微机计算水力学

杨景芳　编著

大连理工大学出版社

封面设计：姜严军

ISBN 7-5611-0438-3/TV·10 定价：2.67元

微机计算水力学

杨景芳　编著

大连理工大学出版社

内 容 简 介

本书是作者根据多年的教学实践，并参考国内外类似教材，取其精华，编写而成的。目的是使读者掌握通过微机解水力学问题的方法，为解决更复杂的实际工程问题打下牢固的电算基础。

书中内容包括：数值计算基础、偏微分方程式的差分数值解法、有限单元法和边界单元法；用这些方法解有压管流、明渠流、闸孔、堰流、消能、地下水的渗流及平面势流等计算问题。

书中的40个用FORTRAN77算法语言编写的电算程序，几乎包括了全部水力学的主要计算问题。

本书可作为土木、水利类本科大学生的“水力学”课程的配套教材，也可以作为相应专业的研究生的教学参考书。

微机计算水力学

Weiji Jishuan Shueilixue

杨景芳　编著

大连理工大学出版社出版　　(出版社登记证[辽]第16号)

(邮政编码：116023)

大连海运学院印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　　印张：$9\frac{9}{16}$　　字数：207千字

1991年5月第1版　　1991年5月第1次印刷

印数：0001－2000

责任编辑：郭学满　　封面设计：姜严军

责任校对：京锋

ISBN 7－5611－0438－3/TV・10　　定价：2.67元

前 言

众所周知，在水力学中水力计算的内容特别多。其特点是繁和难，有些问题甚至于在通常情况下无法解算。但是，近年来随着数值计算方法的发展和电子计算机的广泛应用，为水力计算提供了有利的条件。

我们曾经将电算方法引入教学中，积累了一定的经验。但是，由于学时所限，限制了它的拓广和应用。目前国外及国内许多院校是用开设“微机计算水力学”作为必修课或者选修课的方法来解决这一问题的。这是一个比较好的切实可行的方法。然而，国内尚无一本正式出版的这种教材。为此，作者根据教学实践，并参考国外类似教材和国内各兄弟院校用的讲义编写了这本“微机计算水力学”。目的是使同学们掌握一定的数值计算方法的内容，应用它通过电算解水力计算问题，并为以后解决更复杂的实际工程问题打下牢固的电算基础。

作者在编写本书过程中遵循了下面原则：

1. 计算的问题只限制在水力学范围之内，且为手算难以解决的问题；

2. 常用的数学方法力求讲透，但是水力学方法只是归纳总结，所用公式不再推导(引用文献中的内容例外)；

3. 着重程序的可读性，不苛求程序的过分技巧. 本书中所

有的程序均用 FORTRAN77 算法语言编写。因为它是当今科技界最通用的语言。

全书共七章。前三章(数值计算基础,偏微分方程式的差分数值解法,有限单元法和边界单元法)是数学基础内容。后四章(有压管流、明渠流、闸孔、堰流、消能、地下水的渗流运动及平面势流)是电算方法在水力学中的具体应用内容。基础内容中的例题尽量采用水力学中的例题。全书共编写了 40 个程序,几乎包括了全部水力学的主要计算问题。本书可以作为土木、水利类本科大学生的教科书,或者“水力学”课程的配套教材,也可以作为研究生“计算流体力学”课程的教学参考书。对土木、水利类的教师、科研及设计人员也可以作为参考书和工具书。

在本书的编写过程中,一些兄弟院校如成都科技大学、武汉水利电力学院、河海大学及西北农业大学等有关单位给予了热情协助,大连理工大学土木系教授李鉴初给予了热情指导和大力支持,王子茹老师为本书描绘了全部插图,还有一些老师和研究生在本书调试程序过程中给予了帮助,在此一并表示感谢。

由于本人水平所限,书中缺点和错误在所难免,望同行及读者及时给予批评指正。

编著者　杨景芳

于　大连理工大学

1990 年 12 月

目　录

第一章　数值计算基础

§1—1　非线性代数方程式的解法

一、迭代法

我们研究用逐次逼近的方法求方程式

$$f(x) = 0 \tag{1.1.1}$$

的实根。

首先将(1.1.1)式变形为

$$x = F(x) \tag{1.1.2}$$

然后从比较粗略的近似根 x_0 出发,求出逐次近似的根

$$x_1 = F(x_0)$$

$$x_2 = F(x_1)$$

$$\cdots$$

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

迭代的一般公式为

$$x_{n+1} = F(x_n) \tag{1.1.3}$$

收敛判别公式为　$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$　(1.1.4)

ε 是收敛判别常数,根据问题对计算精度的要求选取。根据分析,迭代法是线性收敛。所谓线性收敛,即后一次的迭代误差 ε_{n+1} 比例于前一次的迭代误差 ε_n。

迭代法计算的收敛条件为

$$|f'(x)| < 1 \tag{1.1.5}$$

迭代法求根的几何解释如图 1.1.1 所示。它就是曲线 $y = F(x)$ 与直线 $y = x$ 的交点 P^*。对于 x^* 的某个初始近似值 x_0，在曲线 $y = F(x)$ 上作出以 x_0 为横坐标的一点 P_0，点 P_0 的纵坐标为 $F(x_0) = x_1$。过 P_0 引平行于 x 轴的直线，交直线 $y = x$ 于点 Q_1。过点 Q_1 作平行于 y 轴的直线，交曲线 $y = F(x)$ 于点 P_1。如此下去可以求出接近于 P^* 点的交点 P，也就是说可以求得接近于真根 x^* 的根 x。

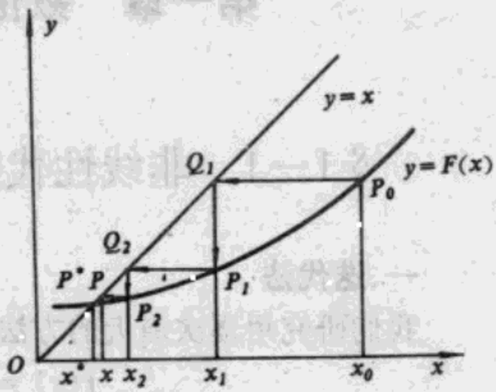

图 1.1.1

迭代法步骤：

1. 将 $f(x) = 0$ 变形为 $x = F(x)$；

2. 从第 1 次近似值 x_0 出发，用下面迭代公式反复地进行计算

$$x_{n+1} = F(x_n) \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

直到满足下面的收敛条件为止。

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

例 1－1　已知某梯形断面渠道的底宽 $b = 8$m，边坡系数 $m = 1.5$，粗糙系数 $n = 0.025$，底坡 $i = 0.0009$，通过设计流量 $Q = 15\text{m}^3/\text{s}$，试编写用迭代法求此渠道中正常水深 h_0 的程序。计算允许误差 $\varepsilon = 0.005$。

解：

（一）　主要公式

对于梯形断面渠道，其过水能力公式为

$$Q = \frac{1}{n} A R^{2/3} i^{1/2} = \frac{1}{n} \frac{A^{5/3}}{\chi^{2/3}} i^{1/2}$$

$$= \frac{1}{n} \frac{i^{1/2}}{(b + 2h_0 \sqrt{1 + m^2})^{2/3}} [(b + mh_0)h_0]^{5/3} \tag{1.1.6}$$

由此解得正常水深

$$h_0 = (\frac{n^2 Q^2}{i})^{0.3} (b + 2h_0 \sqrt{1 + m^2})^{0.4} / (b + mh_0) \tag{1.1.7}$$

其迭代公式为

$$h_{0_{n+1}} = (\frac{n^2 Q^2}{i})^{0.3} (b + 2h_{0_n} \sqrt{1 + m^2})^{0.4} / (b + mh_{0_n}) \tag{1.1.8}$$

(二) 变量说明表

程序中	公式中	意　义
M,N	m,n	边坡系数，粗糙系数
I,B	i,b	底坡、底宽
Q	Q	流量
EPS		迭代允许误差 ε
C		$C=n^2Q^2/i$，常数
H1	h_1	迭代初始水深
D,E		中间变量，见(1.1.8)式
H0	h_0	正常水深

(三) 程序

```
C         COMPUTATION  OF  NORMAL  DEPTH  OF  ITERATION
C         METHOD
C
          REAL  M,N,I
          READ(*,*)  M,N,I,B,Q,EPS
```

```
      C=N*N*Q*Q/I
      H1=0.5
10    D=B+2*H1*SQRT(1+M*M)
      E=B+M*H1
      H0=C**0.3*D**0.4/E
      IF(ABS(H0-H1).GT.EPS)  THEN
      H1=H0
      GO  TO  10
      ELSE
      END  IF
      WRITE(*,222)
222   FORMAT(6X,'INPUT DATA'/)
      WRITE(*,1)M,N,I,B,Q,EPS
 1    FORMAT(6X,'M=',F8.4,10X,'N=',F8.4/6X,
   *  'I=',F8.4,10X,'B=',F8.4,'(M)'/6X,'Q=',
   *  F8.4,'(M3/S)',4X,'EPS=',F6.4)
      WRITE(*,444)
444   FORMAT(/6X,'RESULTS  OF  COMPUTATION'/)
      WRITE(*,2)H0
 2    FORMAT(6X,'H0=',F6.4,'(M)')
      STOP
      END
```

（四） 输出

```
INPUT  DATA
M=    1.5000              N=     .0250
I=     .0009              B=   8.000(M)
Q=  15.0000(M³/S)         EPS=  .0050
RESULTS  OF  COMPUTATION
H0=1.2655(M)
```

二、牛顿-拉普森(Newton－Raphson)的切线法

我们的任务是求方程

$$f(x)=0 \tag{1.1.9}$$

的根。在图 1.1.2 上画出了(1.1.9)式的函数图形。假设 x 初始值为 x_0,其相应的函数值为 $f(x_0)$,通过点$(x_0,f(x_0))$切线的斜率为

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1} \tag{1.1.10}$$

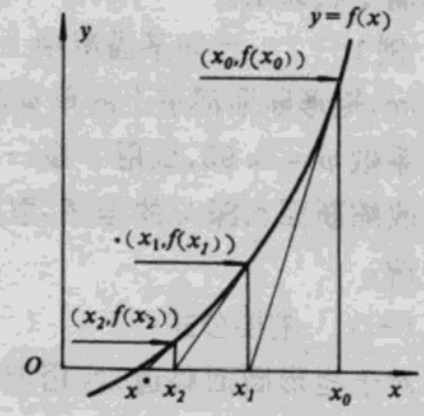

图 1.1.2

由此式解得

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{1.1.11}$$

由式(1.1.11)可以求得切线与 x 轴的交点 x_1。接着对于 x_1 同样地可以求得函数曲线上的点$(x_1,f(x_1))$,由(1.1.10)式和(1.1.11)式同样地可以求得函数曲线在此点的切线斜率 $f'(x_1)$ 和此切线与 x 轴的交点 x_2。如此反复地进行同样的操作,函数曲线与 x 轴的交点将收敛于真根 x^*。一般式为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1.1.12}$$

收敛条件为

$$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon \tag{1.1.13}$$

切线法是平方收敛的,收敛的速度较快,但是,后一次的迭代误差与前一次迭代误差的平方成比例,即 $\varepsilon_{n+1}\infty\varepsilon_n^2$。

计算步骤:

1. 由函数 $f(x)$ 求其导数 $f'(x)$;

2. 由初始值 x_0 出发,返复地用下式计算

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

直到满足收敛条件　　$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$　　为止。

例 1 － 2　已知某溢流坝上游断面对下游河底的比能 $E_0=20\text{m}$，矩形断面河道上的单宽流量 $q=10\text{m}^2/\text{s}$，溢流坝面的流速系数 $\varphi=0.95$，试用牛顿－拉普森方法编写计算溢流坝下游收缩断面水深 h_c 的程序。取允许误差 $\varepsilon=0.005$。

解：

（一）　主要公式

对于矩形断面渠道，实用堰和跌坎下游收缩断面水深 h_c 的计算公式为

$$E_0=h_c+\frac{q^2}{2g\varphi^2h_c^2} \tag{1.1.14}$$

令　　　　$A=2g\varphi^2, B=2g\varphi^2E_0, C=q^2$

则得　　　　$Ah_c^3-Bh_c^2+C=0$

即　　　　$f(h_c)=Ah_c^3-Bh_c^2+C$　　　　(1.1.15)

$f(h_c)$ 的导数为　　$f'(h_c)=3Ah_c^2-2Bh_c$　　　　(1.1.16)

将(1.1.15)，(1.1.16) 两式代入下式中

$$h_{c_{n+1}}=h_{c_n}-\frac{f(h_{c_n})}{f'(h_{c_n})} \tag{1.1.17}$$

就可以求得 h_c。

（二）　变量说明表

程序中	公式中	意　义
E0	E_0	坝上游断面的总比能
Q,PHI	q,φ	单宽流量，坝面流速系数
EPS	ε	允许误差
G	g	重力加速度
A		$A=2g\varphi^2$，常数
B		$B=2g\varphi^2E_0$，常数

C		$C=q^2$,常数
HC1	h_{c1}	收缩断面水深的初始值
F		由(1.1.15)式确定
DF		由(1.1.16)式确定
HC	h_c	由(1.1.17)式确定

(三) 程序

```
C         COMPUTATION  OF  CONTRACT--SECTION  DEPTH
C         OF  NEWTON--RAPHSON  METHOD
C
          READ(*,*)  E0,Q,PHI,EPS
          G=9.8
          A=2*G*PHI*PHI
          B=A*E0
          C=Q*Q
          HC1=0.1
   10     F=A*HC1**3-B*HC1**2+C
          DF=3*A*HC1**2-2*B*HC1
          HC=HC1-F/DF
          IF(ABS(HC-HC1).GT.EPS)  THEN
          HC1=HC
          GO  TO  10
          ELSE
          END  IF
          WRITE(*,222)
  222     FORMAT(/6X,'INPUT  DATA'/)
          WRITE(*,1)  E0,  Q,  PHI,  EPS
    1     FORMAT(6X,'E0=',F7.3,'(M)',7X,'Q=',F7.3,
     *    '(M2/S)'/6X,'PHI=',F6.3,10X,'EPS=',F5.3)
          WRITE(*,444)
  444     FORMAT(/6X,'RESULTS  OF  COMPUTATION'/)
          WRITE(*,2)  HC
    2     FORMAT(6X,'HC=',F7.3,'(M)')
          STOP
```

```
        END
```

（四） 输出

```
INPUT   DATA
E0=20.000(M)                    Q=10.000(M2/S)
PHI= .950                       EPS=.005
RESULTS  OF  COMPUTATION
HC=  .539
```

三、二等分法

切线法是确定初值后使其逐渐逼近真根的一种方法。但是,它需要求函数的导数。当函数本身比较复杂时,就很难求到它的导数。为此下面介绍常用的二等分法(Dichotomy)。

假设方程 $$f(x)=0 \tag{1.1.18}$$

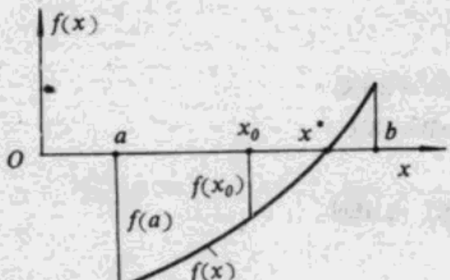

图 1.1.3

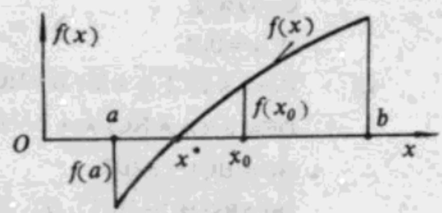

图 1.1.4

在区间(a,b)内只有一个实根x^*。如图1.1.3,图1.1.4所示,取其中点$x_0=(a+b)/2$,将区间(a,b)二等分,然后进行根的扫描,即检查$f(x_0)$与$f(a)$是否同号。如果同号,如图1.1.3所示,说明根x^*在x_0的右侧,这时令$a_1=x_0,b_1=b$;如果异号,如图1.1.4所示,说明根x^*在x_0的左侧,这时取$a_1=a,b_1=x_0$。这样得到新的有根区间(a_1,b_1),其长度为原区间(a,b)长度的一半。

对于缩短了的有根区间(a_1,b_1),又可以采用与上述同样的方法,即取中点$x_1=(a_1+b_1)/2$,将区间(a_1,b_1)二等分,然

后通过扫描确定根 x^* 在 x_1 的左侧还是右侧，从而又确定一个新的有根区间 (a_2,b_2)，其长度为 (a_1,b_1) 的一半。如此反复地二等分下去可以得到下面的有根区间系列

$$(a,b),(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots\cdots,(a_k,b_k),\cdots\cdots$$

其中每个区间长度都是前个区间长度的半，因此区间 (a_k,b_k) 的长度为

$$b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b-a) \qquad (1.1.19)$$

显然，如果二等分过程继续下去，这些区间最后必然收缩于一点 x^*，此点 x^* 就是所求的根。

在实际应用中的误差判别公式为

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon \qquad (1.1.20)$$

计算步骤：

1. 确定函数 $f(x)=0$ 和区间 (a,b)，计算函数值 $f(a)$；

2. 计算区间中点值 $x_0=(a+b)/2$ 和相应的函数值 $f[(a+b)/2]$；

3. 若 $f[(a+b)/2]=0$，则 $(a+b)/2$ 就是所求的根，否则进行根的扫描；

若 $f[(a+b)/2]\cdot f(a)>0$，则有根区间为 $[(a+b)/2,b]$，这时令 $a_1=(a+b)/2, b_1=b$；

若 $f[(a+b)/2]\cdot f(a)<0$，则有根区间为 $[a,(a+b)/2]$，这时令 $a_1=a, b_1=(a+b)/2$；

反复地进行 2，3 步骤，直到 $|x_{0_{n+1}} - x_{0_n}| < \varepsilon$ 为止，则 $x_{0_{n+1}}$ 即为所求的近似根。

例 1－3　已知某梯形断面渠道的底宽 $b=6\text{m}$，边坡系数 $\text{m}=1$，通过的流量 $Q=50\text{m}^3/\text{s}$，试编写用二等分法计算临