



小寧學代數

(一)

代數的基本概念

馬文元 陳文彥編著
山東人民出版社

0122.



小學學代數

[一冊]

作者：陳維德、李國定

[一冊]

香港中文大學出版社
香港中文大學

Chapter

0 122
18/

15.131
232
VI(4/)

小 寧 學 代 數

(一)

代 數 的 基 本 概 念

馬 文 元 陳 文 彥 編 著

書號: 1308

小 寧 學 代 數 (一)

編著者: 馬 文 元 陳 文 彥

山東省書刊出版業營業許可證出〇〇一號

出版者: 山 東 人 民 出 版 社

濟南經九路勝利大街

發行者: 新 華 書 店 山 東 分 店

濟南經九路勝利大街

印刷者: 山 東 新 華 印 刷 廠

濟南經九路三十六號

開本: 787 × 1092 1/32

印張: 1 7/8

字數: 36千

〔濟〕 10,001—20,000

1955年9月第 一 版

1955年12月第一版第三次印刷

定價 一角七分

出版者的話

本書是供給高小畢業生、初中一二年級同學、小學教師和學習文化的幹部等初學代數的讀者自學用的一種讀物，內容不超出初中代數課本的範圍，但只着重講解一些基本概念和基本算理。全書暫分三冊，第一冊的內容是「代數的基本概念」，第二冊是「代數的恆等變形」，第三冊是「代數方程」。

序

初學代數的時候，一般遇到的困難，並不是那些運算方法，而是一些基本概念。有了算術的知識以後，進一步學習代數運算，並不難，但是要想弄懂各種運算的道理，就必須掌握那些基本概念，初學者的困難，恰好就在這裏。如果光學會了加、減、乘、除，分解因式，解方程等等，就認為够了，根本不想弄懂代數究竟是怎樣一回事，結果祇是會套公式，背規則，死刻板板地演算；這種知識是書本上的，不是在自己腦子裏加過工的，不能算作自己的知識。

因此在開始學習代數的時候，開動腦筋，弄懂其中最基本的道理，是完全必要的。

代數和其他科學一樣，是在人類生活實踐中發展起來的，它以算術為基礎，又是算術的發展。由於文字符號的採用，使推理的方法抽象化；數系的擴張，使運算的規律一般化；方程的建立，使應用的範圍推廣；變量的探討，反映了自然現象中的函數依從關係。這些重要概念的發展過程，構成了代數的基本內容。初學的人必須下些工夫，初步掌握了它們，才能夠懂一點代數，為學習其他科學打下基礎。

本書編寫的主要意圖是通過生動的事例，向讀者介紹這些基本概念是怎樣產生的；通過反覆討論，幫助讀者認識它

們的發展過程和實際意義；並且鼓勵讀者，通過實踐，深入鑽研，使初步掌握了的概念獲得鞏固。說簡單一些，就是想幫助讀者，不僅光會運算，還要懂些道理。

但是，限於編寫者的能力，主觀願望未必完全符合客觀的需要，因此願意徵求讀者的寶貴意見。

編 者

一九五五年

目 錄

(一) 算術怎樣發展成代數	1
候車室內巧遇老師	1
車開後從算術談起	3
算術發展成爲代數經過三個階段	9
(二) 什麼是代數式	15
從代數符號談起	15
再談一談代數式的妙用	18
車過天津談起難題	21
(三) 正數和負數	22
從小數怎樣減去大數	22
正負數的大小比較	28
正負數的加減法	31
正負數的乘除法	35
稍微談談代數式的算法	38
(四) 什麼是方程	41
從買幾包糖果談起	41
怎樣解方程呢	43
方程有什麼用處	47

(一) 算術怎樣發展成代數

候車室內巧
遇老師

小寧是一個初中一年級的學生，在北京讀書；學校剛放暑假，他收拾了行李，準備回到家鄉——濟南。當他走到車站的時候，才知道離開車大約還有兩小時。祇好走進候車室，找一個椅子坐下，從手提包裏面拿出來剛買到的報紙，仔細地看起來。過了一會，他放下報紙，向周圍看了一看，發現在正對面坐着一位中年人，大概是近視眼，拿着一本書，好像捂着臉似的，正看得入神。小寧看見封面上印着「代數」兩個字，不由得心裏一動，想起臨放假的時候，李老師在算術堂上說：「你們這學年把算術學完，下學年就要學代數了。代數比算術更有用，各種科學裏面都要用代數。在暑假裏，最好先找一本代數教科書，自己看一看，有不明白的地方，找家長或老師去問一問，預習一下。如果能先學懂一點代數，下學年學習的時候，一定不覺得困難了。」

停了一下，繼續想道：「這不就是一本代數教科書嗎？這位先生一定懂得代數，看書真入神，我能不能向他問一問什麼是代數呢？」一面想，一面站了起來，向對面走近一些。看書的那位先生似乎察覺出來，馬上把書往下一放，抬起頭來微微一笑。小寧仔細看來，哎呀！原來正是自己學校

裏面，教初中二年級代數的王老師。心裏想：「這倒巧哩！」便非常高興地跑了過去，問道：「王老師到什麼地方去，坐哪一趟車？」王先生笑了一笑說：「我上青島，你呢？」小寧越發高興了，趕快回答：「我回濟南，正好和老師一道走。」王老師也很愉快地說：「這倒不寂寞了。」小寧把自己的行李提了過來，坐在王老師的近旁。開始了下面的談話：

「王老師，您下學年教我們代數嗎？」

「你是在初中一年級嗎？暑假後入初中二年級，正是我教你們代數。」

「教我們算術的李老師說，代數挺重要，有很多用處，讓我們在暑假裏預習一下，不明白的地方找老師們問一問，他說要能夠預先弄懂一點代數，下學期學習的時候就不困難了。您說，代數到底是什麼呢？」

「李老師的話很對，代數的確很重要，學好代數就為學習其他數學和自然科學打下了基礎。你們在二年級要開始學代數，一直學到高中畢業，內容相當複雜。在開始學習的時候，就把它當作推廣的算術，在算術的基礎上逐步擴充，數的範圍擴大了，運算的方式方法一般化了，解決問題的步驟系統化了；初學的時候，無妨認為它是以算術為基礎，又是算術的發展。」

「怎樣發展的呢？」

「這話說起來很長，看看是不是該進站了？」

小寧正聽得入神，差不多忘了自己正在候車室。聽王老師提醒，向四面一望，原來在候車室的旅客們正紛紛提起行

李，走向站台。小寧和王老師也就收起書報，拿着自己的東西，隨着進站的行列，走到檢票口，檢票進站。天有些熱，上車後王老師把車窗打開，微微吹進一些風來。小寧說：「老師，您的代數書呢？我先看一看可以嗎？」王先生從書包裏抽出剛才自己看的那本代數，交給小寧，說：「你看，這就是你們暑假後要學的代數。」

小寧接過書來，急忙忙地一頁一頁地看過幾頁，覺得真是有些像算術，有整數和分數，有加、減、乘、除各樣演算符號，有大括號和小括號，有表示兩個數大小一樣所用的等號，這是和算術一樣的地方，自己都認識。可是又有些字母 a, b, c, \dots, x, y, z 等等，同數目字和各種符號一堆堆一串串排列在一起。這是什麼呢？還有些畫圖，像棋盤一樣，又有很小的數目字放在字母的右肩上，像小風帽一樣的東西（ $\sqrt{\quad}$ ）放在字母的頭上。呵！這都是什麼東西，越看越有意思，可是越看越不明白。

「王老師，這就是代數？比算術難多了！」

「不難，不難，容易懂，祇要用心學，一學就會。」

這時候汽笛嗚嗚地叫起來，車慢慢開動了，小寧繼續看書，不知不覺已離開了北京。

車開後從算
術談起

火車越走越快，漸漸走到郊外。鐵路兩旁的莊稼，綠黝黝的，一眼望不到邊際。小寧放下書，坐在王老師的對面，又談起來了：

「你這一年學算術，成績不錯吧！」

「李老師說我知道用心學，學年考試也勉強得了五分，可

是我自己總覺有些問題弄不清，比方說三百二十五這個數，寫出來就是一個3，一個2，一個5排成一列(325)，我就不明白這是誰想出來的辦法。又像是75被6除，商數是12，餘數是3，老師說如果用6的2倍，3倍，4倍，6倍或12倍去除75，商數就要順次縮小為6、4、3、2、1，可是餘數始終不改變，我試一試，真對，但也說不出道理來。]

[你說的問題很好，可見當你學算術的時候，並不是僅僅學會了一些算法，就自覺滿意；你是有心鑽研，想把道理弄懂，用這種精神去學算術，一定能學好，就是暑假後要學代數，將來要學其他的數學，也可以學好。我現在先來談一談你所說325的問題，從這一個小問題，你就能認識到算術的起源和發展。]

[老師談吧，讓我寫一些筆記。]小寧說着話，從衣袋掏出筆和筆記本，用心聽王老師講。

[上古的人民，由於生活上的需要，漸漸有了較完備的語言，漸漸有了記載數目的方法。比方他們看見月亮圓了一次，就要記住這是一個月；看見樹發了一次芽，就要記住這是一年；看見太陽起落一次，就要記住這是一天；甚至牧養了幾頭牛羊，獵取了幾隻野獸，都需要有記載。因此用刀斧在樹幹或石壁上刻劃幾個縱橫綫條，用來表示日數，月數，年數，鳥獸隻數，以及其他日常生活上需要記載的數目。不知經歷了多少年代，才形成了各民族記載數目所用的文字或符號。像我們祖國的碼字一二三或丨||川等等，就有兩三千年可靠的歷史。世界上各民族，差不多都有他本民族古代勞動人民所創造的記數符號，像你們在算術裏學過的阿拉伯數

字、羅馬數字等等，都有很長久很複雜的歷史。]

「李老師說，現在世界通用阿拉伯數字，因為它很方便，它的好處究竟是什麼呢？」

「這種數字有一些優點：第一，它是十進制，寫出來的數，使人一望而知其大小；第二，它有一個零，放在空位上，使人容易辨認；第三，用它可以表達分數和小數；第四，用它來演算很方便，因此世界通用。」

「什麼是十進制呢？」

「這件事說起來怪有趣。」王先生一邊說話，一邊伸出雙手說：「你看，十進制起源於雙手的十個手指；印度古代人民爲了弄清楚自己大羣牛羊的頭數，往往用幾個人的手指來計算。比方要數一數一大羣牛是多少頭，先從牛羣裏面趕出來一頭，馬上有一個人伸出一個手指，記載了一，再趕出一頭，就再伸一個手指，記載了二，等到記載達到了十，馬上放下雙手，由站在他右邊的第二個人伸出一個手指，記載了一個十。這樣繼續數下去，直到第二個人伸出十個手指，記載達到一百，他也馬上放下雙手，由站在他右邊的第三個人伸出一指，記載了一百。等到牛已數完，再看這三個人最後各伸幾指，就能知道一共有幾百幾十幾頭牛。比方第一個人伸着五指，第二個人兩指，第三個人三指，這就說明了一共325頭牛。當時他們一定要用記號把所得結果記下來，這種記號就形成了古代的印度十進位制的數字，像你在算術書上所見到的那樣。用伸指計算的方法，不但能記載個十百千萬等數，而且可以作加減等簡單算法，這是不難想像出來的。因此我們可以推想印度古代勞動人民，怎樣通過生活的實踐，

創造了十進位的記數方法和數目字 1, 2, 3, ………9; 0。後來他們又創造了分數、小數的記號和算法，爲人類的算術知識，奠定了很好的基礎。]

〔李老師說，除十進法外，還有十二進法，六十進法等，又是怎樣產生的有什麼用處呢？〕

〔十進法的優點很多，可是也有缺點，比方把〔十〕分成三等分或四等分都不方便，因此在世界上各民族間還應用着各式各樣的數字和進位法。例如我們祖國大部分地區仍然採用十六兩爲一斤的十六進位法（東北地區已改十進位制）；英國還保存了十二英寸爲一英尺的十二進制度；許多種商品仍然用〔打〕、〔羅〕來計算；量角度時，世界上還通用着度、分、秒制（六十進位法）。十二進位法的優點是在於十二能分成三份或四份。六十進位法的優點也不少，你將來學高中數學就能體會出來了。至於怎樣產生的我們不去談它。〕

〔究竟有多少種進位法呢？〕

〔從歷史材料來看，記數和進位的方法以及數的符號等等是很多的，不過一些不切合實際需要的，漸漸被淘汰，由切合實用的來代替了。現在十進法成爲世界通用的記數的方法，這種方法或制度的特點，在於它的〔定位原理〕，比方 325，其中 5 在個位，2 在十位，3 在百位。位置確定，數值就隨之確定，位置變動，數值也隨之變動，例如 5 放在個位就是 5 個，放在十位，它的數值就是 5 個 10，也就是 10 的 5 倍， $5(10)$ ，放在百位，就是 5 個百，也就是 100 的 5 倍， $5(100)$ 或 $5(10)^2$ 。因此 325 就是 $3(10)^2 + 2(10) + 5$ 。〕

王先生一邊說一邊掏出一張紙片，用鉛筆寫出 $3(10)^2 +$

2 (10) + 5 來。

小寧接過紙片，看了一看，問王先生：「在10的外邊添上括號，前邊放一個2，就是2乘10嗎？爲什麼不用乘號？」

王先生回答：「可以不用乘號（ \times ），用2(10)就表示2乘10，用3(10)²就表示3乘100。」

小寧也掏出筆來，在紙片上寫出(10)³來，問王先生：「這個表示什麼呢？是不是10乘10再乘10呢？」

王先生笑了一笑說：「對！對！你的推想不錯，這個(10)³還可以寫成10³，連括號都不用，它代表1000；你一定能知道在10的右肩頭上如果放一個5，它代表什麼？」

小寧不加思索地回答說：「那就是十萬。呵！我明白了！在10的右肩頭放上一個整數，這個數是多少，它所代表的那個數在1的右邊就該有多少個0。」

王先生非常高興地說：「你真想得對，這個右肩頭上的數目字叫做指數，那個10叫做基數或底數，比方5³表示3個5相乘，叫做5的三乘方，5是底數，3是指數。在代數裏面，不但用數目字來表示數，還要用文字符號來代表任意的數，比方拉丁字母a, b, c, d等等，就是現在通常採用的字母，用它們來表示任意大小的數，不但可以代表整數，還可以代表分數、小數等等。例如ab就表示任意兩個數相乘的乘積，可以念做a和b的乘積，aa或a²就是任意一個數的二乘方，念做a的平方。在我們祖國，二百年前曾用甲、乙、丙、丁等文字來代表數，那時候用「甲²」來表示一個數的二乘方，道理是一樣，不過書寫不方便，在大約六七十年前，就採用了拉丁字母代表數，和現在世界通用的數學符號一律了。」

小寧想了一想說：「那末把字母當指數用，可以不可以？」

「可以」，王先生回答，「比方 a^c 就表示 c 個 a 相乘的結果，也就是 a 的 c 乘方。」

小寧說：「如果 c 是一個分數，比方 $\frac{1}{3}$ ， a 的 $\frac{1}{3}$ 乘方又是什麼意思呢？」

王先生說：「暫時我們不去談這個問題，將來你在高中一年級學代數，才能遇到用分數作指數的問題，現在我們可以祇談整數指數問題。」

「那末用指數是不是就爲了書寫方便呢？」

「不錯，開始採用指數的時候，確實是爲了方便，後來漸漸推廣，指數不但可以是整數，並且可以是分數等等，結果能使乘法和除法統一起來，後來更發展成了對數，實用的範圍越來越擴大，這些問題，你以後都能知道。」

「您剛剛說過，在10進法裏，325的意思是3個百，2個十和5個一，並且可以寫成 $3(10)^2 + 2(10) + 5$ 這個樣子，我們如果把10換成12，得到 $3(12)^2 + 2(12) + 5$ ，是不是十二進法裏的數值呢？」他說着，並且在紙片上寫了出來。

「對！這正是用十二進法表示的一個數，也可以寫成325，不過不要再念作三百二十五，好像我們買鉛筆，就是按十二進法計算，325的意思就是3羅2打零5個，^註因爲十二進法多少有些用處，所以也就有打、羅等專用名稱。其他種種進位法，除60進位法以外，很少有用，因此沒有簡單的記號，也沒有方便的讀法。」

「我們如果把10換成一個字母 a ，寫成 $3a^2 + 2a + 5$ ，這又該怎樣解釋呢？」

「這就應該說，算術發展成了代數。」王先生笑着說。

「呵！這就是代數！」

「用字母作符號來代替數，這是由算術漸漸發展而成的，字母是用來代表任意數的，它是抽象的數同時也是具體的數。例如 $2a$ 代表某一個數的兩倍，也就是2同另外一個數的乘積，我們不能指明它的大小，因此說它是抽象的；不過它和其他的數不同，它的大小肯定在 a 和 $3a$ 之間，因此又說它是具體的。我們在日常生活問題中，也常常用這種數，比方有一個人向一位朋友打聽家鄉裏面一個農業生產合作社發展的情況。他的朋友說：「太好了，自從建社，不到三年的時間，社裏的一切財產統統增加到原來的兩倍。」他說一切增加到兩倍，就是說凡是可以用數字來計算的東西，像是牛馬的頭數，用具的件數，公積金的錢數等等，不論三年前原來是多少，現在都增到兩倍了，原來的數如果是 a ，現在的數就是 $2a$ 了。」

「那末 $2a + 5$ 就是原來的 a 個增加到兩倍並且多了5個； $3a - 4$ 一定是比原來的3倍少了4個； $3a^2 + 2a + 5$ 一定是原數二乘方的三倍加上他本身的2倍再加上5個了。這太囉嗦，有什麼用處呢？」

算術發展成爲代
數經過三個階段

這時火車經過一個小站，停下來，王先生看看錶，車已走了大約一小時；有些餓了，便招呼小寧，一同到餐車上去。在吃飯的時候，小寧仍在默默思索， $3a^2 + 2a + 5$ 的意義稍稍知