



◎新课程学习能力评价课题研究资源用书

◎主编 刘德 林旭 编写 新课程学习能力评价课题组

学习高手

状元塑造车间

学习技术化

TECHNOLOGIZING
STUDY

配人教 A 版

数学 必修 1

推开这扇窗。

- 全解全析
- 高手支招
- 习题解答
- 状元笔记



光明日报出版社



新课程学习能力评价课题研究资源用书

学习高手

状元塑造车间

数学 必修 1

配人教 A 版

光明日报出版社

图书在版编目(CIP)数据

学习高手. 数学. 1: 必修/刘德, 林旭主编. —北京: 光明日报出版社, 2009. 6
配人教 A 版
ISBN 978-7-5112-0101-0

I. 学… II. ①刘… ②林… III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 085644 号

学习高手

数学/必修 1(人教 A 版)

主 编: 刘 德 林 旭

责任编辑: 温 梦
策 划: 赵保国
执行策划: 聂电春

版式设计: 邢 丽
责任校对: 徐为正
责任印制: 胡 骑

出版发行: 光明日报出版社

地 址: 北京市崇文区珠市口东大街 5 号, 100062

电 话: 010-67078249(咨询)

传 真: 010-67078255

网 址: <http://book.gmw.cn>

E-mail: gmcbs@gmw.cn

法律顾问: 北京昆仑律师事务所陶雷律师

印 刷: 淄博鲁中晨报印务有限公司

装 订: 淄博鲁中晨报印务有限公司

本书如有破损、缺页、装订错误, 请与本社发行部联系调换。

开 本: 890×1240 1/32

字 数: 240 千字

版 次: 2009 年 6 月第 1 版

书 号: ISBN 978-7-5112-0101-0

印 张: 9

印 次: 2009 年 6 月第 1 次

定价: 15.90 元

版权所有 翻印必究

目录

第一章 集合与函数概念 1

走近学科思想 1

本章要点导读 1

1.1 集合 3

1.1.1 集合的含义与表示 ...3

高手支招 1 细品教材 3

高手支招 2 归纳整理 6

高手支招 3 综合探究 7

高手支招 4 典例精析 8

高手支招 5 思考发现 11

高手支招 6 体验成功 11

1.1.2 集合间的基本关系 ...15

高手支招 1 细品教材 15

高手支招 2 归纳整理 17

高手支招 3 综合探究 18

高手支招 4 典例精析 19

高手支招 5 思考发现 22

高手支招 6 体验成功 22

1.1.3 集合的基本运算 25

高手支招 1 细品教材 25

高手支招 2 归纳整理 27

高手支招 3 综合探究 27

高手支招 4 典例精析 28

高手支招 5 思考发现 32

高手支招 6 体验成功 33

1.2 函数及其表示 37

1.2.1 函数的概念 37

高手支招 1 细品教材 37

高手支招 2 归纳整理 41

高手支招 3 综合探究 41

高手支招 4 典例精析 42

高手支招 5 思考发现 47

高手支招 6 体验成功 47

1.2.2 函数的表示法 51

高手支招 1 细品教材 51

高手支招 2 归纳整理 55

高手支招 3 综合探究 55

高手支招 4 典例精析 56

高手支招 5 思考发现 61

高手支招 6 体验成功 62

1.3 函数的基本性质 65

1.3.1 单调性与最大(小)值

..... 65

高手支招 1 细品教材 65

高手支招 2 归纳整理 69

高手支招 3 综合探究 69

高手支招 4 典例精析 71

高手支招 5 思考发现 76

高手支招 6 体验成功 77

1.3.2 奇偶性 81

高手支招 1 细品教材 81

高手支招 2 归纳整理 83

高手支招 3 综合探究 84

高手支招 4 典例精析 84

高手支招 5 思考发现 89

高手支招 6 体验成功 89

本章总结	93
本章测试	101
第二章 基本初等函数(I)	106
走近学科思想	106
本章要点导读	106
2.1 指数函数	107
2.1.1 指数与指数幂的运算	107
高手支招 1 细品教材	108
高手支招 2 归纳整理	109
高手支招 3 综合探究	110
高手支招 4 典例精析	110
高手支招 5 思考发现	115
高手支招 6 体验成功	115
2.1.2 指数函数及其性质	119
高手支招 1 细品教材	119
高手支招 2 归纳整理	122
高手支招 3 综合探究	123
高手支招 4 典例精析	124
高手支招 5 思考发现	129
高手支招 6 体验成功	130
2.2 对数函数	134
2.2.1 对数与对数运算	134
高手支招 1 细品教材	134
高手支招 2 归纳整理	137
高手支招 3 综合探究	138
高手支招 4 典例精析	139
高手支招 5 思考发现	142

高手支招 6 体验成功	143
2.2.2 对数函数及其性质	146
高手支招 1 细品教材	146
高手支招 2 归纳整理	149
高手支招 3 综合探究	149
高手支招 4 典例精析	151
高手支招 5 思考发现	156
高手支招 6 体验成功	157
2.3 幂函数	161
高手支招 1 细品教材	161
高手支招 2 归纳整理	165
高手支招 3 综合探究	165
高手支招 4 典例精析	166
高手支招 5 思考发现	170
高手支招 6 体验成功	170
本章总结	175
本章测试	182
第三章 函数的应用	188
走近学科思想	188
本章要点导读	188
3.1 函数与方程	189
3.1.1 方程的根与函数的零点	189
高手支招 1 细品教材	189
高手支招 2 归纳整理	191
高手支招 3 综合探究	191
高手支招 4 典例精析	192
高手支招 5 思考发现	198

高手支招 6 体验成功	198
3.1.2 用二分法求方程的近似解	201
高手支招 1 细品教材	201
高手支招 2 归纳整理	203
高手支招 3 综合探究	203
高手支招 4 典例精析	204
高手支招 5 思考发现	208
高手支招 6 体验成功	209
3.2 函数模型及其应用	212

高手支招 1 细品教材	212
高手支招 2 归纳整理	215
高手支招 3 综合探究	215
高手支招 4 典例精析	216
高手支招 5 思考发现	222
高手支招 6 体验成功	222
本章总结	227
本章测试	231
综合测试	238
附录:教材习题点拨	245

第一章 集合与函数概念



走近学科思想

ZOUJINXUEKESIXIANG

数形结合思想

数形结合思想就是对题目中的题设和结论既分析其代数意义,又揭示其几何直观形象,使数量的精确刻画与空间形式的直观形象巧妙、和谐地结合在一起.充分利用这种结合,寻找解题思路,使问题化难为易,化繁为简.其实质是将抽象的数学语言与直观的图象结合起来,关键是代数问题与图形之间的相互转化,它可以使代数问题几何化,几何问题代数化.

在本章中,若能将集合用图形表示出来,如 Venn 图、数轴等,就能直观形象地展示集合之间的关系,快速进行集合之间的运算;在考查函数的值域、单调性、奇偶性时,若能结合函数的图象,常能使问题具体、直观,达到轻松获解的目的.



本章要点导读

BENZHANGYAO DIANDAO DU

知识要点	课标要求	学习技术
集合的含义与表示	1. 理解集合的概念,知道常用数集; 2. 了解有限集、无限集、空集的概念; 3. 掌握集合的表示方法及集合中元素的特征.	通过实例,从具体到抽象,形成集合的概念;通过观察分析,从集合中元素的特征、性质入手,尽量结合实例,体会、尝试把自然语言转化为集合语言来描述集合.
集合之间的关系与运算	1. 了解集合的含义,理解子集、交集、并集、补集的概念; 2. 掌握交集、并集、补集的有关性质,会利用集合的有关术语和符号,准确熟练地求出两个集合的交集、并集、补集.	要注意比较、辨析一些容易混淆的概念,如属于和包含、子集和真子集、交集和并集.另外,在研究集合之间的关系时,不要忽略了对空集这个特殊集合的讨论.



续表

知识要点	课标要求	学习技术
函数及其表示	1. 理解函数的基本概念,掌握求函数定义域、值域、解析式的常用方法; 2. 了解映射、一一映射的概念; 3. 能正确使用“区间”等记号,掌握函数的表示方法,尤其是解析法;了解分段函数.	结合具体丰富的生活实例以及在初中学过的一次、二次、反比例函数的基础上,进一步深刻理解函数概念的三要素:定义域、值域、对应法则;理解函数表示方法是体现变量与函数值的关系的方法,要抓住每个表示方法的优点和不足;另外,在解决有关函数问题时要重视数形结合思想的应用.
函数的单调性与最大(小)值	1. 了解增函数、减函数、函数的单调性、单调区间的概念; 2. 掌握判断一些简单函数单调性的方法和步骤,会求较简单函数在闭区间上的最值.	从常见函数的图象上,进一步体会函数的单调性及单调区间的定义;注意学会运用“数形结合”“观察归纳”“讨论”的数学思想方法研究函数单调性.
函数的奇偶性	1. 理解函数奇偶性的概念; 2. 掌握判断函数奇偶性的方法,能应用函数的奇偶性理解一些基本的函数问题.	通过观察图象的对称性,进一步理解函数奇偶性的定义.判断函数奇偶性应首先考查函数定义域是否关于原点对称,然后再根据 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系判断.另外要学会灵活运用数形结合、特殊到一般的数学思想方法.

1.1 集合

1.1.1 集合的含义与表示



草原上飞奔的马群，湖水里穿梭的鱼群，广场上来往的人群，一条直线上的所有点，一个方程的所有解，……如何用数学语言刻画“汇集在一起的一类对象”呢？本节课我们就来学习“一类对象的总体”——集合的含义与表示。



高手支招① 细品教材

一、集合的概念

一般地，我们把研究对象统称为元素，把一些元素组成的总体叫做集合。通常用大写拉丁字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a, b, c, \dots$ 表示元素。

技术提示 (1) 集合是一个整体。

(2) 构成集合的对象必须是“确定”的且“不同”的，其中“确定”是指构成集合的对象具有非常明确的特征，这个特征不是模棱两可的；“不同”是指构成集合的各个对象互不相同。

【示例】 下列各组对象能构成一个集合吗？请判断并说明理由。

- (1) 所有很大的实数；
- (2) 好心的人；
- (3) 方程 $x^2 - 4 = 0$ 在实数范围内的解；
- (4) 高一(3)班全体同学；
- (5) 中国古代的四大发明。

思路分析： 一组对象能否构成集合主要看这组对象能否确定，只要研究对象是确定的，就可以构成集合，否则就不能构成集合。

解： (1) “所有很大的实数”没有一个明确的标准去判断哪一个实数是很大的，不符合集合中元素的确定性，所以“所有很大的实数”不能构成一个集合；同理(2)中没有一个标准去判断某个人是否是好心人；(3)中方程 $x^2 - 4 = 0$ 在实数范围内的解就

状元笔记

判断一组对象能否构成集合关键是看这组对象是否确定，或者说对象的标准是否明确。



是2和-2,是确定的,故能构成一个集合;(4)(5)中的对象也是确定的,故也能构成一个集合.

二、集合中元素的特征

集合中的元素具有以下特征性质:

(1)确定性:设 A 是一个给定的集合, x 是某一具体对象,则 x 或者是 A 中的元素,或者不是 A 中的元素,两种情况必有一种且只有一种成立.

(2)互异性:“集合中的元素必须是互异的”,也就是,“对于一个给定的集合,它的任何两个元素都是不同的”,如方程 $(x-1)^2=0$ 的解集记为 $\{1\}$,而不能记为 $\{1,1\}$.

(3)无序性:集合与其中元素的排列次序无关,如集合 $\{a,b,c\}$ 与 $\{b,a,c\}$ 是同一集合.

【技术提示】 一个元素是否是该集合的元素是非常明确的,不存在模棱两可的元素;只要将一批元素写入某个集合,就意味着它们互不相同,这是解决含参数集合求值问题的重要依据.

【示例】 判断下列说法是否正确,并说明理由.

(1) $1, \frac{3}{2}, \frac{6}{4}, |-\frac{1}{2}|, \frac{1}{2}$ 这些数组成的集合有5个元素;

(2) 方程 $(x-3)(x-2)^2=0$ 的解组成的集合有3个元素.

思路分析: 组成集合的元素不能重复出现,如果两个数相等,则只能算集合中的一个元素.

解: (1)不正确. 对于一个给定的集合,它的元素必须是互异的,即集合中的任意两个元素都是不同的,而 $\frac{3}{2}$ 与 $\frac{6}{4}$ 相同, $|-\frac{1}{2}|$ 与 $\frac{1}{2}$ 相同,故由这些数组成的集合只有3个元素.

(2)不正确. 方程 $(x-3)(x-2)^2=0$ 的解是 $x_1=3, x_2=x_3=2$, 因此写入集合时只有3和2两个元素.

三、集合的相等

两个集合的构成元素一样,则称这两个集合相等.

【技术提示】 利用集合相等求表达形式不同的两个集合中某个参变量的数值时,必须同时注意检验元素是否满足互异性.

【示例】 由“ $x, xy, \sqrt{x-y}$ ”组成的集合与由“ $0, |x|, y$ ”组成的集合是同一个集合,则 x, y 的值是否是确定的? 若确定,请求出来;若不确定,则说明理由.

思路分析: 两个集合是同一个集合,必须满足两个集合的元素完全相同,而最后一个集合出现元素“0”,因而第一个集合中必“出现元素0”,它有三种情况. 结合元素的特征对它进行讨论即可.

解: 若 $x=0$, 则 $xy=0$, 这与互异性矛盾, $\therefore x \neq 0$.

若 $x \neq 0, xy=0$, 则 $y=0$, 则第二个集合的元素中出现了两个“0”,这与互异性矛盾, $\therefore xy \neq 0$.

由上述及题意可知 $\sqrt{x-y}=0$, 即 $y=x$, 由两个集合是同一个集合可知 $xy=|x|$, 即 $x^2=|x|$, 得 $x=\pm 1$, 但 $x=1$ 时, $y=1$, 也与互异性矛盾. $\therefore x=y=-1$.

故 x, y 是确定的, 即 $x=y=-1$.

四、元素与集合的关系

元素与集合有属于和不属于两种关系, 如果 a 是集合 A 的元素, 就说 a 属于集合 A , 记作 $a \in A$, 读作 a 属于集合 A ; 如果 a 不是集合 A 的元素, 就说 a 不属于集合 A , 记作 $a \notin A$, 读作 a 不属于集合 A .

(技术提示) 符号“ $\in$ ”“ $\notin$ ”是用来表示元素与集合之间关系的, 不能用在集合与集合之间; 一个元素 a 与一个集合 A , 要么有 $a \in A$, 要么有 $a \notin A$, 两者必具其一且只具其一.

五、特定集合的表示

为了书写的方便, 我们规定常见的数集用特定的字母表示, 下面是几种常见数集及符号:

数集名称	表示符号	包含元素
非负整数集(自然数集)	$\mathbf{N}$	全体非负整数
正整数集	$\mathbf{N}^+$ 或 $\mathbf{N}_+$	全体正整数
整数集	$\mathbf{Z}$	全体整数
有理数集	$\mathbf{Q}$	全体有理数
实数集	$\mathbf{R}$	全体实数

(技术提示) 判断一个数是否属于某个数集, 一要清楚“ $\in$ ”和“ $\notin$ ”的含义; 二要明确各数集符号所包含的元素.

【示例】 下列关系正确的个数是 ()

① $-\frac{1}{2} \in \mathbf{R}$ ② $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$ ③ $0 \in \mathbf{N}_+$ ④ $|-3| \notin \mathbf{N}_+$ ⑤ $4 \in \{\mathbf{N}\}$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

思路分析: 从各数值特征及各符号含义切入判断, 因为 $-\frac{1}{2}$ 是实数, $\sqrt{2}$ 是无理数, 所以①②正确. $\mathbf{N}_+$ 表示正整数, 所以 $0 \notin \mathbf{N}_+$; 而 $|-3|=3 \in \mathbf{N}_+$; 集合 $\{\mathbf{N}\}$ 中只有一个元素, 就是自然数集 $\mathbf{N}$, 它以集合为元素, 所以 4 不在该集合中, 于是③④⑤错误.

答案: B

六、集合的表示方法

1. 将集合中的元素一一列举出来, 并用花括号“ $\{ \}$ ”括起来表示集合的方法叫做列举法.

(1) 用列举法表示数集, 其一般形式为 $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, 其中 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 都是实数. 数集是高中数学中常见集合, 如一元一次方程和不等式的解, 函数的定义



域和值域构成的集合等。

(2)用列举法表示点集,其一般形式为平面内的点集: $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$;空间中的点集: $\{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)\}$.点集也是数学中常见的一种集合,常见的点集有函数图象上的点构成的集合,曲线上的点构成的集合,平面区域上的点构成的集合等。

2.用集合所含元素的共同特征表示集合的方法称为描述法。

描述法的语言形式有两种:文字语言和符号语言。

(1)文字语言形式描述要说明该集合中元素的特征,所有描述的内容都要写在集合符号内。

(2)符号语言形式描述要写清楚集合中元素的代号,并写在竖线前面;要写清楚元素所具有的共同特征,并写在竖线后面。

【技术提示】表示集合时,依据对象的特点或个数的多少采用适当的形式,如当集合中元素个数较少或集合中元素呈现一定的规律性时,一般采用列举法;大多数集合既可用列举法,也可用描述法。

【示例】用另一种方法表示下列集合:

- (1){绝对值不大于2的整数};
- (2){能被3整除且小于10的正数};
- (3) $\{x|x=|x|, x \in \mathbb{Z} \text{ 且 } x < 5\}$;
- (4) $\{(x, y)|x+y=6, x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}^*\}$;
- (5) $\{-3, -1, 1, 3, 5\}$.

思路分析:集合的表示方法主要有列举法和描述法两种,本题是将表示集合的其中一种形式写成另一种形式。

- 解: (1) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$;
- (2) $\{3, 6, 9\}$;
- (3) $\because x=|x|, \therefore x \geq 0$. 又 $\because x \in \mathbb{Z} \text{ 且 } x < 5, \therefore$ 集合为 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$;
- (4) $\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$;
- (5) $\{x|x=2k+1, -2 \leq k \leq 2, k \in \mathbb{Z}\}$.

状元笔记

用列举法表示集合时,要注意如下几点:

- ①要把集合中的元素都列举出来,写在花括号内;
- ②元素间分隔用逗号;
- ③元素不重复;
- ④元素无顺序;
- ⑤ $\{\}$ 表示所有的意思,故 $\{\text{所有实数集}\}$ 这种写法是错误的。



高手支招② 归纳整理

本节的主要内容是集合的概念与表示方法,重点是理解集合的概念,明确集合元素的三个特征性质,熟记常见的数集表示符号,会用列举法和描述法表示集合,并能进行二者的转化.在处理含参数的集合问题时,一定要注意集合元素的互异性。

集合及其表示法

- 集合:研究对象称为 ①,把 ② 组成的总体叫做集合
- 集合中元素的特征: ③、④ 和 ⑤
- 元素与集合的关系
 - 一个元素要么属于(⑥)一个集合
 - 要么不属于(⑦)该集合
- 集合的表示方法
 - ⑧ 法
 - ⑨ 法

答案

①元素 ②元素 ③确定性 ④互异性 ⑤无序性 ⑥ $\in$ ⑦ $\notin$ ⑧列举
⑨描述



高手支招 ③

综合探究

1. 集合概念的理解

集合是数学中最原始的不加定义的概念,我们只能对它进行描述定义,也就是用描述性语言对它加以解释和说明.理解集合的描述性定义时,应注意集合对象的确定性和集合的整体性,这两点是判定某些对象能否构成集合的标准.一般地,判定一组对象 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 是否能构成集合,就是看这些对象是否有一个确定的特征性质,如果有,就能构成集合;如果没有,就不能构成集合,这个特征性质显然不能模棱两可.在将一些对象归入一个集合时,要求这些对象互不相同,即一个对象在一个集合中只可能出现一次.

2. 列举法与描述法的比较

列举法与描述法各有特点,应该根据具体问题确定采用哪种表示法.

(1)列举法有直观、明了的特点,但有些集合是不能用列举法表示出来的,如 $x > 3$ 的集合.

(2)描述法把集合中元素所具有的特征性质描述出来,具有抽象性和概括性的特点,是一种普遍使用的方法.

(3)对一个集合变换表示方法时,常按下述过程进行:

列举法 $\xrightarrow[\text{根据特征性质,找出具体元素}]{\text{通过对元素规律的观察概括出特征性质}}$ 描述法

3. 元素分析法解集合题

解决集合问题,应建立在深刻理解集合概念的基础之上,解题时能不能把集合转化为相关的数学知识是解题的关键.而集合离不开元素,所以分析元素是解决集合问题的核心.元素分析法就是抓住元素进行分析,即元素是什么,是否满足集合元素的三个特征性质(确定性、互异性、无序性).如 $-3 \in \{a-3, 2a-1, a^2+4\}$,如何求出 a 的值呢?由于 -3 是集合的一个元素,所以 -3 可以是集合中三个元素的某一个,显然 a^2+4 不可能为 -3 ,所以 $2a-1=-3$ 或 $a-3=-3$.若 $2a-1=-3$,则 $a=-1$,此时集合为 $\{-4, -3, 5\}$;若 $a-3=-3$,则 $a=0$,此时集合为 $\{-3, -1, 4\}$,两种情况



都符合条件. 如果某种情况下 a 使得集合中的两个数值相等, 这就与互异性矛盾, 应当舍去此值.



高手支招④ 典例精析

题型分类详解

题型 1. 集合的概念

【例 1】考查下列每组对象能否构成一个集合.

①美丽的小鸟; ②不超过 20 的非负整数; ③立方接近零的正数; ④直角坐标系中, 第一象限内的点; ⑤ 1, 2, 3, 1.

高手点睛 根据集合的概念, 考虑每组对象是否有明确的标准将它的对象确定下来.

思维流程 分析各组对象 → 是否确定 → 是否互异 → 作出判断

解: ①中“美丽”的范畴太广, 不具有集合元素的确定性, 因此不能构成集合; ②中的元素可以列举出来: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 共 21 个数; ③中接近 0 的界限不明确; ④中元素具有无限个, 但条件明确, 即所有横纵坐标均大于 0 的点均在该集合中; ⑤中只有四个元素, 条件明确, 但由于有两个 1, 不满足互异性, 所以不能构成一个集合.

综上所述, ②④能构成集合, ①③⑤不能构成集合.

技术感悟

判定元素能否构成集合, 关键看这些元素是否具有确定性和互异性. 如果条件满足就可以断定这些元素可以构成集合, 否则不能构成集合.

题型 2. 集合元素的特征

【例 2】写出下列各题中的集合:

(1) 已知集合 $M = \{x \in \mathbf{N} \mid \frac{6}{1+x} \in \mathbf{Z}\}$, 求 M ;

(2) 已知集合 $C = \{\frac{6}{1+x} \in \mathbf{N} \mid x \in \mathbf{Z}\}$, 求 C .

高手点睛 (1) 集合 M 中的元素是自然数, 且能使得 $\frac{6}{1+x}$ 是整数; (2) 集合 C 中的元素是自然数 $\frac{6}{1+x}$, 其中 x 是整数.

思维流程 (1) $x \in \mathbf{N}, \frac{6}{1+x} \in \mathbf{Z} \rightarrow 1+x=1, 2, 3, 6 \rightarrow$ 结论

(2) $x \in \mathbf{Z}, \frac{6}{1+x} \in \mathbf{N} \rightarrow \frac{6}{1+x}=6, 3, 2, 1 \rightarrow$ 结论

解: (1) $\because x \in \mathbf{N}$, 且 $\frac{6}{1+x} \in \mathbf{Z}$, $\therefore 1+x=1, 2, 3, 6$.

$\therefore x=0, 1, 2, 5$. $\therefore M=\{0, 1, 2, 5\}$.

(2) 结合(1)知, $\frac{6}{1+x}=6, 3, 2, 1$. $\therefore C=\{6, 3, 2, 1\}$.

技术感悟

考查集合时, 首先要搞清楚集合的代表元素是什么, 其次要明确元素具备什么样的特征, 然后列出满足这些特征需要具备的条件, 这是依据元素研究集合的常规途径.

题型 3. 集合的相等

【例 3】已知 $M=\{2, a, b\}$, $N=\{2a, 2, b^2\}$, 且 $M=N$, 试求 a 与 b 的值.

高手点睛 两个集合中的元素完全相同, 且满足互异性.

思维流程 $M=N \xrightarrow{\text{对应元素相同}} \begin{cases} a=2a, \\ b=b^2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=b^2 \\ b=2a \end{cases} \xrightarrow[\text{用互异性检验}]{\text{解方程组}} \text{结论}$

解: 根据集合中元素的互异性, 有

$$\begin{cases} a=2a, \\ b=b^2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=b^2, \\ b=2a. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=0, \\ b=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=0, \\ b=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=\frac{1}{4}, \\ b=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

再根据集合中元素的互异性, 得 $\begin{cases} a=0, \\ b=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=\frac{1}{4}, \\ b=\frac{1}{2}. \end{cases}$

技术感悟

集合相等则它们的元素完全相同, 据此可建立方程组, 而互异性则是检验各解是否符合题意的标准.

题型 4. 集合的表示

【例 4】用适当的方法表示下列集合:

(1) 方程组 $\begin{cases} 2x-3y=14, \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ 的解集;

(2) 直角坐标平面上在直线 $x=1$ 和 $x=-1$ 的两侧的点所组成的集合.

高手点睛 (1) 所给方程组只有一个解, 可用列举法; (2) 中的点有无数个, 应该用描述法.

思维流程 (1) 解方程组 $\rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases} \rightarrow \text{列举法表示}$

(2) 点有无穷多个 $\rightarrow \text{描述法表示} \rightarrow \text{根据点的特征写集合}$



解: (1) 由于方程组 $\begin{cases} 2x-3y=14, \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x=4, \\ y=-2, \end{cases}$

故宜用列举法表示为: $\{(4, -2)\}$.

(2) 点有无穷多个, 宜用描述法: $\{(x, y) | x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$.

技术感悟

若集合中元素不太多, 一般用列举法; 若元素个数较多或无法数清, 多用描述法; 当元素个数很多或无穷多但具有一定的规律性时, 也可用列举法表示, 要求列举出来的元素能显示出其规律性.

题型 5. 求集合中的参数

【例 5】已知集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0\}$.

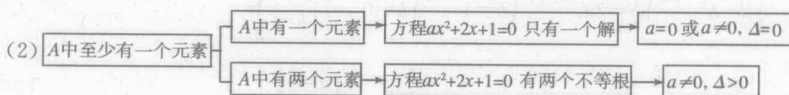
(1) 若 A 中只有一个元素, 求 a 的取值范围;

(2) 若 A 中至少有一个元素, 求 a 的取值范围.

高手点睛 只有一个元素, 就是有且只有一个元素, 意味着方程是一次方程或是二次方程且判别式为零; 至少有一个元素则包含有一个元素和两个元素两种情况.

思维流程 (1) A 中只有一个元素 $\rightarrow$ 方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 只有一解 $\rightarrow$

$a=0$ 或 $a \neq 0, \Delta=0$



解: (1) $\because$ 方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 只有一个解, 若 $a=0$, 则 $x = -\frac{1}{2}$;

若 $a \neq 0$, 则 $\Delta=0$, 解得 $a=1$,

此时 $x=-1$. $\therefore a=0$ 或 $a=1$ 时, A 中只有一个元素.

(2) ① A 中只有一个元素时, $a=0$ 或 $a=1$.

② A 中有两个元素时, $\begin{cases} a \neq 0, \\ \Delta > 0, \end{cases}$ 解得 $a < 1$ 且 $a \neq 0$.

综上, $a \leq 1$.

技术感悟

集合元素个数与方程的根的个数结合在一起考查, 注意方程中二次项的系数含有字母时, 应当按要求分类讨论, 而不能一味将其当成二次方程, 否则将会导致丢解.

高考实战体验

【例 6】(2007 全国高考卷 I, 理 5) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 集合 $\{1, a+b, a\} = \{0, \frac{b}{a}, b\}$, 则 $b-a$ 等于 ()

A. 1

B. -1

C. 2

D. -2

(高手点睛) 将两集合相等转化为对应元素相同, 建立方程组求解, 运用互异性检验.

(思维流程) 集合相等 $\rightarrow a+b=0$ 或 $a=0$ $\xrightarrow{a \text{ 在分母上}}$ $a \neq 0$ $\rightarrow$

$a+b=0$, 则 $\frac{b}{a} = -1$ $\xrightarrow{\text{由两集合相等}}$ $a=-1, b=1$ $\rightarrow$ 结论

答案: C

(技术要领) 考查集合相等关系时, 通常用元素对应相等建立方程, 需注意隐含条件的应用及互异性的检验, 分类讨论是其中最重要的思想方法.

【例 7】 (2008 江西高考, 2) 定义集合 $C=A*B=\{z|z=xy, x \in A, y \in B\}$, 设 $A=\{1, 2\}$, $B=\{0, 2\}$, 则集合 C 的所有元素之和为 ()

A. 0

B. 2

C. 3

D. 6

(高手点睛) 从集合 A 中分别取元素 1, 2 给 x , 再从集合 B 中分别取元素 0, 2 给 y , 搭配成四对, 计算 x 与 y 的乘积, 再将结果求和.

(思维流程) $x=1$ 或 $2, y=0$ 或 $2 \rightarrow$ 计算 $xy=0$ 或 2 或 $4 \rightarrow 0+2+4=6$

答案: D

(技术要领) 新定义类型的问题, 首要的是理解定义的含义, 根据定义做题, 处理好相关信息, 逐个分析, 分类讨论是常用的方法.



高手支招 5 思考发现

1. 符号“ $\in$ ”“ $\notin$ ”只能用于元素与集合之间, 表示元素与集合的从属关系, 如 $0 \in \mathbb{N}, 0 \notin \mathbb{N}^*$ 等.

2. 列举法表示集合的优点是可以明确集合中具体的元素甚至元素的个数, 缺点是使用列举法表示集合, 往往不能直接反映集合中元素满足的条件. 描述法则正好相反, 它能明确显示该集合中

元素的公共特征, 但不能直接显示其具体元素和元素个数, 掌握二者的相互转化是学好本节的关键点.

3. 注意 a 与 $\{a\}$ 的区别, a 是集合 $\{a\}$ 的一个元素, 而 $\{a\}$ 是含有一个元素 a 的集合, 二者的关系是 $a \in \{a\}$.

4. 我的发现:



高手支招 6 体验成功

基础巩固

1. 对集合 $\{1, 5, 9, 13, 17\}$ 用描述法来表示, 其中正确的一个是 ()