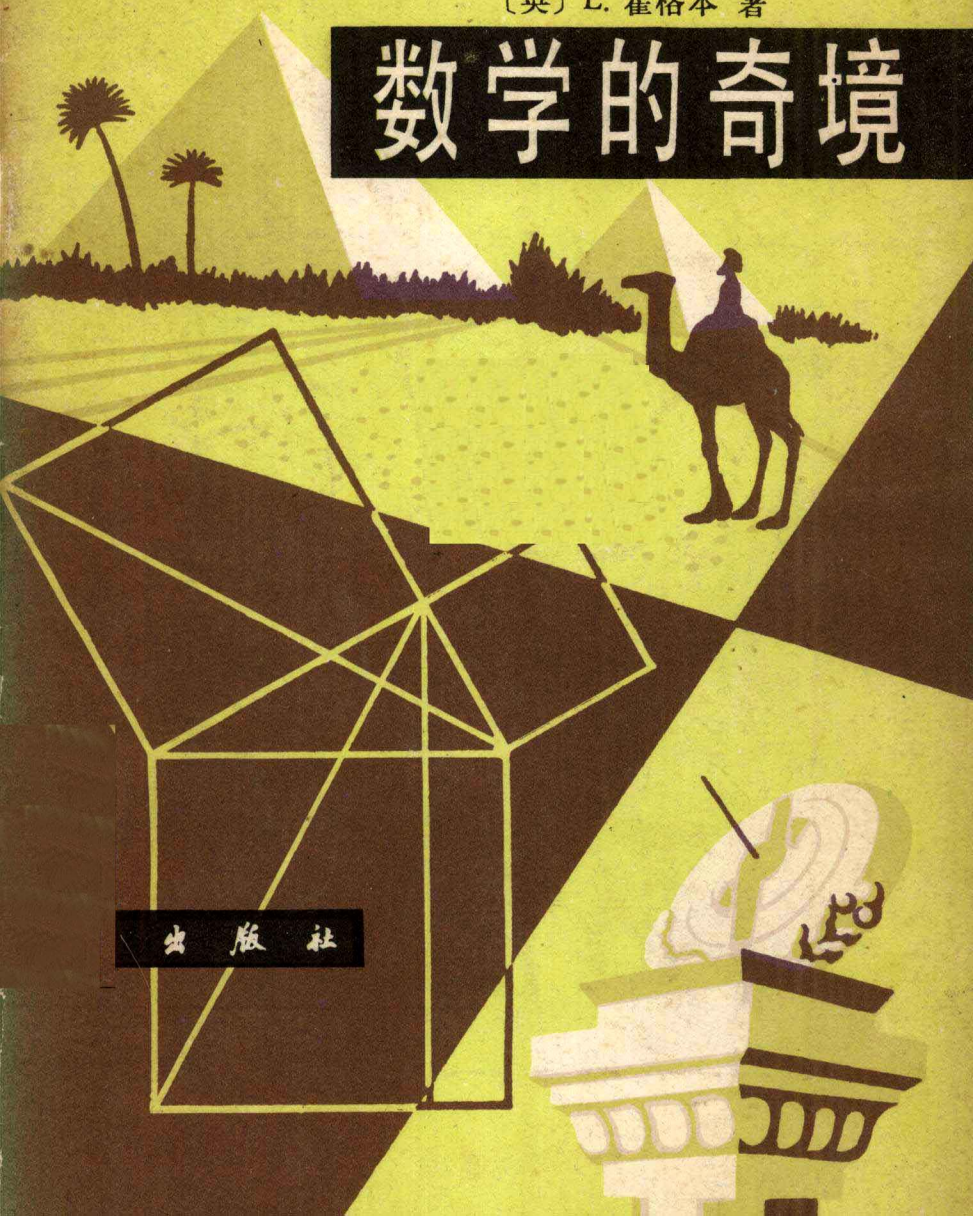


〔英〕L. 霍格本 著

数学的奇境

出版社



内 容 简 介

本书引人入胜地介绍了原始社会以来数学的形成和发展过程,及其对人类社会的作用。内容生动浅显,文字通俗流畅。是适于青年课外阅读的一本科普读物。

该书曾以中文注释本的形式于1964年由商务印书馆出版过,是供自修英语的读者学习用的。为满足广大读者的要求,现全部译出。供青年、家长及教师等阅读。

Lancelot Hogben

MAN MUST MEASURE

The Wonderful World of Mathematics

Rathbone books, London, 1955

数 学 的 奇 境

〔英〕L. 霍格本 著

李 勃 曾作人 译

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1979年8月第一版 开本:787×1092 1/32

1979年8月第一次印刷 印张:2

字数:37,000

统一书号:13031·1063

本社书号:1494·13-1

定价: 0.16 元

目 录

一、起源：时间与符木.....	1
二、古代埃及：税收与三角形.....	6
三、巴比伦和亚述：正方形与圆.....	13
四、腓尼基人的航行：星辰与航海.....	20
五、希腊和罗马：证明与进步.....	24
六、伊斯兰教：数字与零.....	38
七、西欧：图象与引力.....	44
八、工业世界：动力与精确度.....	53

一、起源：时间与符木¹⁾

“要换我一只鹿，你得给我三枝箭”，生活在二万五千年以前与我们相象的原始人只消用双手就可以说清这段话，并伸出一个指头指鹿、三个指头指箭就行了。这种原始的用一个指头表示一件东西、三个指头表示三件东西的计算方法，是他们仅有的算术知识。几千年来他们把任何大于三的数量都理解为一堆或者一群。

那时候，没有市镇，也没有村庄。他们为搜捕野兽飞禽或采集果薯食物，到处流浪。他们仅有的物品是避风遮寒的兽皮、打猎的武器和盛水的陶罐；说不定还有一些表示吉祥的装饰品，例如熊齿或海贝做的项链等。

他们自然没有必要知道更多的算术知识了。甚至一些简单的指算也只是偶尔在与其它部落的人交换货物时才用得着。有关季节和方向的知识对这些游猎者和采食人来说，倒是重要的。有关季节的知识，能帮助他们预知远方哪些树林中的果实将要成熟了；而有关方向的知识则能引导他们找到这些树林的所在。因为那时没有可以借助的日历，也没有地图，

1) 符木——古时刻痕计数的木签，分做两半，借贷双方各执一半为凭。

——译注

他们不得不通过碰钉子和长期积累经验来逐步获得这方面的知识。

他们在熟悉的区域往返的时候，可以借助熟悉的山丘，湖泊和溪流的位置，找出往来的道路。但是，当干旱和饥饿迫使他们游猎到陌生的地域时，就不得不靠太阳、月亮和星辰来指路了。

滨海地区的人们会留意到，每天清晨太阳从波涛上兴起，每天晚上落到远方的山丘后面。他们可以迎着升起的太阳找到通往大海的方向；朝着日落的地方走，他们就可以找到通往山丘的路。不过这一点知识，仅仅是一种粗浅而简便的指南。因为，太阳出没的位置是随着季节而改变的。

夜空的星辰为辨认方向提供了较可靠的依据，这是远古部落中的聪明人经过多年的观察才获得的。不妨想象一下，他们白天经过打猎的辛苦，晚上蹲在露天的窝棚里或坐在野外的山洞旁，遥望着星空。经过一段时间之后，他们会注意到一些星群构成的简单图形，使他们每夜都能辨认出来，并发现这些星群象巨钟的时针，循着一段圆弧轨道，在天空中慢慢地运转。

有一些星群环绕着北方天空的一个固定点在运转。那里有一颗我们现在叫做北极星的星，它在夜空中的位置在百把年中几乎是不变的。既然它好像是不动的，就可以把它当作一个路标。如果我们能在繁星闪烁的夜空当中认出这颗星，它便在整个夜晚给我们指出我们所谓的“北方”。

二万五千年以前的猎人象我们一样，已经能借助北斗七

星找到这个路标。这组星群很象一把大勺或古代的犁。这组星群绕着北极星运转，无论我们在什么地方看见夜空中的这组星群，其中有两颗星总是与北极星成一直线。若沿着它们所指的方向走，就会走向正北。

太阳、月亮和星辰不仅是人类最早的向标，也是人类最早的时钟。北部热带的猎人在早晨会看见向西射出的长影，随着太阳升高，这个影子越来越短，直到中午太阳当头的时候为止。午后，太阳下降了，影子开始向东伸长。远古的人们就是这样，凭借白天阴影的长短，大概地说出如今称作白天的时间。

早期的人们围着篝火取暖，遥观夜空，他们发现满月的月亮正好处在夜空的中央，这时正恰是半夜。很多细心的人就根据某些绕北极星运行的星辰的位置，来判断夜晚的时间。

为了度量较长的时间，我们的祖先一定是依赖于月亮的。他们看着月亮怎样由银盘似的圆月。夜复一夜地逐渐变成一眉细弱的弯月，然后以至消失；经过若干个黑夜，月牙儿又出现在天空，逐渐增大，以至轮盈月满。

正好月圆之时，某个饥饿的部落，或许在树林旁定居下来，林中的枝头上结满了未熟的果子。某些聪明的人可能会说，“现在不要摘，等月儿再圆时咱们再来”，到那时，这些果子就成熟了。于是，他们离开了树林，去别处寻找食物了。然而，他们总得及时赶回来。要做到这一点，他们就得计算天数。

光阴飞逝，计算天数或月数不象数死鹿或熊牙那样简单。

当用指头一一点计时，我们没法把日子排成一行。我们的祖先最初解决这个问题时，可能是在树木、木棒上或石头上用刻痕的方法来记录的，一条痕表示一天，两条痕表示两天，依此类推。他们会发现，一次月圆到下一次月圆，总是相隔三十条痕印，或者说经过了三十天时间。他们刻一条大痕表示一次月圆，十二条大痕表示了三百六十天，大致是一年。这时便有了第一个包括四季在内的、从今春到来春的不甚精确的月历。

数千年以后，这些古代猎人中有一些人慢慢开始了一种新的生活方式。每当他们回到旧居时，发现他们上次来时遗落下来的谷子长成了庄稼。从这种经验中，他们有意识地储存一点谷籽进行播种。狗这个忠实的伙伴帮助他们把牛羊畜群赶进便于圈拦的山谷，以备必要时杀戮食用。他们播种和收割自己的庄稼，不再到处觅寻野菜和水果，他们从此成了牧人和农夫。

当他们以村寨定居后，就积聚了越来越多的并自称是他私有的财产。当人们有了锄头、刨土棒、田地和篱笆、庄稼和畜群时，就需要对这些财产作出记录。他们最早使用的记数方法与历书编制人使用的相同，即用一个符号表示一件东西，两个符号表示两件东西，依此类推。这种记数方法延续了很久。在新大陆（即南北美洲），秘鲁的印加族人那时习惯于每收进一捆庄稼，就在绳子上挽个结。以此来记录收获的多少。至今在欧亚非大陆的某些地方，仍然有一些牧人用棒上刻痕的方法，来计算他们的畜群。

因为他们成了农民，所以必须准确地预知生羔产犊的时间和播种收割的日期。以前猎人的那种简便但不精确的月历满足不了他们的要求；过去猎人的计算方法也不够用了。如果他们再用三百六十天的月历来推算节气，那么一年就会有五天的误差，两年就会有十天的误差，往后误差就更大了。于是，某些会制订准确日历的聪明人就成了特别重要的人。在生活上，农夫愿意供养他们，以便使他们能腾出时间，致力于季节的测报。

往往有这么一些人，他们既是历法专家，也是祭司。他们供奉天神，祈祷免遭旱涝之灾，同时破费大批祭品，感谢上帝丰收之恩。

尽管他们把玄虚的魔术和历书的制订混杂在一起，但他们的工作却异常精细。他们日复一日地观察太阳在某一季节的位置，夜以继日地标记那闪烁在西方天空太阳隐没之处的星群，终于测出了一年的周期，误差不超过一两个小时。如果没有书面记录，他们决不能记住在精心的工作中学到的所有知识。

据说最早的书写数字起源于五千年以前的埃及和美索不达米亚¹⁾。虽然这两个地方相距很远，但两地的数字系统似乎是以同样的方式建立的——在树木或者石头上刻痕记印来记录流逝的日子。埃及的祭司在一种用芦苇制成的草纸上写字，而美索不达米亚的祭司则是写在松软的泥板上。因此，两

1) 美索不达米亚 (Mesopotamia)，即两河流域，今在伊拉克境内。——译注

地的数字形状自然是不同的。但也有共同之处，他们都是用单划表示一，用其它符号表示十或者更大的数；他们根据需要，重复地使用这些单划和符号，以表示所需要的数字。

三千年以后，罗马人仍然用单划表示一到四的数字。他们使用了字母形式的新符号表示五、十、五十等等。大约在同一时期，中国人也用不同的符号表示了一到十的数字，但开头的三个数，仍然是用单划表示的。

在古代所有的数字系统中，最引人注目的是中美洲马雅人使用的数字。它和欧亚非的方式完全不同，只消采用三个符号——点、划、椭圆——就可写出任何数字。用一点一划就可以表示一至十九的数字。在任何数的下方再加一个椭圆，就是把把这个数增大二十倍。例如 $\cdot = 1$ ； $= 20$ 。再加一个椭圆，就是再把这个数增大二十倍。然而，他们在计算时，对这个规定作了调整：在一个数的下方加上第二个椭圆后，不是乘以二十，而是乘以十八。这样一来， 表示的就不是 400 ($1 \times 20 \times 20$) 了，而是 360 ($1 \times 20 \times 18$)。要是联想一下三百六十天的日历，我们就会理解他们为什么要这样做了。

当时，马雅人也使用了三百六十五天的日历。他们用一种人面形的专门数字，刻在被人称作“石碑”的石柱上记录日期。

二、古代埃及：税收与三角形

古代埃及的祭司成了这块国土上最有权势的人。他们把

许多日子定为圣日，如望月节，仲夏节，为某个星群宰畜献祭的节日和给河神奉献祭品的节日等等。也是由他们这些人，下令建造宏大的庙宇，并用来观测天象；此外，他们还筑起了巨大的统治者法老的陵墓——金字塔。

要建立如此宏伟的建筑，埃及的建筑师必须明了怎样画底层平面图，怎样使石块的边放在水平上，如何吊运巨石并把这些巨石方正无误地堆砌在适当的位置上。金字塔的建筑师在学会这一切的过程中，通过实践，获得了许多测量技术上的发现，也就是我们现在叫的几何学。

今日蓝图的鼻祖，人类最早的平面设计图，大概是画在泥板上的。简单的图形显示了完工后建筑物的形状。制图者确实懂得了两样东西——绘的图和建筑物——其大小不同，而形状是一样的。因此，凡是适用于这一个形式的，也同样适用于另一个形式。

底层平面图完成之后，人们用锄头刨出一片宽阔平整的土地，为匠人施工做准备。那时候，还没有带轮的车子，甚至连一条好路也没有。沉重的建筑材料，大多是几吨重的巨石。这些巨石由船沿着尼罗河尽可能地运到工地近处。这些巨石都是按一定的形状凿成的。他们先用燧石敲掉棱角，然后用铁凿和木锤把各面打平，最后用粗石把各面磨光。为了保证巨石方正，各个角都要经过匠人的方尺或三角规校验。

然后，他们在金字塔基部铺上一层巨石，接着又铺第二层、第三层……，一层压一层，一层比一层小，使金字塔的四边相等地收敛并巧妙地在塔尖会合；为了检验金字塔是否真

正垂直立着，每一面必须用锤线来校正。他们在阶梯形的四边铺上土，修了一条坡路，给拖板底下垫上圆木，向上拉曳石头。

如何把金字塔的底面做成真正的正方形，这可能是难度最大的问题。因为确定角度时若产生任何一点误差，都会使整个建筑失形。尽管这些建筑师没有留下当时的工作记录，我们还是可以想象出他们是怎样处理这些问题的。

他们可能在地面上栽两根木桩，在木桩之间拉一段绳子，沿绳子画出一条直线。然后，在两个木桩上各拴一条绳子，绳子长度比木桩间距离的一半要长些；拉紧绳子的一端，先后绕木桩旋转，就可画出两个精确的半圆，这两个半圆我们现在称为圆弧，且相交于两点；当建筑师用一条直线把两点连接起来，发现这条直线与木桩之间的连线垂直相交，并把它等分成两部分。

建筑师一定能在地面上画出直角，以得到正方形的地基。为了检验墙头是否直立，他们还需要在空间画出直角。为此，古埃及的建筑师发明了沿用至今的锤准线。这是一根悬挂在墙头上的系着重物的绳子。它自由摆动后静止时的位置与地面垂直。若墙以此为准，就是直立的。

在所有的直角画法中，最简单的是用三角尺。埃及人就是这样做的。但是，他们的三角尺不是一下子就做成的，而是先做了一个带有直角的三角形。

这究竟是谁首先发现的，我们也许永远不会知道，但最有可能的是那些借绳子等距打结以作测量的人们。他们在工作中，不知因何缘故，发现在一定长度的绳子拉成的三角形中，

存在着一个与最长的一边相对的直角。他们取一定长度作为两绳结间的距离，量得其节数分别是 3、4、5。另一组是 5、12、13。把木条锯成这样的长度，然后，分别把木条的端点相互连接起来，直角三角形就做成了。

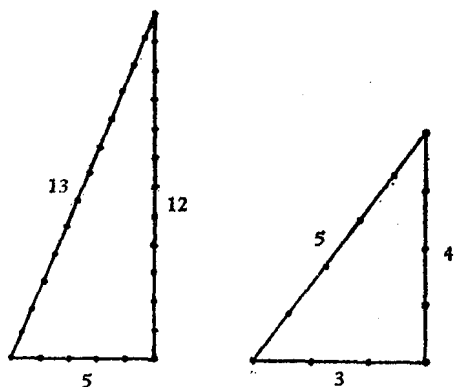


图 1

这些粗糙的测量方法，对于他们的前辈是足够的；但是，对于这些金字塔和寺院的建筑师说来就远远不够了。一个农民自己动手盖一幢房屋时，他可以说：我这房子六步长、四步宽，房顶高出头一拃。可是，庙宇设计师却不能用步长或手拃指导施工，因为他手下的每个工人的步长和手拃是各不相同的。

对于大规模建筑的测量，无论由谁来进行，其结果应该总是一样的。起初，他们大概是以某个人——也许是国王——的身体的某些部位作为基准的。后来，再用木质或金属制的直尺把这些标准长度固定下来。

在古埃及,主要的标准长度是《圣经》里经常提到的腕尺。这是一个人从肘到伸直的中指尖的前臂的长度。此外,还有一些略小一点的长度单位:掌尺——腕尺的七分之一;指尺——掌尺的四分之一。

这些较小的单位对古埃及人来说,是很重要的。因为他们感到分数很难掌握。现在,我们能很容易想象出分数的含意,例如 $3/5$ 或 $9/10$ 等等,但古埃及人就不能这样。他们常常把一个分数看成某个东西的一部分。要他们想象腕尺的七分之三太困难了,但对于三掌宽却丝毫不感到费劲。

早期的这些量法初看起来似乎很滑稽,但同样滑稽的一些量法至今还在使用。现代英国人或美国人还在使用脚尺。他们宁愿说“七英寸”,也不愿说十二分之七英尺。

每年收获时,古埃及的祭司向农民征收以实物形式交纳的捐税,作为他们自己的奉禄。为了规定捐税,祭司就必须有量谷、酒、油的标准坛罐和称其它农产品的标准重量。捐税的多少决定于田地的大小,田地大的捐税就重。所以,为了征税,祭司还需要一种测量面积的方法。

他们第一次发现面积的算法,很可能是在寺庙里用方砖铺地的时候。铺六砖长、六砖宽的一块地面,要三十六块方砖(6×6);铺一块十砖长、四砖宽的地面,要四十块方砖(10×4)。为了求正方形或长方形的面积,只要长宽相乘就可以了。

然而,农田并不全部是正方形或长方形的。收税者遇到的田地大小不一,形状多样,很难划成方形测量,但是划成三角形却很容易。如果知道了求三角形面积的方法,就能测出

任意直线边的农田面积。

巧极了！你一旦掌握了正方形或长方形面积的求法，学习求三角形的面积就非常便当。一个正方形的麻布可以折成两个相等的三角形，面积分别是这个正方形面积的一半。一块长方形的麻布也可以剪成两个相等的三角形，面积分别是这个长方形面积的一半。很可能就是这些简单的算例启发那些祭司得出了这个法则：三角形的面积等于底(或者说长)乘高(或者说宽)除以二。

那些祭司丈量土地，可能比我们想象的还要忙。因为埃及的农田大多处在尼罗河附近的狭谷之中。富饶的狭谷两岸是茫茫的一片沙漠。每年仲夏时节，河水泛滥，淹没了岸旁的土地。水退之后，田里积下了薄薄一层肥沃的烂泥。这一年一次的涨水使埃及的农夫五谷丰登，但也冲走了田间的界标。所以，祭司们不得不一次又一次，一年又一年地丈量这些土地。他们不仅是日历编制者和建筑师，也是世界上最早的职业测量员。

自埃及时代迄今，三角形测量法是测量工作的主要方法。当我们回忆早期的祭司测量员掌握多少关于三角图形和面积的知识时，我们也就明白了后来的数学家从他

们的实践知识中获得多少教益。“几何”一词就是由此来的。它由两个希腊文字组成，一个指土地，一个指测量。

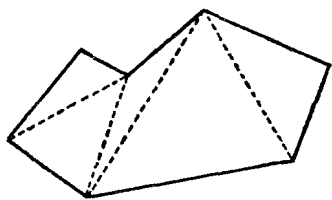


图2 各三角形面积之和，
是这块农田的总面积

当然，测量家也有许多用简单的求三角形面积的法则解决不了的问题。他们不可能把一个圆分成小块，而块块都是标准的三角形。

早期的埃及人画圆，一定是采用拉绳子绕木桩的方法。他们知道用长绳能画出大圆，用短绳能画出小圆；并知道圆的面积取决于圆周到圆心的距离，或者是我们常说的半径，实际上也就是这样。

大约三千五百年以前，当宏伟的金字塔已成为古迹的时候。有一位埃及的文书叫阿赫美斯的，写下了这么一条法则：圆的面积近似地等于边长为该圆半径的正方形面积的 $3\frac{1}{7}$ 。

例如，半径是三英寸时，圆的面积大致是 $3\frac{1}{7} \times 9$ 平方英寸。这些祭司是如何发现这一点的，我们也许永远不会知道。阿赫美斯的草纸手稿装在精致的镜框里，现在还悬挂在伦敦的大英博物馆里。遗憾的是手稿没有给出注解。分散在世界各地博物馆内的其他一些别的古代手稿，固然能使我们对古埃及的数学伸目一瞥。但是，我们现有的大部分资料，还是从考察至今还屹立在尼罗河畔的古代建筑中得来的。

从有些金字塔的四面准确地对着东西南北的事实，我们可以知道祭司建筑家确定方向的准确性是多么高。他们可能是在正午时刻，根据某个高大的石柱的阴影，定出南北方向的，然后，垂直阴影画一条直线，再定出东西方向。

古埃及人还掌握另一种确定正东方向的方法。由于日出位置逐日改变，冬季偏向东南，夏季偏向东北。如果你能平分

冬至与夏至日出方位的夹角,你就会知道那里是正东了。

古埃及人通过计算太阳两次到达最偏北升起位置的天数,就能测出一年的长度。他们在卡纳克¹⁾盖了一座大庙。在庙里栽了一排柱子,指着夏至日出的位置。每三百六十五天中,只有一次初升的太阳会沿这行柱子照射进来。

埃及测定方向、计算时间的方法与早年的猎人和食物采集者使用的方法相同,即日月星辰出没的位置,白天阳光阴影的长短和夜间绕北极星旋转的星群。然而,由于多年的精心记录,埃及人利用它们的方式进步多了。古代的猎人看着一棵树投射的长影,他最多能说,“现在还是清早”;埃及人利用日晷量出投在一块标有刻度的木条上的影子,就能看着影子说:“上午的第二个时辰快到了”。

这时候,人们有了真正的科学。但是,古埃及祭司的许多图画,都画着上帝操纵着罗盘的指针和掌管着昼夜时辰的忙碌景象。他们背着一个沉重的迷信包袱,在真正的科学的道路上摸索着。

三、巴比伦和亚述:正方形与圆

在尼罗河三角洲东一千英里的地方,有两条大河——底格里斯河和幼发拉底河。两河之间及两岸周围,叫美索不达米亚。那儿产生过另一种文化,它与埃及文化至少是同等古

1) 卡纳克 (Karnak) 是埃及的一座古城。——译注

老。

历史学家把这种文化发展的不同阶段称为苏米尔期、迦勒底期、亚述期和巴比伦期。它在某些方面与埃及文化十分相似。两个地方观察天象的祭司和历书制订者都是统治阶级，两地的天文学都有惊人的成就。公元前 2000 年左右，他们设立了寺庙图书院，他们在那儿用一种隐晦的书法，记载下了一般人难以看懂的知识。

这两种文化相同之处就是这些。

与埃及不同的是，美索不达米亚有着大量的对外贸易。它没有木材适于建筑，没有丝绸供给君王和王子做衣裳，丰盛佳肴里也没有调味的调料，制作寺院鼎钵的贵重金属又极其缺乏。为了适应这些需要，商人们赶着驴子或骆驼队，翻过高山峻岭，涉过沙漠荒原，西到黎巴嫩买杉木，北到小亚西亚换金银铅铜，往东可能远达印度以至中国换回丝绸、染料、香料以及宝石。

出售土产的商人只消粗略地称量货品的重量，他们整驮整驮地卖出就可以了。但是，到处理高价商品时，他们就严格计较了。因此，杆秤和标准重量在美索不达米亚已普遍使用。商人用泰伦¹⁾(约合五十五磅)称量笨重的货物，用舍克²⁾(略小于三分之一盎司³⁾)来称量精贵的商品。此外，商人还需要一种人人都肯当作货价而接受的东西。有一种东西几乎人人都

1) 泰伦，即 talent。——译注

2) 舍克，即 shekel。——译注

3) 盎司，即 ounce，英制重量单位。——译注