一套多功能的真题复习全书，复习初期可以用它来全面了解考研，复习过程中可以将它作为知识点的命题参照标准，临考前可以将它作为检验复习效果的标准材料

FOCUS 聚焦图书

聚骄公司全心专业设计

传承辉煌的历史 **2010版** 开启成功的未来

考研数学

十年真题全方位解码

（数学一）

世 华 潘正义 主编

借助真题复习，效率提升一倍
真正吃透真题，考研成功一半

世界图书出版公司

一套多功能的真题复习全书，复习初期可以用它来全面了解考研，复习过
它作为知识点的命题参照标准，临考前可以将它作为检验复习效果的标准

传承辉煌的历史 **2010版** 开启成功的未来

考研数学

十年真题全方位解码

（数学一）

世 华 潘正义 主编

借助真题复习，效率提升一倍
真正吃透真题，考研成功一半

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

考研数学十年真题全方位解码. 数学一 / 世华,潘正义主编. —北京:世界图书出版公司北京公司,2006.2
ISBN 978－7－5062－7338－1

Ⅰ.考… Ⅱ.①世…②潘… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 010962 号

考研数学十年真题全方位解码

(数学一)

主　　编: 世　华　潘正义
责任编辑: 王志平
装帧设计: 余曙敏

出　　版: 世界图书出版公司北京公司
发　　行: 世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号　电话:88861708　邮编:100089)
销　　售: 各地新华书店
印　　刷: 北京忠信诚胶印厂印刷

开　　本: 787×1092 毫米　1/16
印　　张: 15.75
字　　数: 302 千字
版　　次: 2009 年 3 月第 3 版　2009 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-7338-1/H·761　　**定价:25.50 元**

服务热线: 010－88861708

前　言

本书严格按照最新《数学考试大纲》的要求编写，对十年（2000～2009）来的考研数学真题的进行了详解、分析、归类和题型点对点演练。

本书分为三个部分：

第一部分为2000～2009年的十年真题。目的在于给考生形成一个完整的印象，了解考研数学命题的基本形式和题型分布。考生应充分利用这些真题，在规定时间内完成试卷，以达到模拟现场考试的目的。

第二部分为题型归类总结部分。我们将考研数学知识点分成了几十个不同的题型，将十年真题“打散”开，“融入”到各个题型中。目的在于让考生清楚、直观地看到每个知识点是通过何种题型来考查的，每种题型又有哪些变化形式，这样，可以做到知己知彼。

第三部分为真题及题型演练解析部分。通过“命题目的”、“思路点拨”、“详细解答”、“易错辨析”、“延伸拓展”几个部分，让考生不但知道题目该怎么做，而且知道题目为什么这么设计，易错的知识点在哪里，真正达到举一反三，触类旁通的目的。每套试卷的知识点分布表统计了历年真题的知识点分布情况，让考生可以直观地把握考试重点、了解考试特点。

本书使用建议：

在基础复习阶段，考生可以利用第二部分，体会各个知识点和题型的命题形式和特点。同时，对照第三部分，体会各种解题方法和技巧。

在模拟演练阶段，考生应在考试规定的时间内，完成第一部分的真题，锻炼和提高解题的速度和准确率。然后对照第三部分的真题解析归纳出自己的问题和错误点，并针对这些错误点和薄弱环节，先在《数学复习指南》（陈文灯教授编著）上找到相应的知识点和题型详解，最后结合第二部分的真题和题型演练题进行有针对性地训练。

目录

第一篇　真题回顾

第二篇　题型归类与演练

第一部分　高等数学

第一章　函数、极限、连续

第二章　一元函数微分学

第七章　无穷级数

第八章　常微分方程

第二部分　线性代数

第一章　行列式

第二章　矩　　阵

第三章　向　　量

第四章　线性方程组

第五章　矩阵的特征值和特征向量

第六章　二次型

第三部分　概率论与数理统计

第一章　随机事件和概率

第二章　随机变量及其分布

第三章　二维随机变量及其分布

第四章　随机变量的数字特征

第五章　大数定律和中心极限定理

第六章　数理统计的基本概率

第三篇　答案详解

第一篇　真题回顾

2009 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.

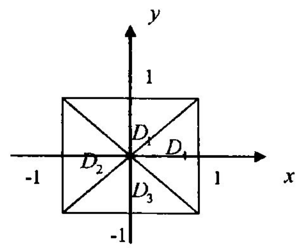
(1) 当 $x \to 0$ 时,$f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2\ln(1-bx)$ 等价无穷小,则(　　)

(A)$a = 1, b = -\frac{1}{6}$.　　(B)$a = 1, b = \frac{1}{6}$.

(C)$a = -1, b = -\frac{1}{6}$.　　(D)$a = -1, b = \frac{1}{6}$.

(2) 如图,正方形 $\{(x,y) \mid |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k(k = 1,2,3,4)$,$I_k = \iint\limits_{D_k} y\cos x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

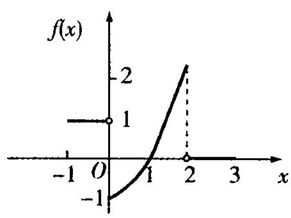
则 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\{I_k\} = $(　　)



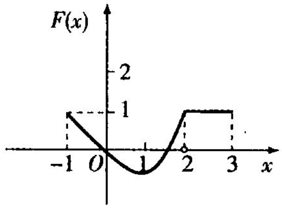
(A)I_1.　　(B)I_2.

(C)I_3.　　(D)I_4.

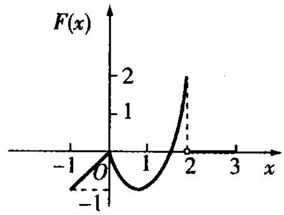
(3) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为:



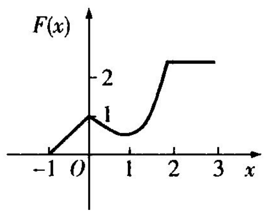
则函数 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为(　　)



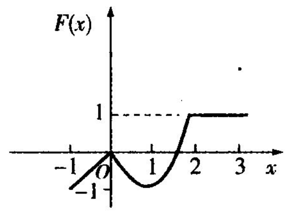
(A)



(B)



（C）



（D）

(4) 设有两个数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则(　　)

(A) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛.　　(B) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$发散.

(C) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$收敛.　　(D) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$发散.

(5) 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是三维向量空间$R^3$的一组基，则由基$\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$到基$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$.

(6) 设A,B均为2阶矩阵，A^*,B^*分别为A,B的伴随矩阵，若$|A|=2$，$|B|=3$，则分块矩阵$\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$的伴随矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}O&3B^*\\2A^*&O\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}O&2B^*\\3A^*&O\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}O&3A^*\\2B^*&O\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}O&2A^*\\3B^*&O\end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量X的分布函数为$F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$，其中$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则$EX=$(　　)

(A)0.　　(B)0.3.　　(C)0.7.　　(D)1.

(8) 设随机变量X与Y相互独立，且X服从标准正态分布$N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$，记$F_Z(z)$为随机变量$Z=XY$的分布函数，则函数$F_Z(z)$的间断点个数为(　　)

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

二、填空题:9－14小题,每小题4分,共24分,请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,$z=f(x,xy)$,则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________.

(10) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$,则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2,y'(0)=0$ 的解为 $y=$ ________.

(11) 已知曲线 $L:y=x^2(0\leqslant x\leqslant\sqrt{2})$,则 $\int_L x\,\mathrm{d}s=$ ________.

(12) 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$,则 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ ________.

(13) 若三维列向量 α,β 满足 $\alpha^T\beta=2$,其中 α^T 为 α 的转置,则矩阵 $\beta\alpha^T$ 的非零特征值为________.

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本,$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量,则 $k=$ ________.

三、解答题:15－23小题,共94分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分9分) 求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

(16)(本题满分9分) 设 a_n 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}(n=1,2,\cdots\cdots)$ 所围成区域的面积,记 $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$,求 S_1 与 S_2 的值.

(17)(本题满分11分) 椭球面 S_1 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 绕 x 轴旋转而成,圆锥面 S_2 是过点 $(4,0)$ 且与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(Ⅰ) 求 S_1 及 S_2 的方程

(Ⅱ) 求 S_1 与 S_2 之间的立体体积.

(18)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理:若函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)可导,则存在 $\xi \in (a,b)$,使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

(Ⅱ)证明:若函数 $f(x)$在 $x=0$ 处连续,在$(0,\delta)(\delta>0)$内可导,且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=A$,则 $f'_+(0)$ 存在,且 $f'_+(0)=A$.

(19)(本题满分 10 分)计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,其中$\sum$是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

(20)(本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2\end{pmatrix}$　$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$

① 求满足 $A\xi_2=\xi_1$ 的 ξ_2. $A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2,ξ_3.

② 对 ① 中的任意向量 ξ_2,ξ_3 证明 ξ_1,ξ_2,ξ_3 无关.

(21)(本题满分 11 分)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$

(Ⅰ)求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(Ⅱ)若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$,求 a 的值.

(22)(本题满分 11 分)

袋中有 1 个红色球,2 个黑色球与 3 个白球,现有回放地从袋中取两次,每次取一球,以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(Ⅰ)求 $p\{X=1|Z=0\}$;

(Ⅱ)求二维随机变量(X,Y)概率分布.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda^2 xe^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,其中参数 $\lambda(\lambda>0)$ 未知,$X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本

(Ⅰ)求参数 λ 的矩估计量;

(Ⅱ)求参数 λ 的最大似然估计量

2008年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)

一、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分,在每小题给的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)\mathrm{d}t$, 则 $f'(x)$ 的零点个数(　　)

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

(2) 函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点(0,1)处的梯度等于(　　)

(A)i.　　(B)$-i$.　　(C)j.　　(D)$-j$.

(3) 在下列微分方程中,以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$($C_1,C_2,C_3$ 为任意常数)为通解的是(　　)

(A)$y'''+y''-4y'-4y=0$.　　(B)$y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C)$y'''-y''-4y'+4y=0$.　　(D)$y'''-y''+4y'-4y=0$.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是(　　)

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

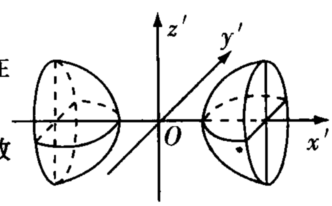
(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛.　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛.

(5) 设 A 为 n 阶非零矩阵,E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3=O$, 则(　　)

(A)$E-A$ 不可逆,$E+A$ 不可逆.　　(B)$E-A$ 不可逆,$E+A$ 可逆.

(C)$E-A$ 可逆,$E+A$ 可逆.　　(D)$E-A$ 可逆,$E+A$ 不可逆.

(6) 设 A 为3阶实对称矩阵,如果二次曲面方程 $(x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$ 在正交变换下的标准方程的图形如图所示,则 A 的正特征值的个数为(　　)



(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

(7) 设随机变量 X,Y 独立同分布,且 X 分布函数为 $F(x)$,则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为(　　)

(A)$F^2(x)$.　　(B)$F(x)F(y)$.

(C)$1-[1-F(x)]^2$.　　(D)$[1-F(x)][1-F(y)]$.

(8) 设随机变量 $X\sim N(0,1)$, $Y\sim N(1,4)$,且相关系数 $\rho_{XY}=1$,则(　　)

(A)$P\{Y=-2X-1\}=1$.　　(B)$P\{Y=2X-1\}=1$.

(C)$P\{Y=-2X+1\}=1$.　　(D)$P\{Y=2X+1\}=1$.

二、填空题:9－14小题,每小题4分,共24分,请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$ ________.

(10) 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点(0,1)处的切线方程是________.

(11) 已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛,在 $x=-4$ 处发散,则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 的收敛域为________.

(12) 设曲面 $\sum$ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧,则 $\iint\limits_{\Sigma} xy\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ________.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量,$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{A\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为________.

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布,则 $P\{X=EX^2\}=$ ________.

三、解答题:15－23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 9 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

(16) (本题满分 9 分)

计算曲线积分 $\int_L \sin 2x\,\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\,\mathrm{d}y$,其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的一段.

(17) (本题满分 11 分)

已知曲线 C:$\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$,求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点.

(18) (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是连续函数,

(Ⅰ) 利用定义证明函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导,且 $F'(x)=f(x)$;

(Ⅱ) 当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时,证明函数 $G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 2 为周期的周期函数.

(19) (本题满分 11 分)

将函数 $f(x)=1-x^2(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成余弦级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

(20)(本题满分 10 分)

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量,矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的转置.

证明:

(Ⅰ)秩 $r(A)\leqslant 2$;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则秩 $r(A)<2$.

(21)(本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{pmatrix}_{n\times n},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明行列式 $|A|=(n+1)a^n$;

(Ⅱ)当 a 为何值时,该方程组有唯一解,并求 x_1;

(Ⅲ)当 a 为何值时,该方程组有无穷多解,并求通解.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\dfrac{1}{3}(i=-1,0,1)$,$Y$ 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 记 $Z=X+Y$.

(Ⅰ)求 $P\left\{Z\leqslant\dfrac{1}{2}\,\middle|\,X=0\right\}$; (2)求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本. 记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\ S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\ T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2.$$

(Ⅰ)证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;

(Ⅱ)当 $\mu=0,\sigma=1$ 时,求 DT.