

一套多功能的真题复习全书，复习初期可以用它来全面了解考研，复习过程中可以将它作为知识点的命题参照标准，临考前可以将它作为检验复习效果的标准材料



FOCUS
聚焦图书

聚骄公司全心专业设计

传承辉煌的历史 **2010版** 开启成功的未来

考研数学

十年真题全方位

解码

(数学一)

世 华 潘正义 主编

借助真题复习，效率提升一倍
真正吃透真题，考研成功一半

世界图书出版公司

013-44/198

:2010(1)

2009

CUS
图书

一套多功能的真题复习全书，复习初期可以用它来全面了解考研，复习中
它作为知识点的命题参照标准，临考前可以将它作为检验复习效果的标准

业设计

传承辉煌的历史

2010版

开启成功的未来

考研数学

十年真题全方位

解码

(数学一)

世 华 潘正义 主编

元 02.25: 份宝

借助真题复习，效率提升一倍
真正吃透真题，考研成功一半

兴 界 图 书 出 版 公 司

图书在版编目(CIP) 数据

考研数学十年真题全方位解码. 数学一 / 世华, 潘正义主编. — 北京: 世界图书出版公司北京公司, 2006. 2
ISBN 978-7-5062-7338-1

I. 考... II. ①世... ②潘... III. 高等数学 — 研究生 — 入学考试 — 自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006) 第 010962 号

考研数学十年真题全方位解码 (数学一)

主 编: 世 华 潘正义

责任编辑: 王志平

装帧设计: 余曙敏

出 版: 世界图书出版公司北京公司

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街 137 号 电话: 88861708 邮编: 100089)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 北京忠信诚胶印厂印刷

开 本: 787 × 1092 毫米 1/16

印 张: 15.75

字 数: 302 千字

版 次: 2009 年 3 月第 3 版 2009 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-7338-1/H · 761

定价: 25.50 元

服务热线: 010 — 88861708

前 言

本书严格按照最新《数学考试大纲》的要求编写,对十年(2000~2009)来的考研数学真题的进行了详解、分析、归类和题型点对点演练。

本书分为三个部分:

第一部分为 2000~2009 年的十年真题。目的在于给考生形成一个完整的印象,了解考研数学命题的基本形式和题型分布。考生应充分利用这些真题,在规定时间内完成试卷,以达到模拟现场考试的目的。

第二部分为题型归类总结部分。我们将考研数学知识点分成了几十个不同的题型,将十年真题“打散”开,“融入”到各个题型中。目的在于让考生清楚、直观地看到每个知识点是通过何种题型来考查的,每种题型又有哪些变化形式,这样,可以做到知己知彼。

第三部分为真题及题型演练解析部分。通过“命题目的”、“思路点拨”、“详细解答”、“易错辨析”、“延伸拓展”几个部分,让考生不但知道题目该怎么做,而且知道题目为什么这么设计,易错的知识点在哪里,真正达到举一反三,触类旁通的目的。每套试卷的知识点分布表统计了历年真题的知识点分布情况,让考生可以直观地把握考试重点、了解考试特点。

本书使用建议:

在基础复习阶段,考生可以利用第二部分,体会各个知识点和题型的命题形式和特点。同时,对照第三部分,体会各种解题方法和技巧。

在模拟演练阶段,考生应在考试规定的时间内,完成第一部分的真题,锻炼和提高解题的速度和准确率。然后对照第三部分的真题解析归纳出自己的问题和错误点,并针对这些错误点和薄弱环节,先在《数学复习指南》(陈文灯教授编著)上找到相应的知识点和题型详解,最后结合第二部分的真题和题型演练题进行有针对性地训练。

目 录

第一篇 真题回顾

2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)	(1)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)	(6)
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)	(9)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)	(13)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)	(17)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)	(21)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)	(25)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)	(29)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)	(33)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)	(37)

第二篇 题型归类与演练

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限、连续

题型 1 求 1^∞ 型极限	(41)
题型 2 求 $\frac{0}{0}$ 型极限	(41)
题型 3 求 $\infty - \infty$ 型极限	(41)
题型 4 求分段函数的极限	(41)
题型 5 函数性质(奇偶性、周期性、单调性、有界性)的判断	(42)
题型 6 无穷小的比较或确定无穷小的阶	(42)
题型 7 数列极限的判定或求解	(42)
题型 8 求 n 项和的数列极限	(43)
题型 9 函数在某点连续性的判断(含分段函数)	(43)

第二章 一元函数微分学

题型 1 与函数导数或微分概念和性质相关的命题	(44)
题型 2 函数可导性及导函数的连续性的判定	(44)
题型 3 求函数或复合函数的导数	(44)

题型 4	求反函数的导数	(44)
题型 5	求隐函数的导数	(45)
题型 6	函数极值点、拐点的判定或求解	(45)
题型 7	函数与其导函数的图形关系或其他性质的判定	(45)
题型 8	函数在某点可导的判断(含分段函数在分段点的可导性的判断)	(46)
题型 9	求一元函数在一点的切线方程或法线方程	(46)
题型 10	函数单调性的判断或讨论	(46)
题型 11	不等式的证明或判定	(47)
题型 12	在某一区间至少存在一个点或两个不同的点,使某个式子成立的证明 ..	(48)
题型 13	方程根的判定或唯一性证明	(48)
题型 14	曲线的渐近线的求解或判定	(48)

第三章 一元函数积分学

题型 1	求不定积分或原函数	(49)
题型 2	函数与其原函数性质的比较	(49)
题型 3	求函数的定积分	(49)
题型 4	求变上限积分的导数	(50)
题型 5	求反常积分	(50)
题型 6	定积分的应用(曲线的弧长、面积、旋转体的体积、变力做功等)	(51)

第四章 向量代数和空间解析几何

题型 1	求直线方程或直线方程中的参数	(51)
题型 2	求点到平面的距离	(51)
题型 3	求直线在平面上的投影及旋转曲面方程	(52)

第五章 多元函数微分学

题型 1	多元函数或多元复合函数的偏导的存在的判定或求解	(52)
题型 2	多元隐函数的导数或偏导的求解或判定	(52)
题型 3	多元函数连续、可导与可微的关系	(53)
题型 4	求曲面的切平面或法线方程	(53)
题型 5	多元函数极值的判定或求解	(54)
题型 6	求函数的方向导数或梯度或相关问题	(54)
题型 7	已知二元函数的梯度,求二元函数表达式	(55)

第六章 多元函数积分学

题型 1	求二重积分	(55)
题型 2	交换二重积分的积分次序	(55)
题型 3	求三重积分	(56)
题型 4	求对弧长的曲线积分	(56)
题型 5	求对坐标的曲线积分	(56)
题型 6	求对面积的曲面积	(56)
题型 7	求对坐标的曲面积分	(57)
题型 8	曲面积分的比较	(57)

题型 9	与曲线积分相关的判定或证明	(57)
题型 10	已知曲线积分的值,求曲线积分中被积函数中的未知函数的表达式	(58)
题型 11	求函数的梯度、散度或旋度	(59)
题型 12	重积分的物理应用题(转动惯重、重心等)	(59)

第七章 无穷级数

题型 1	无穷级数敛散性的判定	(59)
题型 2	求无穷级数的和	(60)
题型 3	求函数的幂级数展开或收敛域或判断其在端点的敛散性	(61)
题型 4	求函数的傅里叶系数或函数在某点的展开的傅里叶级数的值	(61)

第八章 常微分方程

题型 1	求一阶线性微分方程的通解或特解	(61)
题型 2	二阶可降价微分方程的求解	(62)
题型 3	求二阶齐次或非齐次线性微分方程的通解或特解	(62)
题型 4	已知二阶线性齐次或非齐次微分方程的通解或特解,反求微分方程	(62)
题型 5	求欧拉方程的通解或特解	(62)
题型 6	常微分方程的物理应用	(62)
题型 7	通过求导建立微分方程求解函数表达式或曲线方程	(63)

第二部分 线性代数

第一章 行列式

题型 1	求矩阵的行列式	(64)
题型 2	判断矩阵的行列式是否为零	(64)

第二章 矩 阵

题型 1	判断矩阵是否可逆或求逆矩阵	(64)
题型 2	解矩阵方程或求矩阵中的参数	(65)
题型 3	求矩阵的 n 次幂	(65)
题型 4	初等矩阵与初等变换的关系的判定	(65)
题型 5	矩阵关系的判定	(66)

第三章 向 量

题型 1	向量组线性相关性的判定或证明	(66)
题型 2	根据向量的线性相关性判断空间位置关系或逆问题	(67)

第四章 线性方程组

题型 1	齐次线性方程组基础解系的求解或判定	(67)
题型 2	求线性方程组的通解	(68)
题型 3	讨论含参数的线性方程组的解的情况,如果方程组有解时求出通解	(68)
题型 4	根据含参数的方程组的解的情况;反求参数或其他	(69)
题型 5	两个线性方程组的解的情况和它们的系数矩阵的关系的判定	(69)

题型 6	直线的方程和位置关系的判定	(69)
------	---------------------	------

第五章 矩阵的特征值和特征向量

题型 1	求矩阵的特征值或特征向量	(70)
题型 2	已知含参数矩阵的特征向量或特征值或特征方程的情况,求参数	(70)
题型 3	已知伴随矩阵的特征值或特征向量,求矩阵的特征值或参数或逆问题	(71)
题型 4	将矩阵对角化或判断矩阵是否可对角化	(71)
题型 5	矩阵相似的判定或证明或求一个矩阵的相似矩阵	(71)
题型 6	矩阵相似和特征多项式的关系的证明或判定	(72)

第六章 二次型

题型 1	化实二次型为标准二次型或求相应的正交变换	(72)
题型 2	已知一含参数的二次型化为标准形的正交变换,反求参数或正交矩阵	(72)
题型 3	已知二次型的秩,求二次型中的参数和二次型所对应矩阵的表达式	(73)
题型 4	矩阵关系合同的判定或证明	(73)
题型 5	矩阵正定的证明	(73)

第三部分 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率

题型 1	求随机事件的概率	(74)
题型 2	随机事件的运算	(74)

第二章 随机变量及其分布

题型 1	求一维离散型随机变量的分布律或分布函数	(74)
题型 2	根据概率反求或判定分布中的参数	(75)
题型 3	求一维随机变量在某一区间的概率	(75)
题型 4	求一维随机变量函数的分布	(75)

第三章 二维随机变量及其分布

题型 1	求二维离散型随机变量的联合分布律或分布函数或边缘概率分布	(76)
题型 2	已知部分边缘分布,求联合分布律	(76)
题型 3	求二维连续型随机变量的分布密度或边缘密度函数	(77)
题型 4	求两个随机变量的条件概率或条件密度函数	(77)
题型 5	两个随机变量的独立性或相关性的判定或证明	(78)
题型 6	求两个随机变量的相关系数	(78)
题型 7	求二维随机变量在某一区域的概率	(78)

第四章 随机变量的数字特征

题型 1	求随机变量的数字期望或方差	(79)
题型 2	求随机变量函数的数学期望或方差	(79)
题型 3	两个随机变量的协方差或相关系数的求解或判定	(80)

第五章 大数定律和中心极限定理

题型 1 利用切比雪夫不等式估计概率	(80)
--------------------------	------

第六章 数理统计的基本概率

题型 1 求样本容量	(80)
题型 2 分位数的求解或判定	(81)
题型 3 求参数的矩估计量或矩估计值或估计量的数字特征	(81)
题型 4 求参数的最大似然估量或估计量或估计量的数字特征	(82)
题型 5 总体或统计量的分布函数的判定或求解	(82)
题型 6 讨论统计量的无偏性、一致性或有效性	(83)
题型 7 求统计量的数学期望或方差或两个统计量的协方差	(83)
题型 8 求单个正态总体均值的置信区间	(84)
题型 9 显著性检验的判定	(84)
题型演练参考答案	(85)

第三篇 答案详解

2009 年全国硕士研究生入学统一考试(数学一)详解·拓展·评析	(123)
2009 年数学(一)试卷评析	(133)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试(数学一)详解·拓展·评析	(134)
2008 年数学(一)试卷评析	(144)
2007 年全国硕士研究生入学统一考试(数学一)详解·拓展·评析	(145)
2007 年数学(一)试卷评析	(156)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试(数学一)详解·拓展·评析	(157)
2006 年数学(一)试卷评析	(166)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试(数学一)详解·拓展·评析	(167)
2005 年数学(一)试卷评析	(179)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试(数学一)详解·拓展·评析	(180)
2004 年数学(一)试卷评析	(191)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试(数学一)详解·拓展·评析	(192)
2003 年数学(一)试卷评析	(204)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试(数学一)详解·拓展·评析	(205)
2002 年数学(一)试卷评析	(217)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试(数学一)详解·拓展·评析	(218)
2001 年数学(一)试卷评析	(227)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试(数学一)详解·拓展·评析	(228)
2000 年数学(一)试卷评析	(239)

第一篇 真题回顾

2009 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 等价无穷小,则()

(A) $a = 1, b = -\frac{1}{6}$.

(B) $a = 1, b = \frac{1}{6}$.

(C) $a = -1, b = -\frac{1}{6}$.

(D) $a = -1, b = \frac{1}{6}$.

(2) 如图,正方形 $\{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 被其对角线划分为

四个区域 $D_k (k = 1, 2, 3, 4)$, $I_k = \iint_{D_k} y \cos x dx dy$,

则 $\max_{1 \leq k \leq 4} \{I_k\} = ()$

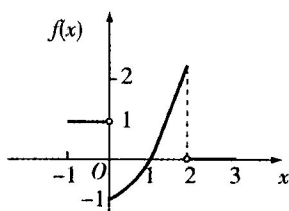
(A) I_1 .

(B) I_2 .

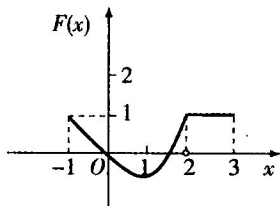
(C) I_3 .

(D) I_4 .

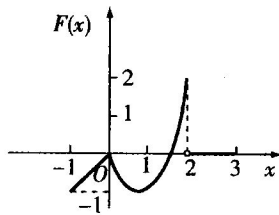
(3) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形为:



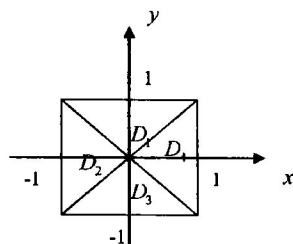
则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图形为()

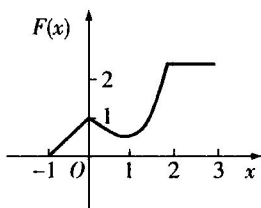


(A)

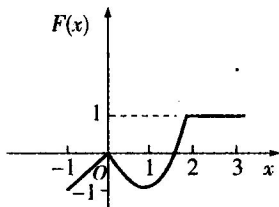


(B)





(C)



(D)

(4) 设有两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则 ()

(A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

(B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.

(C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛.

(D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

(5) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维向量空间 R^3 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为 ()

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$

(6) 设 A, B 均为 2 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵

$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 ()

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}.$

(7) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $EX =$ ()

(A) 0.

(B) 0.3.

(C) 0.7.

(D) 1.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y = 0\} = P\{Y = 1\} = \frac{1}{2}$, 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z = XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为

()

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

二、填空题:9—14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $z = f(x, xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

(10) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x$, 则非齐次方程 $y'' + ay' + by = x$ 满足条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解为 $y =$ _____.

(11) 已知曲线 $L: y = x^2 (0 \leq x \leq \sqrt{2})$, 则 $\int_L x ds =$ _____.

(12) 设 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 则 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz =$ _____.

(13) 若三维列向量 α, β 满足 $\alpha^T \beta = 2$, 其中 α^T 为 α 的转置, 则矩阵 $\beta \alpha^T$ 的非零特征值为 _____.

(14) 设 $X_1, X_2, \dots, X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n, p)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\bar{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量, 则 $k =$ _____.

三、解答题:15—23 小题,共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 9 分) 求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

(16) (本题满分 9 分) 设 a_n 为曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1} (n = 1, 2, \dots)$ 所围成区域的面积, 记

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}, \text{求 } S_1 \text{ 与 } S_2 \text{ 的值.}$$

(17) (本题满分 11 分) 椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 绕 x 轴旋转而成, 圆锥面 S_2 是过点 $(4, 0)$ 且

与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(I) 求 S_1 及 S_2 的方程

(II) 求 S_1 与 S_2 之间的立体体积.

(18) (本题满分 11 分)

(I) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

(II) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 在 $(0, \delta)$ ($\delta > 0$) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.

(19) (本题满分 10 分) 计算曲面积分 $I = \oiint_{\Sigma} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的外侧.

(20) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \quad \xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

① 求满足 $A\xi_2 = \xi_1$ 的 ξ_2 . $A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3 .

② 对 ① 中的任意向量 ξ_2, ξ_3 证明 ξ_1, ξ_2, ξ_3 无关.

(21) (本题满分 11 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

(I) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(II) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.

(22) (本题满分 11 分)

袋中有 1 个红色球, 2 个黑色球与 3 个白球, 现有放回地从袋中取两次, 每次取一球, 以 X, Y, Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(I) 求 $p\{X=1|Z=0\}$;

(II) 求二维随机变量 (X, Y) 概率分布.

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中参数 $\lambda (\lambda > 0)$ 未知, $X_1, X_2, \dots, X_n$

是来自总体 X 的简单随机样本

(I) 求参数 λ 的矩估计量;

(II) 求参数 λ 的最大似然估计量

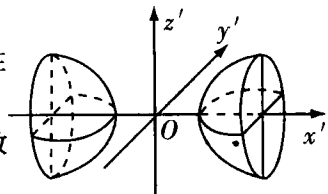
2008 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分,在每小题给的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后括号内)

- (1) 设函数 $f(x) = \int_0^{x^2} \ln(2+t) dt$, 则 $f'(x)$ 的零点个数()
 (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.
- (2) 函数 $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ 在点 $(0, 1)$ 处的梯度等于()
 (A) i . (B) $-i$. (C) j . (D) $-j$.
- (3) 在下列微分方程中,以 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$ (C_1, C_2, C_3 为任意常数) 为通解的是()
 (A) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$. (B) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$.
 (C) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$. (D) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$.
- (4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是()
 (A) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛. (B) 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.
 (C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛. (D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛.
- (5) 设 A 为 n 阶非零矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3 = O$, 则()
 (A) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 不可逆. (B) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 可逆.
 (C) $E - A$ 可逆, $E + A$ 可逆. (D) $E - A$ 可逆, $E + A$ 不可逆.

- (6) 设 A 为 3 阶实对称矩阵, 如果二次曲面方程 $(x, y, z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$ 在



正交变换下的标准方程的图形如图所示, 则 A 的正特征值的个数为()

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.
- (7) 设随机变量 X, Y 独立同分布, 且 X 分布函数为 $F(x)$, 则 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数为()
 (A) $F^2(x)$. (B) $F(x)F(y)$.
 (C) $1 - [1 - F(x)]^2$. (D) $[1 - F(x)][1 - F(y)]$.
- (8) 设随机变量 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(1, 4)$, 且相关系数 $\rho_{XY} = 1$, 则()
 (A) $P\{Y = -2X - 1\} = 1$. (B) $P\{Y = 2X - 1\} = 1$.
 (C) $P\{Y = -2X + 1\} = 1$. (D) $P\{Y = 2X + 1\} = 1$.

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

- (9) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1$ 的解是 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (10) 曲线 $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 在 $x=-4$ 处发散, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 的收敛域为_____.

(12) 设曲面 Σ 是 $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧, 则 $\iint_{\Sigma} xy dy dz + x dz dx + x^2 dx dy =$ _____.

(13) 设 A 为 2 阶矩阵, α_1, α_2 为线性无关的 2 维列向量, $A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, 则 A 的非零特征值为_____.

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X = EX^2\} =$ _____.

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 9 分)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}.$$

(16) (本题满分 9 分)

计算曲线积分 $\int_L \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy$, 其中 L 是曲线 $y = \sin x$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(\pi, 0)$ 的一段.

(17) (本题满分 11 分)

已知曲线 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x^2 = 0 \\ x + y + 3z = 5 \end{cases}$, 求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点.

(18) (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是连续函数,

(I) 利用定义证明函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 可导, 且 $F'(x) = f(x)$;

(II) 当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时, 证明函数 $G(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - x \int_0^2 f(t) dt$ 也是以 2 为周期的周期函数.

(19) (本题满分 11 分)

将函数 $f(x) = 1 - x^2 (0 \leq x \leq \pi)$ 展开成余弦级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

(20) (本题满分 10 分)

设 α, β 为 3 维列向量, 矩阵 $A = \alpha\alpha^T + \beta\beta^T$, 其中 α^T, β^T 分别是 α, β 的转置.

证明:

(I) 秩 $r(A) \leq 2$;

(II) 若 α, β 线性相关, 则秩 $r(A) < 2$.

(21) (本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(I) 证明行列式 $|A| = (n+1)a^n$;

(II) 当 a 为何值时, 该方程组有唯一解, 并求 x_1 ;

(III) 当 a 为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求通解.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X=i\} = \frac{1}{3} (i=-1, 0, 1)$, Y 的概率密度

为 $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 记 $Z = X + Y$.

(I) 求 $P\{Z \leq \frac{1}{2} | X=0\}$; (2) 求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23) (本题满分 11 分)

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本. 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad T = \bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2.$$

(I) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;

(II) 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 求 DT .