中等职业教育基础课教学改革规划教材

ZHONGDENG ZHIYE JIAOYU JICHUKE JIAOXUE GAIGE GUIHUA JIAOCAI

数学

MATHEMATICS

茆有柏　程宏琦　总主编

陈德松　李庆霞　本册主编

机械工业出版社

CHINA MACHINE PRESS

前　言

根据《教育部关于进一步深化中等职业教育教学改革的若干意见》（教职成［2008］8号）和《教育部关于印发新修订的中等职业学校语文等七门公共基础课程教学大纲的通知》(教职成［2009］3号)，编者结合多年教学改革实践经验，在经过多轮教学使用、修改的校本教材基础上，组织编写了这套中等职业教育基础课教学改革规划教材．

本书依据教育部新修订的《中等职业学校数学教学大纲》编写．在本书的编写过程中，编者始终坚持全新的教学理念和教学模式，遵循因材施教的思路，注意与九年义务教育阶段数学课程的衔接和知识的整合；增加了贴近多种职业特色、贴近当前学生实际情况、贴近生产实践的应用实例，加强了实际问题的提出、分析和解决的内容；在教材的结构体系上，考虑到不同地区、不同职业，不同学力的需要，为便于不同中等职业学校的学生学习，教材的结构以模块化形式编排；在教材的知识体系上，本着“降低理论要求，优化结构体系，加强实际应用，注重能力培养”和“必需，够用，便用”的原则，进一步减少了不必要的理论推导，表述力求简单易懂，既具有科学性，又具有可读性．

全书分为三大模块，共十七章和九个独立的知识拓展模块．其中第一模块为基础模块，第二模块为职业模块，第三模块为拓展模块．基础模块是各专业学生必学的基础性内容和应达到的基本要求，教学课时数约为128个；职业模块是适应学生学习相关专业选学的内容，不同学校和不同专业可根据实际情况进行选择、安排教学，教学课时数约为32～64个；拓展模块是为满足学生个性发展和继续学习需要安排的选学内容，学生可根据情况自己安排学习时间．

本套书由华北机电学校刘振兴、苆有柏、程宏琦、岳鸿共同策划编写，并由苆有柏、程宏琦担任总主编，刘振兴、岳鸿分别担任各册主审．

本书由陈德松、李庆霞担任主编，刘振兴担任主审．参加编写的有杨巧梅、王翠萍、郭敏、宋华、胡斌、岳鸿等．在编写过程中，编者参考和借鉴了大量的其他教材、书籍，在此谨对原作者表示衷心的感谢．

本书的编写虽然经过很大的努力，但由于编者水平有限及时间仓促，书中不妥之处在所难免，恳请读者、教师和专家多提宝贵意见．

编　者

目　　录

职 业 模 块

拓 展 模 块

基础模块

第一章　集　　合

观察:

(1) 某学校一年级（一）班的所有学生组成一个班集体;

(2) 小明和他的父亲、母亲组成一个家庭;

(3) 我国参加第27届奥运会的运动员、教练、领队和工作人员组成中国体育代表团;

(4) 小于10的所有自然数;

(5) 不等式$3x-2\geqslant 0$的所有解.

上述例子都涉及一些确定的对象，现实生活中常常会遇到由一些确定对象组成的整体，通常我们用“集合”这个词来表达它.

我们在初中数学中，已经接触过“集合”一词. 在初中代数里学习数的分类时，就用到“正数的集合”，“负数的集合”等. 本章就专门介绍“集合”这个概念.

第一节　集合的概念

一、集合与元素的概念

一般地，某些确定的对象合在一起就成为一个**集合**，简称**集**，其中每一个对象称为这个集合中的**元素**. 例如，“我校排球队的队员”组成一个集合，我校每一个排球队员都是这个集合中的元素，又如“太平洋，大西洋，印度洋，北冰洋”也组成一个集合，太平洋、大西洋、印度洋、北冰洋都是这个集合中的元素.

我们一般用大写英文字母A，B，C，…来表示集合；用小写英文字母a，b，c，…来表示集合中的元素. 如果a是集合A中的元素，称a属于A，并记作

$$a\in A$$

如果a不是集合A中的元素，称a不属于A，并记作

$$a\notin A$$

例如，用A表示由“太平洋，大西洋，印度洋，北冰洋”组成的集合，用a，b，c，d，e分别表示太平洋、大西洋、印度洋、北冰洋、黄河. 显然$c\in A$，但$e\notin A$. 也就是说，太平洋、大西洋、印度洋、北冰洋都是集合A中的元素，而黄河不是集合A中的元素.

注意，集合中的元素必须是确定的. 这就是说，给定一个集合，任何一个对象是不是这个集合的元素也就确定了. 例如，给出集合“地球上的四大洋”，它只有太平洋、大西洋、印度洋、北冰洋四个元素，其他对象都不是它的元素. 集合中的元素是互异的. 这就是说，集合中的元素是没有重复现象的，任何两个相同的对象在同一个集合中时，只能算作这个集合的一个元素. 例如，小王所在的一年级（一）班花名册上每位同学的名字只写一次.

集合中的元素又是无序的，即不必考虑元素的前后顺序. 例如，由父亲、母亲、小明组成的集合与小明、母亲、父亲组成的集合是同一个集合.

二、常用的数集及其记法

我们先来复习一下实数的分类:

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left.\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\right\}\begin{matrix}\text{有限小数或者}\\ \text{无限循环小数}\end{matrix}\\ \text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

对于一些常用的数集，我们通常用相对固定的大写英文字母来表示.

全体非负整数的集合通常简称为**非负整数集**（或自然数集），记作 $\mathbf{N}$. 非负整数集内排除 0 的集合，也称为**正整数集**，表示成 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$.

全体整数的集合通常简称为**整数集**，记作 $\mathbf{Z}$.

全体有理数的集合通常简称为**有理数集**，记作 $\mathbf{Q}$.

全体实数的集合通常简称为**实数集**，记作 $\mathbf{R}$.

例 1 用符号“$\in$”或“$\notin$”填空.

-3 ______ $\mathbf{N}$;　　0.5 ______ $\mathbf{Z}$;　　4 ______ $\mathbf{N}$;

-0.2 ______ $\mathbf{Q}$;　　-6 ______ $\mathbf{Z}$;　　π ______ $\mathbf{R}$;

$\frac{3}{2}$ ______ $\mathbf{Z}$;　　3.14 ______ $\mathbf{Q}$;　　0 ______ $\mathbf{N}$.

解 $-3\notin\mathbf{N}$; $0.5\notin\mathbf{Z}$; $4\in\mathbf{N}$; $-0.2\in\mathbf{Q}$; $-6\in\mathbf{Z}$; $\pi\in\mathbf{R}$; $\frac{3}{2}\notin\mathbf{Z}$; $3.14\in\mathbf{Q}$; $0\in\mathbf{N}$

三、集合的表示方法

集合有多种表示方法，下面介绍两种常用的表示方法.

1. 列举法

这种方法是把集合中的所有元素一一列举出来，放在一个花括号“{ }”内，元素之间用逗号隔开.

例如，集合“地球上的四大洋”可表示为{太平洋，大西洋，印度洋，北冰洋}.

再如，集合 A 含有 8 个元素，它们分别是 2，3，5，7，11，13，17，19. 用列举法可以把集合 A 表示成

$$A=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$$

易见，$5\in A$，但 $6\notin A$.

例 2 用列举法表示下列集合：

（1）由方程 $x^2-1=0$ 的所有的解组成的集合；

（2）由不大于 5 的自然数组成的集合；

（3）大于 -3 且小于 11 的全体偶数；

（4）方程 $x^2-5x-6=0$ 的所有实数解.

解 （1）可以表示为 $\{-1, 1\}$；（2）可以表示为 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$；（3）可以表示为 $\{-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$；（4）可以表示为 $\{-1, 6\}$.

一般地，含有有限个元素的集合叫做**有限集**，含有无限个元素的集合叫做**无限集**. 当集合中的元素很多或元素的个数无限时，在不发生误解的情况下，可以采用省略的写法. 例如，小于 100 的自然数集可以表示为 $\{0, 1, 2, \cdots, 99\}$，正偶数集可以表示为 $\{2, 4, 6, \cdots,$

$2n$，…}，$(n\in\mathbf{N}^*)$．

分析一下引例中所举的例子，哪些是有限集，哪些是无限集？

此外，为了讨论问题的方便，我们把不含任何元素的集合叫做空集，记作$\varnothing$.

例如：方程 $x^2+1=0$ 的所有实数根组成的集合是空集；由大于 2 并且小于 3 的自然数组成的集合也是空集．

2. 描述法

这种方法是用某一个小写的英文字母来统一表示这个集合中的元素，并指出这类元素的共同特征．如

$$B=\{x \mid x\text{是质数},x<20\}$$

这就是说，集合 B 中的元素都是质数，并且小于 20；或者简单地说，B 是由小于 20 的质数组成．事实上，集合 B 中的元素就是 2，3，5，7，11，13，17，19. 可见集合 B 和列举法中所提到的集合 A 的元素完全相同．

例 3　用描述法表示下列集合：

（1）不等式 $x+3>5$ 的解集；

（2）所有直角三角形的集合；

（3）由方程 $x^2+1=0$ 的所有实数解组成的集合；

（4）所有正奇数组成的集合．

解　（1）可以表示为$\{x \mid x+3>5\}$；（2）可以表示为 $\{x \mid x\text{是直角三角形}\}$；（3）可以表示为$\{x \mid x^2+1=0\}$；（4）可以表示为$\{x \mid x=2n+1,n\in\mathbf{N}\}$.

描述法的特点是适用范围广，列举法的特点是元素清晰明了．在表示集合时应当根据具体的集合，选择合适的方法．后面我们还可看到，用区间也能方便地表示集合．

四、子集

在集合与集合之间，存在着“包含”与“相等”的关系．

先看集合与集合之间的“包含”关系．

设
$$A=\{1,2,3\},\ B=\{1,2,3,4,5\}$$
集合 A 是集合 B 的一部分，我们就说集合 B 包含集合 A.

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，我们就说集合 A 包含于集合 B，或集合 B 包含集合 A，记作

$$A\subseteq B(\text{或 } B\supseteq A)$$

这时我们也说集合 A 是集合 B 的**子集**．

当集合 A 不包含于集合 B，或集合 B 不包含集合 A 时，则记作

$$A\not\subseteq B(\text{或 } B\not\supseteq A)$$

我们规定：空集是任何集合的子集．也就是说，对于任何一个集合 A，有

$$\varnothing\subseteq A$$

再看集合与集合之间的“相等”关系．

设
$$A=\{x|x^2-1=0\},\ B=\{-1,1\}$$
集合 A 与集合 B 的元素是相同的，我们就说集合 A 等于集合 B.

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，同时集合

B 的任何一个元素都是集合 A 的元素，我们就说集合 A 等于集合 B，记作

$$A=B$$

由集合的“包含”与“相等”的关系，可以得出下面的结论：

（1）对于任何一个集合 A，因为它的任何一个元素都属于集合 A 本身，所以

$$A\subseteq A$$

也就是说，任何一个集合都是它本身的子集.

我们常常涉及“真正的子集”的问题．对于两个集合 A 和 B，如果 $A\subseteq B$，并且 $A\neq B$，我们就说集合 A 是集合 B 的**真子集**，记作

$$A\subsetneqq B(\text{或 } B\supsetneqq A)$$

用图形表示如图 1-1 所示.

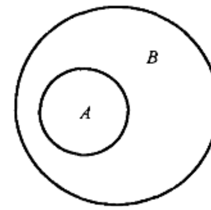


图 1-1

显然，空集是任何非空集合的真子集.

容易知道，对于集合 A，B，C，如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$. 事实上，设 x 是集合 A 的任意一个元素，因为 $A\subseteq B$，所以 $x\in B$，又因为 $B\subseteq C$，所以 $x\in C$，从而 $A\subseteq C$.

同样可知，对于集合 A，B，C，如果 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，那么 $A\subsetneqq C$.

（2）对于集合 A，B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么 $A=B$.

例 4 写出集合 $\{a, b\}$ 的所有的子集，并指出其中哪些是它的真子集.

解 集合 $\{a, b\}$ 的所有的子集是 $\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a, b\}$，其中 $\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$ 是 $\{a, b\}$ 的真子集.

例 5 解不等式 $x-3>2$，并把结果用集合表示.

解 解不等式得 $x>5$，所以原不等式的解集是 $\{x|x>5\}$.

五、全集与补集

看一个例子.

设集合 S 是全班同学的集合，集合 A 是班上所有参加校运动会的同学的集合，而集合 B 是班上所有没有参加校运动会的同学的集合，那么这三个集合有什么关系呢？容易看出，集合 B 就是集合 S 中除去集合 A 之后余下来的集合.

一般地，设一个集合 S，A 是 S 的一个子集（即 $A\subseteq S$），由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 S 中子集 A 的**补集**（或余集），记作 $\complement_S A$，即

$$\complement_S A=\{x|x\in S, \text{且 } x\notin A\}$$

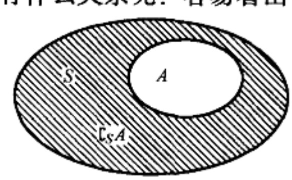


图 1-2

图 1-2 中的阴影部分表示 A 在 S 中的补集 $\complement_S A$.

例如，如果 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,3,5\}$，那么

$$\complement_S A=\{2,4,6\}$$

如果集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素，这个集合就可以看做一个全集，全集通常用 U 表示.

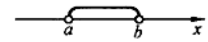
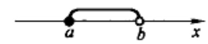
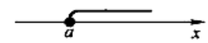
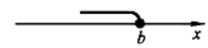
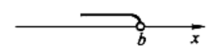
例如，在实数范围内讨论问题时，可以把实数集 $\mathbf{R}$ 看作全集 U，那么，有理数集 $\mathbf{Q}$ 的补集 $\complement_U\mathbf{Q}$ 是全体无理数的集合.

六、区间

介于两个实数之间的所有实数组成的集合叫做**区间**，这两个实数叫做区间的**端点**.

设 a，b 为任意两个实数，且 $a<b$，规定如表 1-1 所示。

表 1-1

不等式	集合	区间	图示
$a\leqslant x\leqslant b$	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	$[a,b]$（闭区间）	
$a<x<b$	$\{x\mid a<x<b\}$	(a,b)（开区间）	
$a<x\leqslant b$	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	$(a,b]$（左开区间）	
$a\leqslant x<b$	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	$[a,b)$（右开区间）	
$x\geqslant a$	$\{x\mid x\geqslant a\}$	$[a,+\infty)$	
$x>a$	$\{x\mid x>a\}$	$(a,+\infty)$	
$x\leqslant b$	$\{x\mid x\leqslant b\}$	$(-\infty,b]$	
$x<b$	$\{x\mid x<b\}$	$(-\infty,b)$	
$-\infty<x<+\infty$	**R**	$(-\infty,+\infty)$	

这里的“∞”是一个记号，它不是一个数，读作无穷大，“$-\infty$”读作负无穷大，“$+\infty$”读作正无穷大.

例 6 用区间表示下列变量的变化范围并在数轴上表示出来：

（1）$0\leqslant x\leqslant 4$；（2）$-3<x<3$；

（3）$2<x$；（4）$x<3$.

解 （1）不等式 $0\leqslant x\leqslant 4$ 可表示为 $[0,4]$，如图 1-3 所示.

（2）不等式 $-3<x<3$ 可表示为 $(-3,3)$，如图 1-4 所示.

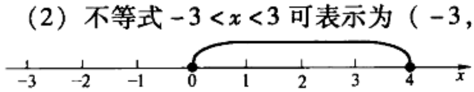


图 1-3

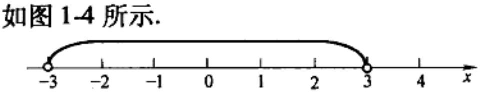


图 1-4

（3）不等式 $2<x$ 可表示为 $(2,+\infty)$，如图 1-5 所示.

（4）不等式 $x<3$ 可表示为 $(-\infty,3)$，如图 1-6 所示.

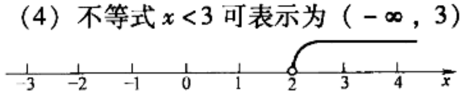


图 1-5

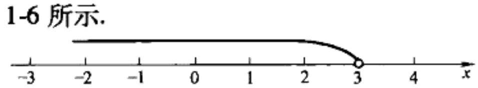


图 1-6

习题 1-1

1. 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空.

（1）1 ________ **N**，1 ________ **Z**，1 ________ **Q**，1 ________ **R**；

(2) 0 ________ $\mathbf{N}$, 0 ________ $\mathbf{Z}$, 0 ________ $\mathbf{Q}$, 0 ________ $\mathbf{R}$;

(3) -2 ________ $\mathbf{N}$, -2 ________ $\mathbf{Z}$, -2 ________ $\mathbf{Q}$, -2 ________ $\mathbf{R}$;

(4) 0.5 ________ $\mathbf{N}$, 0.5 ________ $\mathbf{Z}$, 0.5 ________ $\mathbf{Q}$, 0.5 ________ $\mathbf{R}$;

(5) $\sqrt{2}$________ $\mathbf{N}$, $\sqrt{2}$________ $\mathbf{Z}$, $\sqrt{2}$________ $\mathbf{Q}$, $\sqrt{2}$________ $\mathbf{R}$;

(6) 若 $C=\{x\in\mathbf{N}|1\leqslant x\leqslant 10\}$，则 8 ________ C;

(7) 若 $D=\{x\in\mathbf{Z}|-2<x<3\}$，则 1.5 ________ D.

2. 用适当的方法表示下列集合，然后说出它们是有限集还是无限集.

(1) 大于 10 的所有自然数组成的集合;

(2) 由 24 和 30 的所有公约数组成的集合;

(3) 我国古代四大发明的集合;

(4) 方程 $x^2-4=0$ 的实数解的集合;

(5) 不等式 $x^2+1<0$ 的实数解的集合;

(6) 小于 10 的所有质数组成的集合.

3. 把下列集合用另一种方法表示出来.

(1) $\{1, 5\}$;　　(2) $\{x|x-2=0\}$;

(3) $\{2, 4, 6, 8\}$;　　(4) $\{x\in\mathbf{N}|3<x<7\}$.

4. 用区间表示下列不等式，并在数轴上表示出来.

(1) $2\leqslant x\leqslant 4$;　　(2) $2<x\leqslant 4$;

(3) $0.5\leqslant x<1.5$;　　(4) $-3<x<3$;

(5) $-2\leqslant x$;　　(6) $x\leqslant 3$;

(7) $x<-1$;　　(8) $x>4$.

第二节　集合的运算

一、交集与并集

一般地，由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$（读作“A 交 B”），即

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

而由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$（读作“A 并 B”），即

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

例 1　设 $A=\{x|x>-2\}$，$B=\{x|x<3\}$，求 $A\cap B$.

解　$A\cap B=\{x|x>-2\}\cap\{x|x<3\}=\{x|-2<x<3\}$.

例 2　设 $A=\{x|x \text{ 是等腰三角形}\}$，$B=\{x|x \text{ 是直角三角形}\}$，求 $A\cap B$.

解　$A\cap B=\{x|x \text{ 是等腰三角形}\}\cap\{x|x \text{ 是直角三角形}\}$
$=\{x|x \text{ 是等腰直角三角形}\}$

例 3　设 $A=\{4,5,6,8\}$；$B=\{3,5,7,8\}$，求 $A\cup B$.

解　$A\cup B=\{4,5,6,8\}\cup\{3,5,7,8\}$
$=\{3,4,5,6,7,8\}$

注　集合中的元素是没有重复现象的，在两个集合的并集中，原来两个集合的公共元素只能出现一次，不能写成

$$A\cup B=\{3,4,5,5,6,7,8,8\}$$

例 4 设 $A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{x|1<x<3\}$，求 $A\cup B$.

解 $A\cup B=\{x|-1<x<2\}\cup\{x|1<x<3\}$

$=\{x|-1<x<3\}$

例 5 某服装店既卖成人服装也卖儿童服装．某天，100 位顾客买了成人服装，70 位顾客买了儿童服装，其中 25 位顾客既买了成人服装又买了儿童服装，试问：这一天来这个服装店买服装的顾客共有几位?

解 设$A=\{$这一天来这个服装店买成人服装的顾客$\}$

$B=\{$这一天来这个服装店买儿童服装的顾客$\}$

$C=\{$这一天来服装店买服装的顾客$\}$

则
$$C=A\cup B$$

$A\cap B=\{$这一天来这个服装店既买成人服装又买儿童服装的顾客$\}$

由于 25 位顾客既属于 A 又属于 B（即 $A\cap B$ 元素数目等于 25）.

因此 $A\cup B$ 元素数目等于 $100+70-25=145$.

即这一天来这个服装店买服装的顾客有 145 位.

二、交集与并集的性质

由交集定义容易知道，对于任何集合 A，B，有

$$A\cap A=A, A\cap\varnothing=\varnothing, A\cap B=B\cap A$$

由并集定义容易知道，对于任何集合 A，B，有

$$A\cup A=A, A\cup\varnothing=A, A\cup B=B\cup A$$

形如 $2n(n\in\mathbf{Z})$ 的整数叫做偶数，形如 $2n+1(n\in\mathbf{Z})$ 的整数叫做奇数．全体奇数的集合简称奇数集，全体偶数的集合简称偶数集．看下面的例子．

例 6 已知 A 为奇数集，B 为偶数集，$\mathbf{Z}$ 为整数集，求 $A\cap B$，$A\cap\mathbf{Z}$，$B\cap\mathbf{Z}$，$A\cup B$，$A\cup\mathbf{Z}$，$B\cup\mathbf{Z}$.

解

$$A\cap B=\{\text{奇数}\}\cap\{\text{偶数}\}=\varnothing$$
$$A\cap\mathbf{Z}=\{\text{奇数}\}\cap\mathbf{Z}=\{\text{奇数}\}=A$$
$$B\cap\mathbf{Z}=\{\text{偶数}\}\cap\mathbf{Z}=\{\text{偶数}\}=B$$
$$A\cup B=\{\text{奇数}\}\cup\{\text{偶数}\}=\mathbf{Z}$$
$$A\cup\mathbf{Z}=\{\text{奇数}\}\cup\mathbf{Z}=\mathbf{Z}$$
$$B\cup\mathbf{Z}=\{\text{偶数}\}\cup\mathbf{Z}=\mathbf{Z}$$

习题 1-2

1. 学校里开运动会，设 $A=\{x|x$ 是参加百米赛跑的同学$\}$，$B=\{x|x$ 是参加跳高比赛的同学$\}$，求 $A\cap B$.

2. 用适当的集合在表 1-2、表 1-3 中填空.

表 1-2

$\cup$	$\varnothing$	A	B
$\varnothing$			
A			
B			

表 1-3

$\cap$	$\varnothing$	A	B
$\varnothing$			
A			
B			

3. 设 $A=\{x|x$ 是平行四边形$\}$，$B=\{x|x$ 是矩形$\}$，求 $A\cup B$.

4. 设 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{b,d,f,g\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

5. 设 $S=\{x|x\leqslant 3\}$，$T=\{x|x<1\}$，求 $S\cap T$，$S\cup T$，并在数轴上表示出来.

6. 设 $A=\{x|-2<x\leqslant 1\}$，$B=\{x|1<x\leqslant 2\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

7. 某商店家电专柜出售电冰箱和洗衣机. 某天，有 8 位顾客买了电冰箱，6 位顾客买了洗衣机，其中有 3 位顾客既买了电冰箱又买了洗衣机. 试问：这一天，来这个商店买家电产品的顾客共有几位？

第三节　充分条件和必要条件

一般地，用 p 和 q 分别表示命题的条件和结论，命题就可以写成“若 p 则 q”的形式.

命题“若 p 则 q”为真，是指由 p 经过推理可以得出 q，也就是说，如果 p 成立，那么 q 一定成立，记作 $p\Rightarrow q$，或者 $q\Leftarrow p$. 如果由 p 推不出 q，则命题为假，记作 $p\nRightarrow q$.

例如，“若 $x>0$，则 $x^2>0$”是一个真命题，可写成

$$x>0\Rightarrow x^2>0$$

又如，“若两三角形全等，则两三角形的面积相等”是一个真命题，可写成

$$\text{两三角形全等}\Rightarrow\text{两三角形面积相等}$$

一般地，如果已知

$$p\Rightarrow q$$

那么我们说，p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

在上面的两个例子中，“$x>0$”是“$x^2>0$”的充分条件，“$x^2>0$”是“$x>0$”的必要条件；“两三角形全等”是“两三角形面积相等”的充分条件，“两三角形面积相等”是“两三角形全等”的必要条件.

例 1　指出命题 p：$x=y$；q：$x^2=y^2$ 中，p 是 q 的什么条件，q 是 p 的什么条件.

分析　可以根据“若 p 则 q”与“若 q 则 p”的真假进行判断.

解　由 $p\Rightarrow q$，即

$$x=y\Rightarrow x^2=y^2$$

知 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

一般地，如果既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，就记作 $p\Leftrightarrow q$. 这时，p 既是 q 的充分条件，又是 q 的必要条件，我们就说 p 是 q 的充分必要条件，简称**充要条件**.

例如，“x 是 6 的倍数”是“x 是 2 的倍数”的充分而不必要的条件；

“x 是 2 的倍数”是“x 是 6 的倍数”的必要而不充分的条件；

“x 既是 2 的倍数也是 3 的倍数”是“x 是 6 的倍数”的充要条件；

“x 是 4 的倍数”是“x 是 6 的倍数”的既不充分也不必要的条件.

例 2　指出下列各组命题中，p 是 q 的什么条件（在“充分而不必要条件”、“必要而不充分条件”、“充要条件”、“既不充分也不必要条件”中选出一种）？

（1）p：$(x-2)(x-3)=0$；q：$x-2=0$.

（2）p：同位角相等；q：两直线平行.

（3）p：$x=3$；q：$x^2=9$.

（4）p：四边形的对角线相等；q：四边形是平行四边形.

解　（1）$x-2=0\Rightarrow(x-2)(x-3)=0$，$(x-2)(x-3)=0\nRightarrow x-2=0$，所以 p 是 q 的必要

而不充分条件.

（2）同位角相等$\Leftrightarrow$两直线平行，所以 p 是 q 的充要条件.

（3）$x=3 \Rightarrow x^2=9$，$x^2=9 \nRightarrow x=3$，所以 p 是 q 的充分而不必要条件.

（4）四边形的对角线相等$\nRightarrow$四边形是平行四边形，四边形是平行四边形$\nRightarrow$四边形的对角线相等，所以 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

习题 1-3

1. 用充分条件、必要条件或充要条件填空.

（1）x 是自然数是 x 是整数的__________；

（2）x 是有理数是 x 是实数的__________；

（3）x 是实数是 x 是有理数的__________；

（4）$x^2-4=0$ 是 $x+2=0$ 的__________；

（5）两个三角形的三边对应相等，是两个三角形全等的__________.

2. 判断下列命题的真假.

（1）“$a>b$” 是 “$a^2>b^2$” 的充分条件；

（2）“$a>b$” 是 “$a^2>b^2$” 的必要条件；

（3）“$a>b$” 是 “$ac^2>bc^2$” 的充分条件；

（4）“$a>b$” 是 “$a+c>b+c$” 的充要条件.

第四节 应用举例

例 1 学校的商店进了两批货，第一批有毛巾、洗衣粉、纯净水、饮料和面包，共计五个品种. 第二批有牙膏、方便面、茶叶和洗洁净，共计四个品种. 试用列举法分别写出两批进货品种组成的集合.

解 设第一、二批进货品种组成的集合分别用 A、B 表示，则

$A=\{$毛巾,洗衣粉,纯净水,饮料,面包$\}$；

$B=\{$牙膏,方便面,茶叶,洗洁净$\}$.

例 2 后面第四章，我们将要学习正弦函数，从图 1-7 中看到，在 $(0, 2\pi)$ 的一个周期间隔中，其图像的变化趋势均不同，这种变化趋势我们用“单调性”来描述，学习了区间的概念，我们就可以这样来描述它的单调性：

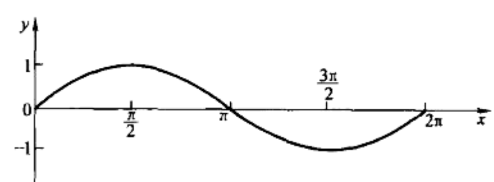


图 1-7

$y=\sin x$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$、$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ 内单调增加，在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少.

例 3 在第 26、27 届奥运会上夺得金牌的中国乒乓球运动员组成的集合分别为：

$A=\{$邓亚萍，乔红，刘国梁，孔令辉$\}$

$B=\{$王楠，李菊，孔令辉，王励勤，阎森$\}$

那么，由所有在第 26 届或者第 27 届奥运会上夺得金牌的中国乒乓球运动员组成的集合是

$C=\{$邓亚萍，乔红，刘国梁，孔令辉，王楠，李菊，王励勤，阎森$\}$，显然这个集合是 A 与 B 的并集.

例4 设 S_1 表示某校全体学生的集合，S_2 表示该校全体男生的集合，S_3 表示该校全体女生的集合，S_4 表示该校全体教工的集合．求：

（1）S_1、S_2、S_3、S_4 中哪两个集合相交？

（2）$S_2 \cup S_3$；

（3）$S_1 \cup S_4$；

解 （1）$S_1 \cap S_2 = S_2$，$S_1 \cap S_3 = S_3$；

（2）$S_2 \cup S_3 = S_1$；

（3）$S_1 \cup S_4 = \{$该校全体学生和教工$\}$.

内容提要与复习题

一、内容提要

1. 集合的基本概念

(1) 把一些确定的对象看成是一个整体就形成一个集合；

(2) 集合与元素的关系：$\in$ 或 $\notin$；

(3) 集合的特征：元素是确定的、互异的和无序的；

(4) 集合的表示法：列举法、描述法和图示法；

(5) 集合的运算：子、交、并、补运算及性质．

2. 充要条件

(1) 如果 p，则 q. 记作 $p \Rightarrow q$，称 p 是 q 的充分条件或 q 是 p 的必要条件；

(2) 如果 $p \Rightarrow q$，且 $q \Rightarrow p$，称 p 是 q 的充分且必要条件，简称充要条件，记作 $p \Leftrightarrow q$（也可称 q 是 p 的充要条件）．

二、复习题

1. 填空题

(1) 集合 {平方后等于自身的数} 用列举法表示为__________；

(2) $\{-3, -1, 1, 3, 5\}$ 用描述法表示为__________；

(3) $A = \{0,1,2,3\}$ 从 A 中任取两个元素相乘，其积组成集合 B，则 B 的所有子集的个数是__________；

(4) 用适当的符号（$\subseteq$，$\supseteq$，$=$）填空：$A \cup B$ ____ A，$A \cup B$ ____ B，$A \cap B$ ____ $A \cup B$，$A \cup B$ ____ $B \cup A$.

(5) $U = \{x \mid -2 < x < 6, x \in \mathbf{Z}\}$，$M = \{x \mid 0 < x < 4, x \in \mathbf{Z}\}$，则 $\complement_U M =$________________.

2. 选择题.

(1) $M = \{a\}$，则下列写法正确的是（　　）

A. $a = M$　　B. $a \in M$　　C. $\varnothing \in M$　　D. $a \subset M$

(2) $N = \{a, b, c\}$，则 N 的不含元素 b 的非空子集为（　　）

A. $\{a\}$，$\{c\}$　　B. $\{a, c\}$　　C. $\{a\}$，$\{a, c\}$　　D. $\{a\}$，$\{c\}$，$\{a, c\}$

(3) 方程组 $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - 4y = -8 \end{cases}$ 的解集是（　　）

A. $\{2, 3\}$　　B. $\{x = 2, y = 3\}$　　C. $\{(2,3)\}$　　D. $\{(3,2)\}$

(4) $U = \{$三角形$\}$，$M = \{$锐角三角形$\}$，$N = \{$直角三角形$\}$，则 $\complement_U(M \cup N)$ 是（　　）

A. {锐角三角形}　　B. {直角三角形}　　C. {钝角三角形}　　D. {三角形}

(5) $A = \varnothing$，则 $A \cap B = \varnothing$，可称 $A \cap B = \varnothing$ 是 $A = \varnothing$ 的（　　）

A. 充分条件　　B. 必要条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$，$C = \{$小于 11 的自然数$\}$，$T = \{2, 4, 6, 8\}$．

(1) 求 $A \cap T$，$A \cup B$；

（2）问 $A\cup B$ 与 C 是否相等？

4. 一个班的学生有 40 人，参加无线电小组的有 10 人，参加音乐小组的有 8 人，两个小组都没有参加的有 24 人，问既参加无线电小组又参加音乐小组的有几人？

5. 在下列各题中 $p(x)$ 是 $q(x)$ 的什么条件？

（1）$p(x):x^2-3x+2=0, q(x):x=1$；

（2）$p(x):a-b=0, q(x):a^2-b^2=0$；

（3）$p(x):x^2+y^2=0, q(x):x=0$ 且 $y=0(x,y\in\mathbf{R})$.

第二章　不　等　式

在实际生活中，我们常常看到同类量之间具有一种不等关系．比如说，图 2-1 的两个图中的天平都不平衡，这说明天平两边所放物体的质量不相等（右盘中每个砝码的质量都是 1g）．

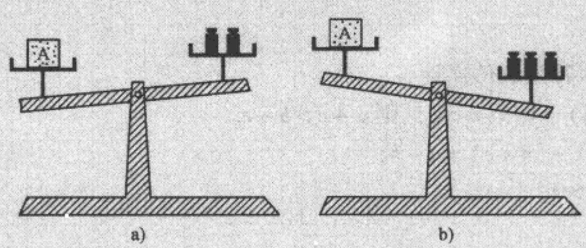


图 2-1

从图 a 可以看出，物体 A 的质量大于 2g；从图 b 可以看出，物体 A 的质量小于 3g. 如果设物体 A 的质量是 xg，则 x 的取值使不等式 $x>2$ 与 $x<3$ 都成立．

第一节　不等式的基本性质

定义　对于实数 a、b，如果 $a-b>0$，那么称 a 大于 b（或者称 b 小于 a），记作 $a>b$（或记作 $b<a$）．

这个定义表明，对于任意实数 a、b，有

$$\begin{cases} a>b \Leftrightarrow a-b>0 \\ a<b \Leftrightarrow a-b<0 \\ a=b \Leftrightarrow a-b=0 \end{cases}$$

于是，为了比较实数 a、b 的大小，只需考虑它们的差是大于零，还是小于零或者等于零．

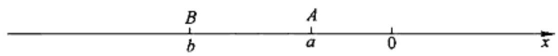


图 2-2

由此得出，数轴上右边的点表示的实数比左边的点表示的实数大．如图 2-2 所示，点 A、B 分别表示实数 a、b，点 A 在点 B 的右边，则 $a-b>0$，从而 $a>b$.

例 1　比较 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{5}{7}$ 的大小．

解　$\frac{3}{4}-\frac{5}{7}=\frac{21-20}{28}=\frac{1}{28}>0$，因此，$\frac{3}{4}>\frac{5}{7}$.