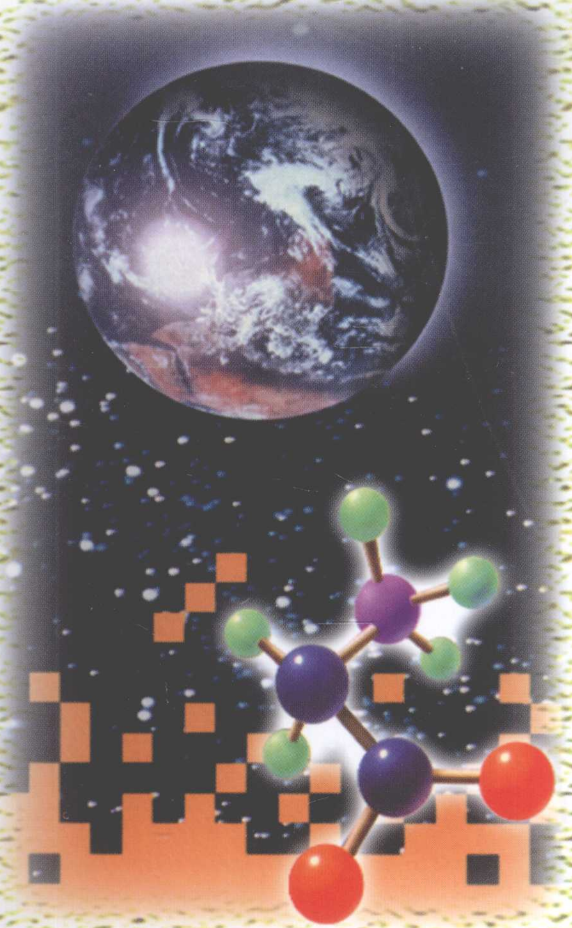
中国科学院研究生教学丛书



高等概率论

胡晓予　著

科学出版社
www.sciencep.com

中国科学院研究生教学丛书

高 等 概 率 论

胡晓予　著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书由三部分内容组成. 第一部分是测度论基础(第 1~3 章). 主要介绍测度的扩张定理和分解定理, Lebesgue-Stieltjes 测度、可测函数及其积分的基本性质, 还有乘积可测空间和 Fubini 定理等. 第二部分是第 4~6 章. 主要介绍独立随机变量序列的极限定理, 包括中心极限定理、级数收敛定理、大数定律和重对数律. 在介绍中心极限定理之前, 介绍了测度的弱收敛、特征函数以及相关结论. 这部分内容突出了经典的概率论证明技巧. 第三部分为第 7、8 章, 介绍一些特殊的随机过程. 第 7 章介绍离散鞅论, 第 8 章简单介绍了马氏链、布朗运动和高斯自由场.

本书适合教学专业的研究生作为教材，亦可作为教师参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等概率论/胡晓予编著. —北京：科学出版社，2009
(中国科学院研究生教学丛书)
ISBN 978-7-03-025180-0

I. 高… II. 胡… III. 概率论–高等学校–教材 IV. O211

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第137553号

责任编辑：陈玉琢 / 责任校对：李奕萱
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：王 浩

科 学 出 版 社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社编务公司排版制作

科学出版社发行 各地新华书店经销
*

2009 年 9 月第 一 版 开本：B5 (720×1000)
2009 年 9 月第一次印刷 印张：11 1/4
印数：1—3 000 字数：218 000

定价：38.00 元
(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　　言

高等概率论是概率论与数理统计专业的研究生必修课之一，它是从事概率论与数理统计以及相关方向的研究所必需的数学基础.

本书系统介绍了测度论的基础知识、概率论的极限理论以及离散鞅论. 由于作者自 2004 年起至今一直在中国科学院研究生院教授 60 学时的高等概率论课程, 因此本书主要形成于作者的讲稿. 测度论部分的内容主要参考 R. Ash 的 *Real Analysis and Probability* 和 P. R. Halmos 的 *Measure Theory* 写成, 概率论的极限理论和离散鞅论的内容则主要参考 H. G. Tucker 的 *A Graduate Course in Probability*, L. Breiman 的 *Probability* 和 R. Ash 的 *Real Analysis and Probability* 写成. 随机过程选讲中的高斯自由场的内容则来自于作者近年的研究工作.

素来知道著书立说非等闲儿戏. 在写作过程中虽颤惊如履薄冰, 然学养不至登堂入室之地步, 终会有诸多不足. 最后, 感谢我的家人和我的学生们对我的支持和帮助.

胡晓予

2009 年于北京中关村

目录

第 1 章　测度与积分

1.1　符号与假定

本书中, $\mathbb{N}$ 表示全体自然数集, $\mathbb{Z}$ 表示全体整数集, $\mathbb{R}$ 表示全体实数集, $\mathbb{C}$ 表示全体复数集; $\mathbb{R}^+(\mathbb{R}^-)$ 表示全体非负(非正)实数集;$\bar{\mathbb{R}}$ 表示$\mathbb{R}$ 与$\{\pm\infty\}$ 构成的集合;$\mathbb{R}^n$ 表示n维欧几里得空间; $\bar{\mathbb{R}}^n$ 表示由全体点$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n), x_i \in \bar{\mathbb{R}}, 1 \leqslant i \leqslant n$ 构成的集合.

$\forall a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, 记$(a,b) = \{x \in \bar{\mathbb{R}} : a < x < b\}$, $[a,b) = \{x \in \bar{\mathbb{R}} : a \leqslant x < b\}$. 类似可定义$[a,b], (a,b]$. $\forall \boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_n)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_n) \in \bar{\mathbb{R}}^n$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \{\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \bar{\mathbb{R}}^n : u_i < x_i < v_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$. 类似地, 可在$\bar{\mathbb{R}}^n$ 中定义$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$和$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$.

采用下列$\bar{\mathbb{R}}$中的运算规则:

$$a + \infty = \infty + a = \infty, \quad a - \infty = -\infty + a = -\infty, \quad a \in \mathbb{R},$$

$$\infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty,$$

$$b \cdot \infty = \infty \cdot b = \begin{cases} \infty, & b \in \bar{\mathbb{R}}, b > 0, \\ -\infty, & b \in \bar{\mathbb{R}}, b < 0, \\ 0, & b = 0, \end{cases} \qquad \frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

对任意给定的$a, b \in \mathbb{R}$, $a \vee b$表示$\max\{a, b\}$, $a \wedge b$表示$\min\{a, b\}$.

设$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \Omega \to \mathbb{R}$, 定义$(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$, $(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$. 记$f^+ = f \vee 0$, $f^- = -(f \wedge 0)$.

设$f_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 若$f_n$单调上升且收敛于$f$, 则记为$f_n \uparrow f$; 若$f_n$单调下降且收敛于$f$, 则记为$f_n \downarrow f$.

设$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,若存在正常数$c_1$与$c_2$使$c_1 g(x) \leqslant f(x) \leqslant c_2 g(x)$, $x \geqslant x_0$(或$x \leqslant x_1$), 则记为 $f \approx g$, $x \to \infty$(或$x \to 0$). 若$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$(或$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$), 则记为 $f \sim g, x \to \infty$(或$x \to 0$).

设Ω是全空间. 用$\varnothing$表示空集. 任取子集A与B, $A \cup B$表示全体既在A内又在B内的元素构成的集合, $A \cap B$表示全体同时属于A与B的元素构成的集合, $A - B$表示全体属于A但不属于B的元素构成的集合. 定义

$$A \vartriangle B = (A - B) \cup (B - A),$$

并称之为A与B的对称差. 若A是B的子集, 则记作$A \subset B$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall A \subset \mathbb{R}$, 定义$A + x = x + A = \{y : y = x + a, a \in A\}$, $A - y = A + (-y)$, $x \cdot A = \{y : y = xa, a \in A\}$.

若$f:\Omega\to\Omega'$, $\forall A\subset\Omega'$, 定义$f^{-1}(A):=\{y:f(y)\in A\}$. 当上述$\Omega'=\mathbb{R}$时, 以$\inf\limits_{x\in A}f(x)$ 和$\sup\limits_{x\in A}f(x)$ 分别记$f(x),x\in A$的下确界与上确界, 其中$A\subset\mathbb{R}$.

定义1.1.1 称集合S上的一个关系"$\leqslant$"为偏序, 如果

(1) $\forall a\in S, a\leqslant a$;

(2) $\forall a,b\in S$, 若$a\leqslant b$且$b\leqslant a$, 则$a=b$;

(3) $\forall a,b,c\in S$, 若$a\leqslant b,b\leqslant c$, 则$a=c$.

设$C\subset S,\forall a,b\in C$, a与b的关系是$a\leqslant b$或者$b\leqslant a$, 则称C是全序的. S的全序子集称为S的链.

引理1.1.1(Zorn引理) 设S中有偏序"$\leqslant$". 若S中每个链均有上界, 则S有最大元, 即存在$m\in S$, 使得对任一$a\in S$, $m\leqslant a$与$m\neq a$不能同时成立.

1.2 集族与测度

本节首先介绍几个特殊的集合族及它们之间的关系, 然后引进测度的概念并介绍它的基本性质.

设Ω是全空间, $A_1,A_2,\cdots$是Ω的一列子集. 若$A_1\subset A_2\subset\cdots$且$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A$, 则称$A_n$是单调上升的集合序列且收敛于$A$; 若$A_1\supset A_2\supset\cdots$且$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A$, 则称$A_n$是单调下降的集合序列且收敛于$A$; 分别记为$A_n\uparrow A$和$A_n\downarrow A$. 定义

$$\limsup_n A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,\quad \liminf_n A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,$$

若 $\liminf\limits_n A_n=\limsup\limits_n A_n=A$, 则记 $A=\lim\limits_n A_n$.

定义1.2.1 称一个非空集族$\mathcal{A}$为环, 如果$\forall E,F\in\mathcal{A}$, 总有$E\cup F\in\mathcal{A}$且$E-F\in\mathcal{A}$. 若$\mathcal{A}$还满足对$E_i\in\mathcal{A},i=1,\cdots$, 有$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathcal{A}$, 则称$\mathcal{A}$为一个$\sigma$环.

注1.2.1 空集$\varnothing$在环内. 环对集合的有限交运算亦封闭. σ环对集合的可数无穷交运算封闭.

定义1.2.2 称一个非空集族$\mathcal{F}$为代数, 如果$\forall A,B\in\mathcal{F}$, 总有$A\cup B\in\mathcal{F}$且$A^c\in\mathcal{F}$. 若$\mathcal{F}$ 还满足: $\forall E_i\in\mathcal{F},i=1,2,\cdots$, 有$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathcal{F}$, 则称$\mathcal{F}$为一个$\sigma$代数.

注1.2.2 全空间与空集均在代数内. 代数对集合的有限交运算封闭, σ 代数对集合的可数无穷交运算封闭.

注1.2.3 代数$\mathcal{F}$ 是σ代数的充要条件是:对于$\mathcal{F}$中的任一单调上升序列E_n, 总有 $\lim\limits_n E_n\in\mathcal{F}$.

注1.2.4 环(σ环)$\mathcal{A}$是代数(σ 代数)当且仅当全空间$\Omega\in\mathcal{A}$.

设 $\mathcal{E}$是Ω上的一个集族, A是一个子集. 定义$A\cap\mathcal{E}=\mathcal{E}\cap A=\{A\cap E: E\in\mathcal{E}\}$. 记 $S(\mathcal{E})$为包含 $\mathcal{E}$的最小σ环, 也称它为由$\mathcal{E}$生成的σ环; 记 $\sigma(\mathcal{E})$为包含$\mathcal{E}$的最小σ代数, 也称它为由$\mathcal{E}$生成的σ代数.

定理1.2.1 设$\mathcal{E}$是Ω上的一个集族, $A\subset\Omega$, 则

$$A\cap S(\mathcal{E})=S(A\cap\mathcal{E}).$$

证明 易见$A\cap S(\mathcal{E})$ 是一个σ 环, 而$A\cap\mathcal{E}\subset S(\mathcal{E})\cap A$, 故$S(A\cap\mathcal{E})\subset A\cap S(\mathcal{E})$.

另一方面, 令$\mathcal{B}=\{B\in S(\mathcal{E}): A\cap B\in S(A\cap\mathcal{E})\}$. 由$\mathcal{B}$ 的定义知, $\mathcal{E}\subset\mathcal{B}$ 且$\mathcal{B}$是一个σ环, 故$S(\mathcal{E})\subset\mathcal{B}$, 此即$A\cap S(\mathcal{E})\subset S(A\cap\mathcal{E})$.

注1.2.5 若A是Ω上的一个子集, $\mathcal{F}$是Ω上的任一集族, 类似可证

$$\sigma_A(\mathcal{F}\cap A)=\sigma(\mathcal{F})\cap A,$$

其中$\sigma_A(\mathcal{F}\cap A)$ 表示$\mathcal{F}\cap A$ 在子集A上生成的σ代数.

定义1.2.3 设$\mathcal{M}$是Ω上的一个非空集族, $A_n\in\mathcal{M}$, 若$A_n\uparrow A$, 则$A\in\mathcal{M}$, 若$A_n\downarrow A$, 亦有$A\in\mathcal{M}$, 此时称$\mathcal{M}$为一个单调族.

注1.2.6 σ环、σ代数均为单调族.

若 $\mathcal{A}$是Ω上的一个集族, 以$M(\mathcal{A})$ 表示包含$\mathcal{A}$的最小单调族.

定理1.2.2(单调族定理) 设 $\mathcal{F}_0$ 是Ω上的一个代数, 则

$$\sigma(\mathcal{F}_0)=M(\mathcal{F}_0).$$

证明 记 $\mathcal{F}=\sigma(\mathcal{F}_0),\mathcal{M}=M(\mathcal{F}_0)$.

由于σ代数总是单调族, 所以$\mathcal{M}\subset\mathcal{F}_0$.

反之, 令$\mathcal{M}_F=\{E: E-F,F-E,E\cup F\in\mathcal{M}\}$, 易见对Ω 的任意子集E,F, $E\in\mathcal{M}_F$ 等价于$F\in\mathcal{M}_E$.

现设E_n是$\mathcal{M}_F$中有一个单调序列, 则有

$$\lim_n E_n-F=\lim_n(E_n-F)\in\mathcal{M},$$
$$F-\lim_n E_n=\lim_n(F-E_n)\in\mathcal{M},$$
$$F\cup\lim_n E_n=\lim_n(F\cup E_n)\in\mathcal{M},$$

因此当$\mathcal{M}_F$非空时, 它总是单调族.

$\forall E_0,F\in\mathcal{F}_0$, 由代数的定义, $E_0\in\mathcal{M}_F$, 又由E_0的任意性, 得$\mathcal{F}_0\subset\mathcal{M}_F$, 从而$\mathcal{M}\subset\mathcal{M}_F$, 因此对任意的$E\in\mathcal{M}$和$F\in\mathcal{F}_0$, 有$E\in\mathcal{M}_F$, 这意味着$F\in\mathcal{M}_E$, 但F是$\mathcal{F}_0$中任一元, 故$\mathcal{M}\subset\mathcal{M}_E$, 由于$E$是$\mathcal{M}$中任一元, 上述包含关系说明$\mathcal{M}$对集合的有限并及减法运算封闭, 所以$\mathcal{M}$是一个代数. 又$\mathcal{M}$是单调族, 故$\mathcal{M}$是包含$\mathcal{F}_0$的一个$\sigma$代数. 总之, $\mathcal{F}\subset\mathcal{M}$.

注1.2.7 若$\mathcal{F}_0$是环, 同样地, $S(\mathcal{F}_0)=M(\mathcal{F}_0)$.

例1.2.1 取$\Omega=\mathbb{R}$, 设$\mathcal{F}_0$为全体不相交的左开右闭区间的有限并构成的集族($\mathbb{R}$上的左开右闭区间定义为: $(a,b], -\infty\leqslant a\leqslant b<\infty, (c,\infty), -\infty\leqslant c<\infty$), 则$\mathcal{F}_0$为一个代数. 但$\mathcal{F}_0$不是一个$\sigma$代数, 因为$A_n=(0,1-1/n)\in\mathcal{F}_0$, 但$\bigcup\limits_n A_n=(0,1)\notin\mathcal{F}_0$. 以$\mathcal{B}(\mathbb{R})$记由上述$\mathcal{F}_0$生成的$\sigma$代数, 称之为Borel σ 代数, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$中集合称为$\mathbb{R}$ 上的Borel集. 若$\Omega=\bar{\mathbb{R}}$, $\bar{\mathbb{R}}$中的左开右闭区间定义为$(a,b], -\infty\leqslant a\leqslant b\leqslant\infty, [-\infty,c], -\leqslant c\leqslant\infty)$, 以$\mathcal{F}_0$ 记全体不相交的左开右闭区间的有限并构成的集族, 以$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ 记由$\bar{\mathcal{F}}_0$ 生成的$\bar{\mathbb{R}}$ 上的σ代数, 并称之为$\bar{\mathbb{R}}$上的Borel σ代数.

定义1.2.4 设$\mathcal{F}$ 是Ω上的一个代数, $\mu:\mathcal{F}\to\bar{\mathbb{R}}$ 为一个集函数, 若$\mu(\varnothing)=0$且当$A_i\in\mathcal{F}$, $i\in I$, I是$\mathbb{N}$的有限子集时, $\mu\left(\bigcup\limits_{i\in I}A_i\right)=\sum\limits_{i\in I}\mu(A_i)$, 则称$\mu$ 是有限可加集函数; 若$A_i\in\mathcal{F}$, $i=1,2,\cdots$, $\mu\left(\bigcup\limits_i A_i\right)=\sum\limits_i\mu(A_i)$, 其中$\bigcup\limits_i A_i\in\mathcal{F}$, 则称$\mu$是一个可数可加集函数; 若$\mu$是非负的可数可加集函数, 则称$\mu$ 为一个测度. 特别地, 若$\mu(\Omega)=1$, 则称μ是一个概率测度. 若$\mathcal{F}$是Ω 上的一个σ代数, μ 是$\mathcal{F}$ 上的一个测度, 称$(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一个测度空间, 若μ 为概率测度, 则称之为概率空间.

例1.2.2 取Ω 为任意集合, 令$\mathcal{F}$ 由Ω的一切子集构成, $\forall A\in\mathcal{F}$. 若A中有n个元素,则定义$\mu(A)=n$, 若A中有无穷多个元素, 则定义$\mu(A)=\infty$, μ 是$\mathcal{F}$ 上的一个测度, 称为计数测度. 若$\Omega=\{x_1,x_2,\cdots\}$, $\mathcal{F}$ 仍由Ω 的一切子集构成, 取 $p_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots$且$\sum\limits_i p_i=1$, 定义 $\mu(A)=\sum\limits_{x_i\in A}p_i$, 则 μ 是$\mathcal{F}$ 上一个概率测度.

定理1.2.3 设μ 是代数$\mathcal{F}$ 上的有限可加集函数, 则

(a) $\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B)=\mu(A)+\mu(B), \forall A,B\in\mathcal{F}$;

(b) $\forall A,B\in\mathcal{F}, B\subset A$, 则$\mu(A)=\mu(B)+\mu(A+B)$;

(c) 若μ 非负, 则$\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^n A_i\right)\leqslant\sum\limits_{i=1}^n\mu(A_i)$, $A_1,\cdots,A_n\in\mathcal{F}$.

证明 请读者自己证明.

定理1.2.4 设μ 是σ 代数$\mathcal{F}$上的一个可数可加集函数.

(a) 若$A_n\in\mathcal{F}, n\geqslant 1$且$A_n\uparrow A$, 则$\mu(A_n)\to\mu(A)$, 当$n\to\infty$时;

(b) 若$A_n\in\mathcal{F}, n\geqslant 1, A_n\downarrow A$ 且$\mu(A_1)$ 有限, 则$\mu(A_n)\to\mu(A)$, 当$n\to\infty$时.

证明 (a) 若存在n_0 使$\mu(A_{n_0})=\infty$, 则对任意的$k>n_0$,总有

$$\mu(A_k)=\mu(A_{n_0})+\mu(A_k-A_{n_0})=\infty,\quad \mu(A)=\mu(A_{n_0})+\mu(A-A_{n_0})=\infty,$$

此时(a)成立. 类似地, 若存在n_0 使$\mu(A_{n_0})=-\infty$, (a)亦真. 现设$|\mu(A_n)|<\infty, n\geqslant 1$. 注意

$$A=A_1\cup(A_2-A_1)\cup(A_3-A_2)\cup\cdots\cup(A_n-A_{n-1})\cup\cdots,$$

故由可数可加性得

$$\mu(A)=\mu(A_1)+\sum_{n\geqslant 1}\mu(A_{n+1}-A_n)=\lim_n \mu(A_n).$$

(a) 得证.

(b)因为$A_n\downarrow A$, 故$(A_1-A_n)\uparrow(A_1-A)$, 由(a) 及$\mu(A_1)$ 的有限性立得(b).

注1.2.8 性质(a)称为可数可加集函数的下连续性, 性质(b)则称为上连续性(不必加条件$\mu(A_1)$有限).

定理1.2.5 设μ是代数$\mathcal{F}$上的有限可加集函数.

(a) 若 μ在每个$A\in\mathcal{F}$是下连续的, 那么 μ在$\mathcal{F}$上是可数可加的;

(b) 设 μ在空集是上连续的, 那么 μ在$\mathcal{F}$上是可数可加的.

证明 (a) 设$A_n, n\geqslant 1$是$\mathcal{F}$ 中的一个两两不交的集合序列且$A=\bigcup\limits_n A_n\in\mathcal{F}$. 令$B_n=\bigcup\limits_{i=1}^n A_i$, 则$B_n\uparrow A$. 由假设$\mu(B_n)\to\mu(A)$, 但$\mu(B_n)=\sum\limits_{i=1}^n\mu(A_i)\to\sum\limits_{i=1}^\infty\mu(A_i)$. (a)得证.

(b) 设$A_n, n\geqslant 1$满足(a)中的条件. B_n, A如(a)所定义. 根据定理1.2.3,有$\mu(A)=\mu(B_n)+\mu(A-B_n)$, 但$A-B_n\downarrow\varnothing$, 故由假设, $\mu(A-B_n)\downarrow\varnothing$,于是$\mu(B_n)=\sum\limits_{i=1}^n\mu(A_i)\to\mu(A)$. (b)得证. 定理证毕.

1.3 测度的扩张

本节主要介绍Carathéodory的测度扩张定理, 其证明步骤主要依据文献[1].

考虑$\mathbb{R}$的一个左开右闭区间A, 其左端点为a, 右端点为b, $a\leqslant b$, 定义$\mu(A)=b-a$. μ可以扩张到由全体互不相交的左开右闭区间的有限并构成的集族$\mathcal{F}_0$上: $\mu(A)=\sum\limits_{i=1}^n\mu(A_i), A\in\mathcal{F}_n$, $A_1,\cdots,A_n$是互不相交的$\mathbb{R}$中的左开右闭区间. 我们知道, $\mathcal{F}_0$ 是代数, 但不是σ代数. 是否存在$\sigma(\mathcal{F}_0)$ 上的一个测度μ^*满足$\mu^*(A)=\mu(A), A\in\mathcal{F}_0$? 根据将要证明的测度扩张定理, 答案是肯定的.

引理1.3.1 设 $\mathcal{F}_0$是Ω上的一个代数, P是$\mathcal{F}_0$ 上的一个概率测度. 若$A_i, A_i'\in\mathcal{F}_0, i=1,2,\cdots$且$A_i\uparrow A, A_i'\uparrow A', A\subset A'$, 则

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)\leqslant\lim_{n\to\infty}P(A_n').$$

证明 固定$m, A_m\cap A_n'\uparrow A_m\cap A'=A_m, n\to\infty$. 因此据定理1.2.4,

$$\lim_{n\to\infty}P(A_m\cap A_n')=P(A_m).$$

但$P(A_m\cap A_m')\leqslant P(A_n')$, 故

$$P(A_m)=\lim_{n\to\infty}P(A_m\cap A_n')\leqslant\lim_{n\to\infty}P(A_n').$$

在上式中令m趋向于正无穷大, 则可证得该引理.

引理1.3.2 设P是代数$\mathcal{F}_0$上的概率测度. $\mathcal{G}$是由$\mathcal{F}_0$ 中的单调上升序列的极限构成的集族. 定义μ如下:

若$A_n \in \mathcal{F}_0, A_n \uparrow A$, 则$\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$.

总有

(a) $\varnothing \in \mathcal{G}$ 且$\mu(\varnothing) = 0, \Omega \in \mathcal{G}$且$\mu(\Omega) = 1$, 对任意的$A \in \mathcal{G}$, $0 \leqslant \mu(A) \leqslant 1$;

(b) 任取G_1, $G_2 = \mathcal{G}$, 则$G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$且

$$\mu(G_1 \cup G_2) + \mu(G_1 \cap G_2) = \mu(G_1) + \mu(G_2);$$

(c) 若$G_1, G_2 \in \mathcal{G}$且$G_1 \subset G_2$, 则$\mu(G_1) \leqslant \mu(G_2)$;

(d) 若$G_n \in \mathcal{G}$, $n \geqslant 1$, $G_n \uparrow G$, 则$G \in \mathcal{G}$且$\mu(G_n) \to \mu(G)$.

证明 首先指出, μ的定义是有意义的且在$\mathcal{F}_0$上$\mu = P$.

(a) 由于μ在$\mathcal{F}_0$与P相等, 故(a)成立.

(b) 令$A_{n,1}$, $A_{n,2} \in \mathcal{F}_0$ 且$A_{n,i} \uparrow G_i$, $i = 1, 2$. 由于

$$P(A_{n,1} \cup A_{n,2}) + P(A_{n,1} \cap A_{n,2}) = P(A_{n,1}) + P(A_{n,2}),$$

故用μ的定义立得(b).

(c) 由引理1.3.1立得(c).

(d) 事实上, 对每个$G_n \in \mathcal{G}$ 总能找到$B_{n,m} \in \mathcal{F}_0$使$B_{n,m} \uparrow G_n$, 取$D_m = B_{1,m} \cup B_{2,m} \cup \cdots \cup B_{m,m}$, 则$D_m \in \mathcal{F}_0$ 且是单调上升的. 但

$$B_{n,m} \subset D_m \subset G_m, \quad n \leqslant m. \tag{1.3.1}$$

因此,

$$P(B_{n,m}) \leqslant P(D_m) \leqslant \mu(D_m) \leqslant \mu(D_m). \tag{1.3.2}$$

在式(1.3.1)中令$m \to \infty$, 则有$G_n \subset \bigcup\limits_m D_m \subset G$, 这意味着$D_m \uparrow G$, 故$G \in \mathcal{G}$且$\mu(G) = \lim\limits_{m\to\infty} P(D_m)$. 在式(1.3.2)中令$m \to \infty$, 则$\mu(G_n) \leqslant \lim\limits_{m\to\infty} P(D_m) \leqslant \lim\limits_{m\to\infty} \mu(G_m)$, 总之, $\mu(G) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(G_n)$. (d)得证.

现在将上述集函数μ扩张到Ω上全体子集构成的σ代数$\mathcal{E}$上, 但μ在$\mathcal{E}$上不一定可数可加.

引理1.3.3 设μ与$\mathcal{G}$上满足引理1.3.2(a)~(d). 定义

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(G) : G \supset A, G \in \mathcal{G}\}, \quad \forall A \in \mathcal{E},$$

则有

(a) 在$\mathcal{G}$上, $\mu^* = \mu; \forall A \in \mathcal{E}, 0 \leqslant \mu^*(A) \leqslant 1$;

(b) 若$\mu^*(A\cup B)+\mu^*(A\cap B)\leqslant\mu^*(A)+\mu^*(B)$,特别地,

$$\mu^*(A)+\mu^*(A^c)\geqslant 1,\quad \forall A,B\in\mathcal{E};$$

(c) 若$A\subset B$, 则$\mu^*(A)\leqslant\mu^*(B)$;

(d) 若$A_n\uparrow A$, 则$\mu^*(A_n)\to\mu^*(A)$.

证明 (a) 由μ^*的定义及引理1.3.2(a)立得(a).

(b) 任给$\varepsilon>0$, 选取E, $F\in\mathcal{G}$使$E\subset A$, $F\subset B$且

$$\mu(E)\leqslant\mu^*(A)+\frac{\varepsilon}{2},\quad \mu(F)\leqslant\mu^*(B)+\frac{\varepsilon}{2},$$

根据引理1.3.2(b)有

$$\begin{aligned}\mu^*(A)+\mu^*(B)+\varepsilon\geqslant&\mu(E)+\mu(F)=\mu(E\cup F)+\mu(E\cap F)\\ \geqslant&\mu^*(A\cup B)+\mu^*(A\cap B),\end{aligned}$$

由ε的任意性立得(b).

(c) 由μ^*的定义可得(c).

(d) 由(c)知$\lim\limits_{n\to\infty}\mu^*(A)$存在且$\mu^*(A)\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}\mu^*(A_n)$. 任给$\varepsilon>0$, 对每个$n\geqslant 1$选取$G_n\in\mathcal{G}$, $G_n\supset A_n$且

$$\mu(G_n)\leqslant\mu^*(A_n)+\varepsilon 2^{-n}.$$

由于$A=\bigcup\limits_n A_n\subset\bigcup\limits_n G_n\in\mathcal{G}$, 所以根据引理1.3.2有

$$\mu^*(A)\leqslant\mu^*\left(\bigcup_n G_n\right)=\mu\left(\bigcup_n G_n\right)=\lim_{k\to\infty}\mu\left(\bigcup_{n=1}^k G_n\right).\tag{1.3.3}$$

若能证

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^k G_n\right)\leqslant\mu^*(A_k)+\varepsilon\sum_{n=1}^k 2^{-n},\tag{1.3.4}$$

则由(1.3.3)和(1.3.4)可马上推出(d). 现在用归纳法证明式(1.3.4). 当$k=1$时, 像前面一样可适当选取G_1使(1.3.4)成立. 假设对某个$k\geqslant 1$, (1.3.4)成立, 用引理1.3.2(b),

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k+1}G_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^k G_n\right)+\mu(G_{k+1})-\mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^k G_n\right)\cap G_{k+1}\right),$$

但

$$\left(\bigcup_{n=1}^k G_n\right)\cap G_{k+1}\supset A_k\cap A_{k+1}=A_k,$$

所以由归纳假设得

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k+1} G_n\right) \leqslant \mu^*(A_k)+\varepsilon\sum_{n=1}^{k}2^{-n}+\mu^*(A_{k+1})+\varepsilon 2^{-(k+1)}-\mu^*(A_k)$$
$$\leqslant \mu^*(A_{k+1})+\varepsilon\sum_{n=1}^{k}2^{-n},$$

(1.3.4)对一切k均成立. 引理证毕.

定义1.3.1 满足下列条件的Ω全体子集上的非负广义实值集函数λ称为外测度:

(a) $\lambda(\varnothing)=0$;

(b) $A\subset B$, 则$\lambda(A)\leqslant\lambda(B)$;

(c) $\lambda\left(\bigcup_n A_n\right)\leqslant\sum_\nu \lambda(A_n)$.

注1.3.1 可以验证,引理1.3.3中的μ^*是一个外测度.

定理1.3.1 在引理1.3.3的假设下, 令

$$\mathcal{H}=\{H\subset\Omega:\mu^*(H)+\mu^*(H^{\mathrm{c}})=1\},\quad \mu^*\text{如引理1.3.3所定义},$$

则$\mathcal{H}$为一个σ代数且μ^*是$\mathcal{H}$ 上的一个概率测度.

证明 首先证明$\mathcal{H}$是一个代数且μ^*在$\mathcal{H}$上是有限可加的.

由$\mathcal{H}$的定义知, $\mathcal{H}$ 对集合的补运算是封闭的. 根据引理1.3.2(a)及引理1.3.3(a)知, $\mu^*(\Omega)=\mu(\Omega)=1$, $\mu^*(\varnothing)=\mu(\varnothing)=0$, 故$\varnothing$, $\Omega\in\mathcal{H}$. 任取$H_1,H_2\subset\Omega$, 由引理1.3.3(b)得

$$\mu^*(H_1\cup H_2)+\mu^*(H_1\cap H_2)\leqslant\mu^*(H_1)+\mu^*(H_2) \tag{1.3.5}$$

且

$$\mu^*((H_1\cup H_2)^{\mathrm{c}})+\mu^*((H_1\cap H_2)^{\mathrm{c}})\leqslant\mu^*(H_1^{\mathrm{c}})+\mu^*(H_2^{\mathrm{c}}). \tag{1.3.6}$$

若$H_1,H_2\in\mathcal{H}$,则(1.3.5)与(1.3.6)推出

$$[\mu^*(H_1\cup H_2)+\mu^*((H_1\cup H_2)^{\mathrm{c}})]+[\mu^*(H_1\cap H_2)+\mu^*((H_1\cap H_2)^{\mathrm{c}})]\leqslant 2,$$

但根据引理1.3.3(b),

$$\mu^*(H_1\cup H_2)+\mu^*((H_1\cup H_2)^{\mathrm{c}})\geqslant 1,\quad \mu^*(H_1\cap H_2)+\mu^*((H_1\cap H_2)^{\mathrm{c}})\geqslant 1,$$

故必有

$$\mu^*(H_1\cup H_2)+\mu^*((H_1\cup H_2)^{\mathrm{c}})=1,\quad \mu^*(H_1\cap H_2)+\mu^*((H_1\cap H_2)^{\mathrm{c}})=1. \tag{1.3.7}$$

式(1.3.7)表明$H_1 \cup H_2 \in \mathcal{H}$, 不仅如此, 由式(1.3.7)推出式(1.3.5)中等式必成立, 因此$\mathcal{H}$是一个代数, 而且μ^*在$\mathcal{H}$上具有有限可加性.

设$H_n \in \mathcal{H}$, $H_n \uparrow H$, 若能证$H \in \mathcal{H}$且$\lim\limits_{n\to\infty} \mu^*(H_n) = \mu^*(H)$, 则由前面的结果知$\mathcal{H}$为一个$\sigma$ 代数且μ^*在$\mathcal{H}$是可数可加的, 从而μ^*是$\mathcal{H}$上的一个测度. 事实上, 根据引理1.3.3(b)有

$$\mu^*(H) + \mu^*(H^c) \geqslant 1, \tag{1.3.8}$$

但引理1.3.3(d)又说明

$$\mu^*(H) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(H_n), \tag{1.3.9}$$

故对任意的$\varepsilon > 0$, 当n充分大时,

$$\mu^*(H) \leqslant \mu^*(H_n) + \varepsilon,$$

又$\mu^*(H^c) \leqslant \mu^*(H_n^c)$, 于是

$$\mu^*(H) + \mu^*(H^c) \leqslant \mu^*(H_n) + \varepsilon + \mu^*(H_n^c) = 1 + \varepsilon.$$

由ε的任意性及式(1.3.8)得$H \in \mathcal{H}$, 故$\mathcal{H}$是σ代数, 根据(1.3.9)知μ^*在$\mathcal{H}$上是可数可加的, 注意到$\mu^*(\Omega) = 1$, 故μ^*是$\mathcal{H}$上的概率测度. 定理证毕.

定义1.3.2 设$\mathcal{F}$是Ω上的一个σ代数, 称$(\Omega, \mathcal{F})$为一个可测空间. 若μ是$(\Omega, \mathcal{F})$上的一个测度, 则称$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一个测度空间. 若μ还满足: 任取$A \in \mathcal{F}$, 只要$\mu(A) = 0$, 则A的所有子集均属于$\mathcal{F}$, 则称$(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$为完备测度空间. 对$\mathcal{F}$上任一测度$\nu$, 记

$$\mathcal{F}_\nu = \{A \cup B : A \in \mathcal{F}, B \subset N, N \in \mathcal{F}, \nu(N) = 0\},$$

称$(\Omega, \mathcal{F}_\nu, \nu)$为原测度空间的完备化, 此时$\nu$由$\mathcal{F}$扩张到$\mathcal{F}_\nu$上, 仍记为$\nu$. 任取$C \in \mathcal{F}_\nu$, 必有$A \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{F}, B \subset N, \nu(N) = 0$, 使$C = A \cup B$, 扩张后的$\nu$满足$\nu(C) = \nu(A)$.

由引理1.3.1~引理1.3.3和定理1.3.1马上可以得到如下定理:

定理1.3.2 代数$\mathcal{F}_0$上的有限测度可以扩张为$\sigma(\mathcal{F}_0)$ 上的有限测度.

定义1.3.3 称σ代数$\mathcal{F}$上的测度μ是完备的当且仅当若$A \in \mathcal{F}$, $\mu(A) = 0$, 则A的任一子集均在$\mathcal{F}$内, 此时称$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$为完备测度空间. 若$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$为一个测度空间, 则称$(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$为其完备化, 其中 $\mathcal{F}_\mu = \{A \cup B : A \in \mathcal{F}, B \subset N, N \in \mathcal{F}, \mu(N) = 0\}$, μ则按如下定义扩张到$\mathcal{F}_\mu$上, 扩张后仍记为μ : $\mu(A \cup B) = \mu(A)$, 任取$A \in \mathcal{F}$, $B \subset N, N \in \mathcal{F}, \mu(N) = 0$.

定理1.3.3 沿用引理1.3.1~引理1.3.3和定理1.3.1的符号. $(\Omega, \mathcal{H}, \mu^*)$是$(\Omega, \sigma(\mathcal{F}_0), \mu^*)$ 的完备化.

证明 令$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$, 往证$\mathcal{H} = \mathcal{F}_{\mu^*}$.

先证$\mathcal{H} \subset \mathcal{F}_{\mu^*}$.$\forall A \in \mathcal{H}$, 则$A^c \in \mathcal{H}$, 由$\mu^*$定义知存在$G_n, G'_n \in \mathcal{H}$使$G_n \subset A \subset G'_n$, $\mu^*(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu^*(G_n)$且$\mu^*(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu^*(G'_n)$. 取$G = \bigcup\limits_n G_n, G' = \bigcap\limits_n G'_n$, 则$A = G \cup (A - G)$, 其中$G \in \mathcal{F}$, $A - G \subset G' - G \in \mathcal{F}$, 但

$$\mu^*(G' - G) \leqslant \mu^*(G'_n - G_n) \to 0, \quad n \to \infty,$$

故$A \in \mathcal{F}_{\mu^*}$, 此即$\mathcal{H} \subset \mathcal{F}_{\mu^*}$.

反之,$\forall B \in \mathcal{F}_{\mu^*}$, 则$B = C \cup N$, $C \in \mathcal{F}$, $N \subset M \in \mathcal{F}$, $\mu^*(M) = 0$, 因为$\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$, 故$A \in \mathcal{H}$, 又由$\mathcal{H}$的定义知$(\Omega, \mathcal{H}, \mu^*)$是完备测度空间, 故$N \in \mathcal{H}$, 从而$B \in \mathcal{H}$. 定理证毕.

定理1.3.4(Carathéodory测度扩张定理) 设$\mathcal{F}_0$是Ω上的一个代数, μ 是$\mathcal{F}_0$上的一个测度且μ在$\mathcal{F}_0$上是σ有限的(即$\Omega = \bigcup\limits_n A_n$, $A_n \in \mathcal{F}_0$, $\mu(A_n) < \infty$), 则μ可唯一地从$\mathcal{F}_0$扩张到$\sigma(\mathcal{F}_0)$上.

证明 根据假设, 可以取两两不交的集合序列$\{A_n, n \geqslant 1\}$, 使$A_n \in \mathcal{F}_0$且$\mu(A_n) < \infty$. $\forall E \in \mathcal{F}_0$, 定义$\mu_n(E) = \mu(E \cap A_n)$, 则$\mu_n$是$\mathcal{F}_0$上的有限测度. 由定理1.3.2知, μ_n在$\sigma(\mathcal{F}_0)$上有一个扩张μ_n^*. 因为$\mu = \sum\limits_n \mu_n$, 故$\mu^* := \sum\limits_n \mu_n^*$ 是μ的一个扩张, μ^*的可数可加性来自非负的双重级数可交换求和号这一事实.

现假设λ是$\sigma(\mathcal{F}_0)$上的一个测度且在$\mathcal{F}_0$上有$\mu = \lambda$.令$\lambda_n(E) = \lambda(E \cap A_n)$, $\forall E \in \sigma(\mathcal{F}_0)$, 则$\lambda_n$是$\sigma(\mathcal{F}_0)$上的有限测度, 而且在$\mathcal{F}_0$上$\lambda_n = \mu_n = \mu_n^*$.令

$$\mathcal{M} = \{E \in \sigma(\mathcal{F}_0) : \lambda_n(E) = \mu_n^*(E)\}.$$

不难验证$\mathcal{M}$ 是包含$\mathcal{F}_0$ 的单调族, 故由定理1.2.2知$\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{F}_0)$. 总之在$\sigma(\mathcal{F}_0)$上亦有$\lambda = \mu^*$. 唯一性得证. 定理证毕.

回到本节的开始, 若定义$\mu(A) = b - a, A \in \mathbb{R}$为左开右闭区间, a, b分别为A的左、右端点, 由于$\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty} (n, n+1]$, 而$\mu(n, n+1) = 1$, 故由测度扩张定理(定理1.3.4)知, 上述$\mu$可唯一地扩张到$\mathcal{B}(\mathbb{R})$上.

定理1.3.5 设$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$是一个测度空间,$\mathcal{F}_0$是$\Omega$上的一个代数,且$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$. 假定$\mu$在$\mathcal{F}_0$上是$\sigma$有限的,则$\forall \varepsilon > 0$, $\forall A \in \mathcal{F}$ 满足,$\mu(A) < \infty$, 总存在$B \in \mathcal{F}_0$, 使$\mu(A \triangle B) < \varepsilon$.

证明 设$\mathcal{G} = \left\{G : G = \bigcup\limits_n G_n, G_n \in \mathcal{F}_0\right\}$. 由定理1.2.4(a) 知道, 当$A \in \mathcal{G}$时, 定理是成立的, 而根据引理1.3.3, 若$\mu$是有限测度, 则对任意的$A \in \mathcal{F}$, 存在$A \in \mathcal{G}$使$\mu(A \triangle G) < \varepsilon$, 于是当μ有限时, 定理是成立的.

现设$\Omega = \bigcup\limits_n A_n$, $A_n \in \mathcal{F}_0, A_n$ 两两不交且$\mu(A_n) < \infty$. 定义$\mu_n(A) = \mu(A \cap A_n)$, $A \in \mathcal{F}$, 显然μ_n是$\mathcal{F}$ 上的有限测度. 根据前面的证明, 对每个$A \in \mathcal{F}$, 存在$B_n \in \mathcal{F}_0$使$\mu_n(A \triangle B_n) < \varepsilon a^{-n}$. 注意$B_n \cap A_n \in \mathcal{F}_0$. 令$C_n = B_n \cap A_n$, $C = \bigcup\limits_n C_n$. 由

于A_n两两不交,所以$C \cap A^c \cap A_n = C_n \cap A^c \cap A_n$, $C_k^c \cap A_n = A_n$, $k \neq n$, 这意味着$(A \vartriangle C) \cap A_n = (A \vartriangle C_n) \cap A_n$, 从而

$$\mu_n(A \vartriangle C) = \mu((A \vartriangle C) \cap A_n) = \mu((A \vartriangle C_n) \cap A_n),$$

但$\mu((A \vartriangle C_n) \cap A_n) = \mu_n(A \vartriangle B_n)$, 故

$$\mu(A \vartriangle C) = \sum_{n \geqslant 1} \mu_n(A \vartriangle C) = \sum_{n \geqslant 1} \mu_n(A \vartriangle B_n) < \varepsilon.$$

注意到$\bigcup\limits_{k=1}^{n} C_k - A \uparrow C - A$且$A - \bigcup\limits_{k=1}^{n} C_k \downarrow A - C$, 所以当$A \in \mathcal{F}$, 满足$\mu(A) < \infty$时, 有

$$\mu\left(A \vartriangle \bigcup_{k=1}^{n} C_k\right) \to \mu(A \vartriangle C), \quad n \to \infty.$$

对前面的$\varepsilon > 0$,取N充分大,令$B = \bigcup\limits_{k=1}^{N} C_k$,则有$B \in \mathcal{F}_0$且$\mu(A \vartriangle B) < \varepsilon$.定理证毕.

1.4 Lebesgue-Stieltjes 测度

本节以$\mathcal{F}_0(\mathbb{R})(\mathcal{F}_0(\bar{\mathbb{R}}))$记 $\mathbb{R}$ $(\bar{\mathbb{R}})$上不相交的左开右闭区间的有限并构成的集族. 我们知道, $\mathcal{F}_0(\mathbb{R})$ 与$\mathcal{F}_0(\bar{\mathbb{R}})$ 均为代数.下面将在$\mathcal{B}(\mathbb{R})$上构造一类常用的测度: 从$\mathcal{F}_0(\mathbb{R})$上的集合函数开始, 利用Carathéodory测度扩张定理将其扩张到$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上. 具体而言, 设$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 单调上升右连续, 定义$\mu(a, b) = F(b) - F(a)$,先将μ扩张到$\mathcal{F}_0(\mathbb{R})$ 上成为有限可加函数,再证明μ在$\mathcal{F}_0(\mathbb{R})$ 上可数可加, 最后证明μ可扩张为$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上的测度.

定义1.4.1 若μ是$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上的一个测度且$\mu(I) < \infty$, I为任一有界区间, 则称 μ是$\mathbb{R}$ 上的一个Lebesgue-Stieltjes测度. 若$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 单调上升且右连续, 则称F为$\mathbb{R}$ 上的分布函数.

根据分布函数的定义, 立刻得到如下定理:

定理1.4.1 设μ是$\mathbb{R}$上的Lebesgue-Stieltijes测度. 定义F如下: 任意取定$F(0)$, 当$x > 0$时, $F(x) = \mu((0, x]) + F(0)$; 当$x < 0$ 时, $F(x) = F(0) - \mu((x, 0])$, 则F是一个分布函数.

设F是$\mathbb{R}$上的一个分布函数, 将F从$\mathbb{R}$ 扩张到$\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$如下: 定义$F(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x)$, $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$. 在$\bar{\mathbb{R}}$ 上的左开右闭区间上定义集函数μ:

$$\mu(a, b] = F(b) - F(a),$$

$$\mu(-\infty, b] = \mu[-\infty, b] = F(b) - F(-\infty), \quad a, b \in \bar{\mathbb{R}}, a \leqslant b.$$