2010版 数学考研

典型题

数学一和数学二

主　编　龚冬保
副主编　魏战线　张永怀
魏立线

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS
西安交通大学出版社考研图书网站 http://kaoyan.xjtupress.com

（2010 版）

数学考研典型题

（数学一和数学二）

主　编　龚冬保

副主编　魏战线　张永怀　魏立线

西安交通大学出版社

·西安·

内 容 简 介

本书自1999年问世以来,2009版是最新修订版,也是本书第11版.由于本书的例题和练习题精典,所以在本书问世后的9年中,每年均以高分覆盖当年考题,深受考生欢迎.例如2000年,书中36道题命中考题中非客观题(大题)27道(次)(数学一,8题49分;数学二,7题44分;数学三,6题41分;数学四,5题44分);2001年覆盖考题66道(次)332分(数学一68分,数学二90分,数学三83分,数学四91分);2002年覆盖考题338分(数学一87分,数学二91分,数学三81分,数学四79分);2003年覆盖考题561分(数学一142分,数学二139分,数学三142分,数学四138分);2004年覆盖数学一试卷136分;2005年(数学一分册)覆盖数学一135分;2006年覆盖数学一146分.

本书第一部分是应试对策:讲的是复习备考及身临考场的策略;第二部分是典型题选讲与练习:选了1500余道题,其中500多道例题(包含了往届的考题),讲解采用分析、注释、一题多解等讲法,讲解解题的方法与技巧,所有练习题均给出了详细解答;附录是考卷分析:对新"考试大纲"问世后2007～2009年的数学考研考卷作了列表分析,将每套考卷的内容覆盖、数学能力、认知水平及难度都量化了.

本书可供准备考研的读者使用,也可供大学数学教师参考.

作者在网上为本书读者免费答疑,时间:2009年7月下旬至2010年1月考试前;答疑信箱:glsdy@126.com.

图书在版编目(CIP)数据

(2010版)数学考研典型题(数学一和数学二)/龚冬保主编. —11版.
—西安:西安交通大学出版社,2009.5
ISBN 978-7-5605-1967-8

Ⅰ.数… Ⅱ.龚… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-解题
Ⅳ.O13—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第025300号

书　　名　(2010版)数学考研典型题(数学一和数学二)
主　　编　龚冬保
责任编辑　叶涛

出版发行　西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路10号　邮政编码710049)
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真　(029)82668280
印　　刷　陕西新世纪印刷厂

开　　本　787mm×1 092mm　1/16　**印张** 26　**字数** 807千字
版次印次　2009年5月第11版　2009年5月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5605-1967-8/O·223
定　　价　38.00元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。
订购热线:(029)82665248　(029)82665249
投稿热线:(029)82664954
读者信箱:jdlgy@yahoo.cn

2010 版 前言

—— 兼评 2009 年考研试题

见到2009年数学的三套考研试卷，给我们的印象：还是基本功重要，今年的题看起来不难，但有的题综合性强，做起来总有些“弯”不好拐. 只有基本功过硬的考生，才能很轻松地考出好成绩. 狠抓基本功是我们所编辅导书与“模拟试卷”所坚持的一贯宗旨. 可以说，每年的数学试卷都不会使我们感到意外！下面挑几个典型题来加以说明.

例 1 当 $x \to 0$ 时，$f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小. 则(　　)

(A) $a = 1, b = -\dfrac{1}{6}$.　　(B) $a = 1, b = \dfrac{1}{6}$.　　(C) $a = -1, b = -\dfrac{1}{6}$.　　(D) $a = -1, b = \dfrac{1}{6}$.

解 这是三套试卷中均有的一道题.

运用我们书中强调的无穷小分析法：首先 $g(x) \sim -bx^3$ 是 x 的三阶无穷小，故 $a = 1$；由泰勒公式 $x - \sin x = \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$. 即得 $b = -\dfrac{1}{6}$. 选(A).

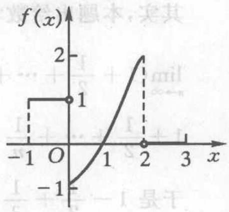
例 2 (1) $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 2$，则三阶矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为______.

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 则 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} =$ ______.

(3) 若 $\boldsymbol{\alpha} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (1,0,k)^{\mathrm{T}}$. 若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 则 $k =$ ______.

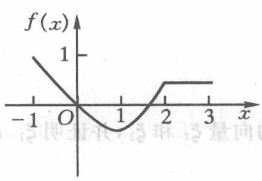
解 这三道题分别出自数学一、二、三试卷，考点与方法一样，只要解(1).

由于 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为 1，因此 0 是二重特征值，而由特征值之和是矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的迹，即是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 2$. 故非零特征值就是 2；同样(2)是(1)的逆问题，知 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} = 2$；(3) 中 $1 + 0 + k = 3$，故 $k = 2$. 这些题应不假思索即能写答案.

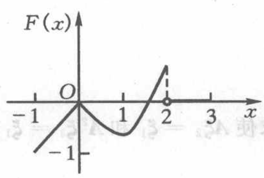


例 3 设 $y = f(x)$ 在$[-1,3]$上图形为(见右图)：

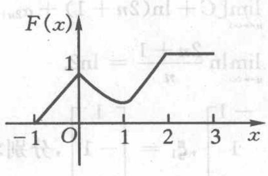
则 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 图形为(　　).



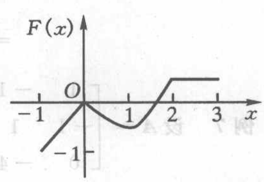
(A)



(B)



(C)



(D)

解 这是一道比较综合的好题. 这样看：在$[-1,0]$中，$F(x) = x$. 因此排除了(A)(C)两选项；而 $f(x)$ 在$[-1,3]$上有界可积，故 $F(x)$ 连续而排除(B)，便容易选到(D).

值得注意的是，数学一、二、三共同考的关于伴随矩阵的题.

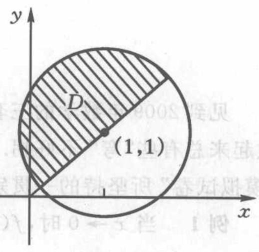
例 4　设 A、B 均为 2 阶矩阵，$|A|=2$，$|B|=3$，则 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^*$ 为（　　）.

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$.　　(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$.

解　由 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6E & O \\ O & 6E \end{pmatrix}=6E$. 知选(B).

在我们 2009 版的书上，有与此几乎是相同的例题.

例 5　计算 $\iint\limits_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2, y\geqslant x\}$.



例 5 图

解　这是一道要用"平移"变换的题，即令 $\begin{cases} x-1=r\cos\theta \\ y-1=r\sin\theta \end{cases}$. 如图. 则

$I=\int_{\pi/4}^{5\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r^2(\cos\theta-\sin\theta)\mathrm{d}r=-\frac{4}{3}$.

这是数学二和数学三一道 10 分题，基本功好，做起来都不用草稿. 但基本功稍差点的同学很容易将 r 的上限写作 2，或把 θ 的上下限写成 $0-\pi$，从而丢分.

例 6　a_n 为曲线 $y=x^n$ 和 $y=x^{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 所围面积，求 $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$.

解　$a_n=\int_0^1(x^n-x^{n+1})\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\ (n=1,2,\cdots)$. 因此

$$S_1=\lim_{n\to\infty}\left[(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})\right]=\frac{1}{2}.$$

而　$S_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots=1-(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots)=1-\ln 2$.

这道题仅在数学一试卷上，主要是命题人以为 S_2"难求"，其实，在我们书上十分强调"五个泰勒级数"，其中之一是

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$　　令 $x=1$ 即得 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots=\ln 2$

其实，本题出给数学二的考生也能作，就是用数列极限作，至于和 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$，在我们书上讲过

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n)=C$. 故有

$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\alpha_n$（$\alpha_n$ 是无穷小量）

$$\begin{aligned}于是\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots&=\lim_{n\to\infty}[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})]\\&=\lim_{n\to\infty}[C+\ln(2n+1)+\alpha_{2n+1}-(C+\ln n+\alpha_n)]\\&=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n+1}{n}=\ln 2.\end{aligned}$$

例 7　设 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$，$\xi_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$，分别求使 $A\xi_2=\xi_1$ 和 $A^2\xi_3=\xi_1$ 的向量 ξ_2 和 ξ_3，并证明 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

解　在解题前首先要看到 $A\xi_1=0$，及 A 的第三列向量正是 $-\xi_1$，$r(A)=2$，便容易得到 $A\xi_2=\xi_1$ 的通解是

$$\xi_2=(1,-1,1)^T+C_1\xi_1.\ (C_1\ 是任意实数)$$

$A^2=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$，$r(A^2)=1$，解得 $\xi_3=(\frac{1}{2},0,0)^T+C_2\xi_1+C_3(0,0,1)^T$

我们用两种方法证明 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关：

$$证 1.\ |(\xi_1,\xi_2,\xi_3)|=\begin{vmatrix}1 & 1+C_1 & \frac{1}{2}+C_2\\ -1 & -1-C_1 & -C_2\\ 2 & 1+2C_1 & 2C_2+C_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \frac{1}{2}\\ -1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & C_3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\neq 0$$

故 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

证 2. 令 $\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\lambda_3\xi_3=\mathbf{0}$ 来证明 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

为此用 $\boldsymbol{A}$ 乘以两边得 $\qquad \lambda_2\xi_1+\lambda_3\boldsymbol{A}\xi_3=\mathbf{0}$

两边再乘以 $\boldsymbol{A}$ 得 $\lambda_3\xi_1=\mathbf{0}$，故 $\lambda_3=0$，从而有 $\lambda_2=\lambda_1=0$.

由证 2，我们可以将本题的证明推广到一般情况：

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，ξ_1 是 n 维非零向量，且 $\boldsymbol{A}\xi_1=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{A}\xi_2=\xi_1$，$\boldsymbol{A}^2\xi_3=\xi_1$，…，$\boldsymbol{A}^{n-1}\xi_n=\xi_1$ 均存在，则 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性无关.

以上我们试解了 2009 年的部分试题，主要是展示基本功的重要性. 狠抓基本功训练，做到："凡是考研基本题都会做；凡是会做的题都能拿分"，便有把握取得理想的成绩.

我们将于 7 月下旬至明年 1 月考前，在网上回答读者在阅读本书时所提出的问题. 并期待着听到您在 2010 年考研成功的信息！

编　者

2009 春，于西安交大

第1版前言

(2007年修订)

每当我们上了数学考研辅导课后，总有不少同学建议我们写一本考研辅导的书. 在考生朋友不断地鼓励和期盼下，我们终于写成了此书，希望它能成为众多考生的一个好朋友，陪伴着他们去数学考场"潇洒走一回".

通过目录，读者可以了解到本书的特点：第一部分(第1章)是考卷分析. 我们对2005至2007三年的考卷作了列表分析. 通过这些表格，将每套考卷的内容覆盖、数学能力、认知水平及难度都量化了. 只要看看六张表格中的数字，就能知道每套考卷主要考些什么. 比如在数学能力方面，计算题基本上要占80分左右；在认知水平上，要求"理解"水平的题在一半左右；在难易程度上，中档题占一半左右，等等. 这样，您看了本书第1章应当对数学考试"心中有数"了. 进一步，如果您藉助我们设计的表格，按照自己的水平，去独立分析一两套试卷，那么就知道应当如何去准备这场考试了. 因此，第1章是作复习前准备必不可少的. 第二部分(第2章)是应试对策，讲的是复习迎考及身临考场的策略. 在有一定数学水平的基础上，能不能考出理想成绩，就要看您的发挥了，如何能发挥好，应试策略是关键. 而"策略"又是最容易被人们忽视的. "考试又不是打仗，讲什么策略"? 岂不闻考场如战场，策略往往是成败的关键. 我们写这一章也是个尝试，希望能引起考生对策略问题的重视. 其实，对策是人们干什么事都应考虑的，所谓"优化运筹"不就是要寻找最优对策吗? 有了好的复习迎考对策，在此基础上，订一个切实可行的计划，就可以帮助你以高效率和好效果较轻松地争取好成绩. 第三部分(第3～12章)是典型题的选讲与练习，这是本书的主要部分. 我们选了1 500多道题，其中500道例题，采用分析、注释、一题多解等讲法，讲解解题的方法与技巧，所有练习题均给出了答案与提示. 要想考个好成绩，关键是提高解题能力. 我们的书主要围绕基本运算和推理能力、灵活善变的解题技巧、综合运用所学知识及提高应用意识来选题、讲题和布置练习题的. 我们不主张单纯"猜题"，认为只要内容覆盖面全，主要方法都练到了，就能考好，比"猜题"更稳妥，而且有利于提高数学素养；第四部分(第13章)是模拟题，数学一和数学三各两套. 在复习时，请先不要看模拟题，复习完临考前再用这两套题来进行两次"热身". 用三小时做一套题，看看自己究竟如何，最后找找差距. 值得说明的是，本书中模拟题也有特色，它是以"从难、从严、从实战"出发设计的. 每套试卷比正式考卷更难些，综合题、应用题多些，读者如能在三小时内将我们提供的每套考卷完成，并能获得90分以上的平均成绩，那么，上了考场，正常发挥也一定能考90分以上. 但您如果提前看过了题目，再去做效果就不好了.

以上是我们编写本书的主要想法，但总觉得编写仓促，书中可能会有不少的问题和漏洞，恳切地希望读者多多批评指正.

感谢西安交通大学出版社的支持，使这本书能以面世，感谢关心与鼓励我们的朋友们!

编者

2007.4 于西安交大

(因龚冬保教授主编的《数学考研模拟考试试卷》已单独出版，故本书第四部分取消. ——出版者注)

目　录

绪论 应试对策

在复习迎考时，如何提高复习效率，增强复习效果；在临考时怎样能超水平发挥，考出理想成绩？这就是我们“应试对策”的话题．应试对策当因人而异，本章我们就复习和考试中一些普遍的、重要的问题，提出来供读者参考．

0.1 全面复习 把书读薄

“知己知彼，百战不殆”．在复习中，首先应当知道考试的范围和内容是什么，那就是要熟悉“考试大纲”．凡是考试大纲中提及的内容，都可能考到；凡大纲中未提及的内容都不会考．参照大纲全面复习，不留遗漏，是应试的基本对策．

数学考研的内容很多，因此，在全面复习的同时，要注意抓住各内容的实质和不同内容、不同方法间的本质联系，从而把要记的东西降到最少程度（什么是“最少”是因人而异的，但每个人都要努力去加深对所学知识的理解，多抓住些问题之间的联系，少记一些死知识）．而且把要记的内容和方法，牢牢靠靠地掌握．对于将从事工程技术和科学研究的人来说，一些最重要、最基本的数学知识与方法，应当做到终生不忘．其它的知识，可以在此基础上，运用联系，经推演而得到．这就是全面复习，把书读薄的意思．比如在高等数学中抓住微分与积分的联系，只要把微分的基本概念、性质及其运算的基本公式搞深搞透，作到“倒背如流”，许多积分、微分方程的公式就不必死记硬背，而相关的题均可顺利求解．

例 0.1 如我们熟悉$(\sqrt{1+x^2})'=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，便可以立即作类似的积分题：

$$\int x(1+x^2)^{3/2}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}(1+x^2)^{5/2}+C.$$

因为可想到$[a(1+x^2)^{5/2}]'=\dfrac{5}{2}a\cdot(1+x^2)^{3/2}\cdot 2x$．故$a=\dfrac{1}{5}$．

这样做熟了，不但题解得快，且不会错，因为我们已用微分作了验算．

例 0.2 （1）方程$xy'+y=0$，满足$y(1)=2$的解为________．

（2）方程$xy'+2y=x\ln x$满足$y(1)=-\dfrac{1}{9}$的解为________．

解 （1）由乘法求导公式知$xy'+y=(xy)'=0$

故 $xy=C$，由$y(1)=2$得所求解为$y=\dfrac{2}{x}$．

（2）于方程两边同乘以x得，$x^2y'+2xy=x^2\ln x$

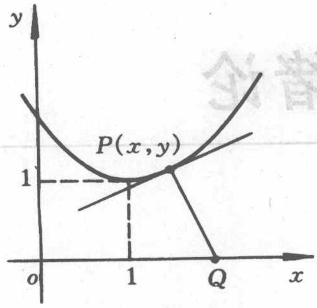
因为$x^2y'+2xy=(x^2y)'$

故 $x^2y=\int x^2\ln x\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{9}(3\ln x-1)+C$．由$y(1)=-\dfrac{1}{9}$得$C=0$．故得解$y=\dfrac{x}{9}(3\ln x-1)$．

这两道都是一阶线性微分方程的题，在求解过程中，我们只用到了微积分的运算，一样顺利得到了所求解．

例 0.3 在上半平面求一向上凹的曲线L，其上任一点$P(x,y)$处的曲率等于此曲线在该点的法线段PQ长度

的倒数（Q 是过 P 点的法线与 x 轴的交点）. 且 L 在(1,1)点的切线平行于 x 轴.



例 0.3 题图

（这是1991年数学一的一道考题，考点多，而我们将仅用微积分的方法来求解，说明书是怎样可以读薄的）.

解　首先，我们用曲率是曲线弯曲程度，即曲线切线的倾角相对弧长的变化率的概念得到曲率公式：

$\tau = \left|\dfrac{d(\arctan y')}{ds}\right| = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$，而不用死记此公式.

其次我们用最熟悉的向上凹曲线 $y=x^2$ 之 $y''=2>0$ 知，一般向上凹的曲线 $y=y(x)$ 有 $y''(x)\geqslant 0$.

第三，过 $P(x,y(x))$ 点曲线的法线方程是：

$Y-y=-\dfrac{1}{y'}(X-x)$，令 $Y=0$ 得 $X_0=yy'+x$，于是知 Q 点坐标为$(yy'+x,0)$. PQ 长为$[(yy')^2+y^2]^{1/2}=y\sqrt{1+y'^2}$.

于是由曲线 = (法线长)$^{-1}$ 得到此曲线应满足的方程：

$\dfrac{y''}{1+y'^2}=\dfrac{1}{y}$ 这又是一个可降价的二阶方程，其实，我们只要仅用微分运算解：由 $y''=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{dy'}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}$ 即可将微分方程化为 $\dfrac{y'dy'}{1+y'^2}=\dfrac{dy}{y}$.

两边积分得 $\dfrac{1}{2}\ln(1+y'^2)=\ln yC_1$

即 $1+y'^2=Cy^2$，用(1,1)点切线平行 x 轴得 $C=1$. 于是方程变为 $y'=\pm\sqrt{y^2-1}$

即 $\dfrac{dy}{\pm\sqrt{y^2-1}}=dx$，或 $x+C=\ln(y\pm\sqrt{y^2-1})$

由 $x=1$，$y=1$，得 $C=-1$，因此我们有解

$y=\mathrm{ch}(x-1)$.

这里，我们抓住了曲率、变化率、曲线凹向、法线长，可降价二阶方程这些概念的本质以及它们与导数微分概念和运算性质的本质联系. 没有硬套公式，解出了一道综合性的难题.

例 0.4　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+(-2)^{n+1}}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛域.

解　我们先用达朗伯判别法（即检比法）来求级数的收敛区间：由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{|x|^{n+1}}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}\cdot\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{3^n+(-2)^n}{|x|^n}\right]=\dfrac{|x|}{3}$，知收敛区间是$(-3,3)$. 再讨论端点，以 $x=3$ 代入得级数：

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\dfrac{1}{n}$ 其通项与 $\dfrac{1}{n}$ 是等价无穷小，因此发散.

再以 $x=-3$ 代入得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\dfrac{(-1)^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-2)^n}{(3^n+(-2)^n)n}$

这里 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛，而由达朗伯判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-2)^n}{(3^n+(-2)^n)n}$ 绝对收敛，故此级数收敛，从而幂级数收敛域是$[-3,3)$.

如果有人以为以 $x=-3$ 代入所得到级数是一交错级数，由莱布尼兹判别法说它收敛，是没有根据的. 原因是这时 $a_n=\dfrac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\dfrac{1}{n}$ 并非是单调减的. 这是本题的一个“难点”，比一般教材，或一般数学教学要求更高，更灵活. 说明考研比平时教学要求更高些，所以我们说，全面复习要以“考试大纲”为依据.

0.2　突出重点 精益求精

在抓各内容、各方法的联系中，更要注意主次之间的联系，把主要内容、主要方法搞深搞透，并通过主次联系，

将次要内容与方法提挈起来，这是复习中最要重视的策略，比如高等数学中无穷小分析方法就特别重要，试看以下例题.

例 0.5　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

解　将和式写作$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}$，$n\to\infty$时表示“无限和”，而第$k$项($k=1,2,\cdots,n$)，当$n\to\infty$时都是无穷小. 因此，我们称之为“无限个无穷小的和”型的极限. 经过这样的分析，使我们想到定积分：若$f(x)$在$[0,1]$上有界可积，将区间n等分，并取$\xi_k=\dfrac{k}{n}$，则按定积分定义有：$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\dfrac{k}{n})\cdot\dfrac{1}{n}$，也是无限个无穷小之和，这使我们想到用定积分来解决这个问题. 先看

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$$

再用一次无穷小分析：

$n\to\infty$时，$\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}\sim\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}$，这说明$\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}$与$\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}$之差是比$\dfrac{1}{n}$更高阶的无穷小，于是我们容易得到下面的解法.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}-\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}\right]$$

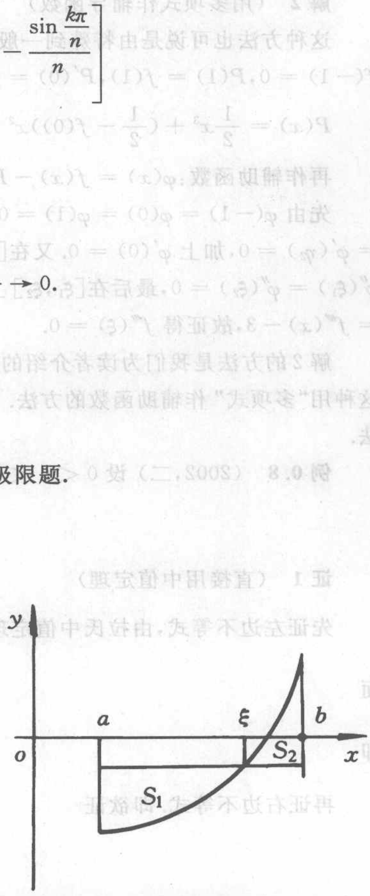
而
$$0<\left|\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}-\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}\right]\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}-\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}\right|$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{n}}{n(n+\frac{1}{k})}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}\to 0.$$

故得
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}=\frac{2}{\pi}.$$

这样，我们用无穷小分析和定积分的方法顺利地作出了这道看似很难的极限题.

以主要方法带次要方法，要对具体问题作具体的分析.

例 0.6　设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内$f'(x)>0$. 证明：存在唯一的$\xi\in(a,b)$使曲线$y=f(x)$与直线$x=a$及$y=f(\xi)$所围图形面积S_1是$y=f(x)$，$x=b$及$y=f(\xi)$所围面积S_2的三倍.



例 0.6 题图

解　如图. $S_1=\int_a^{\xi}[f(\xi)-f(t)]\mathrm{d}t$；$S_2=\int_{\xi}^{b}[f(x)-f(\xi)]\mathrm{d}t$

要证明：$\int_a^{\xi}[f(\xi)-f(t)]\mathrm{d}t-3\int_{\xi}^{b}[f(t)-f(\xi)]\mathrm{d}t=0$

容易想得到辅助函数：$\varphi(x)=\int_a^{x}[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t-3\int_x^{b}[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t$

用连续函数的介值定理，$\varphi(a)=-3\int_a^b[f(t)-f(a)]\mathrm{d}t<0$，$\varphi(b)=$

$\int_a^b[f(b)-f(t)]\mathrm{d}t>0$. 故由介值定理知,存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $\varphi(\xi)=0$,即证明了 ξ 的存在性. 以下证明唯一性. 由 $\varphi(x)$ 可导,且 $\varphi'(x)=(4x-a-3b)f'(x)$. 由此 $\varphi(x)$ 在 $[a,\frac{a+3b}{4}]$ 上单调减,从而 $\varphi\left(\frac{a+3b}{4}\right)<0$,在 $\left[\frac{a+3b}{4},b\right]$ 上单调增. 故我们知道 $\xi\in\left(\frac{a+3b}{4},b\right)$,且是唯一的.

先分析要证的命题条件与结论间的联系,将 ξ 换成 x,作辅助函数 $\varphi(x)$,求证 $\varphi(x)$ 的零点存在性,一般主要是用"介值定理";唯一性. 则用 $\varphi'(x)$ 找出增减的区间,利用增减性来证明零点的唯一性. 这是高等数学的一种分析问题的重要方法. 在考研的一些证明题中,往往要作辅助函数. 辅助函数可以用问题的几何意义,即形数结合的方法,也可用分析的方法.

例 0.7　设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上友三阶连续导数,且 $f(-1)=0,f(1)=1,f'(0)=0$,证明存在 $\xi\in(-1,1)$ 使 $f'''(\xi)=3$.

解 1　(用泰勒公式). 由

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1).\ \xi_1\in(-1,0)$$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2).\ \xi_2\in(0,1)$$

$\therefore$　$\frac{1}{6}[f'''(\xi_2)+f'''(\xi_1)]=1$. 由 $f'''(x)$ 连续,存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(-1,0)$ 使 $\frac{f'''(\xi_2)+f'''(\xi_1)}{2}=f'''(\xi)$. 因此证明了 $f'''(\xi)=3$.

本题的解 1 是很常规、也是重要的方法;而下面的解 2,则是个比较巧妙的好方法.

解 2　(用多项式作辅导函数)

这种方法也可说是由特殊到一般的方法,即作一个三次多项式函数 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$,使 $P(-1)=f(-1)=0,P(1)=f(1),P'(0)=f'(0)=0,P(0)=f(0)$,用这些条件可得

$P(x)=\frac{1}{2}x^3+(\frac{1}{2}-f(0))x^2+f(0)$. 显然有 $P'''(x)=3$

再作辅助函数:$\varphi(x)=f(x)-P(x)$.

先由 $\varphi(-1)=\varphi(0)=\varphi(1)=0$,分别在 $[-1,0]$ 和 $[0,1]$ 上用罗尔定理知,存在 $-1<\eta_1<0<\eta_2$,使 $\varphi'(\eta_1)=\varphi'(\eta_2)=0$,加上 $\varphi'(0)=0$. 又在 $[\eta_1,0]$ 和 $[0,\eta_2]$ 上对 $\varphi'(x)$ 用罗尔定理知,存在 $\xi_1\in(\eta_1,0),\xi_2\in(0,\eta_2)$,使 $\varphi''(\xi_1)=\varphi''(\xi_2)=0$,最后在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上对 $\varphi''(x)$ 用罗尔定理知存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(-1,1)$ 使 $\varphi'''(\xi)=0$,而 $\varphi'''(x)=f'''(x)-3$,故证得 $f'''(\xi)=0$.

解 2 的方法是我们为读者介绍的用中值定理解一些难题的好方法,在本书第 2 章的例 2.30 ~ 2.33 中也介绍了这种用"多项式"作辅助函数的方法. 请读者留意,下面例题中作辅助函数的方法,是近年考研"难题"中常用的方法.

例 0.8　(2002,二) 设 $0<a<b$,证明不等式

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$$

证 1　(直接用中值定理)

先证左边不等式,由拉氏中值定理的 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{\xi}(\xi\in(a,b))$

而
$$\frac{2a\xi}{a^2+b^2}<\frac{2ab}{a^2+b^2}<1$$

即
$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{1}{\xi}=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}\text{ 成立.}$$

再证右边不等式. 即欲证

$$\frac{\ln\frac{b}{a}}{\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}}=\frac{\ln b-\ln a}{\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}}<1$$

记$\dfrac{b}{a}=A>1$，在$[1,A]$上，令$f(x)=\ln x$，$g(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. 用柯西中值定理

$$\frac{f(A)-f(1)}{g(A)-g(1)}=\frac{\dfrac{1}{\xi}}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\xi}}+\dfrac{1}{\xi\sqrt{\xi}}\right)}=\frac{2\xi\sqrt{\xi}}{\xi^2+(\sqrt{\xi})^2}<1(1<\xi<A).$$

即所要证明不等式成立.

证 2 （常规的用函数单调性证明）.

即在两边不等式中令a（或b）是常量. b（或a）是变量即如证右边不等式.

记　$f(b)=\ln b-\ln a-\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\sqrt{\dfrac{a}{b}}$　显然 $f(a)=0$.

$$f'(b)=\frac{1}{b}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}\right)=-\frac{1}{2b\sqrt{ab}}(b-2\sqrt{ab}+a)=-\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{2b\sqrt{ab}}<0$$

故$f(b)$单调减，从而$f(b)<0$. 即得所需证明的不等式.

同样可证左边的不等式，留给读者自行证明.

证 3 （改进的常规法）.

即令$\dfrac{b}{a}=x$. 那么右边不等式变成要证

$$\ln x-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}<0\ (x>1).$$

令　　$\varphi(x)=\ln x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，则$\varphi(1)=0$.

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)=\frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}<0.$$

故$\varphi(x)$单调减，从而$\varphi(x)<0\ (x>1)$即是所要证明的不等式. 请读者用同样方法证明左边不等式.

考研主要是考解题的能力，所以，这一段我们就高等数学中的一些例题说明只要搞透主要方法，以主带次必可提高解题能力，这是很关键的复习迎考对策.

0.3　基本训练 反复进行

近年来每一份考研试卷中，基本题都占总分的70%左右，因此复习中要注意，把基本功练熟练透，但我们不主张“题海”战术，而提倡精练，即反复做一些典型的题，做到一题多解、一题多变. 要训练抽象思维能力，对一些基本定理的证明，基本公式的推导，以及一些基本练习题，要作到不用书写，就像棋手下“盲棋”一样，只需用脑子默想，即能得出正确答案. 如果能在40分钟内完成14道客观题，其中有些是不用动笔，一眼就能看出答案的题，这样才叫训练有素.“熟能生巧”，基本功扎实的人，遇到难题办法也多，不易被难倒. 相反，做练习时，眼高手低，总找难题做，结果，上了考场，遇到与自己曾经作过的类似的题目都有可能不会；不少考生把会做的题算错了，归结为粗心大意，确实，人会有粗心的，但基本功扎实的人，出了错立即会发现，很少会“粗心”地出错.

例 0.9　求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$.

解 1　用有理化分子的初等方法.

$$\text{原极限}=\lim_{x\to0}\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}=\lim_{x\to0}\frac{-2x^2}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}=-\frac{1}{4}$$

解 2　用洛必达法则.

$$\text{原极限}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{4}=-\frac{1}{4}$$

基本功熟悉的人知道$\sqrt{1+x}$与$\sqrt{1-x}$不是无穷小量，在第二次用洛必达法则时，分母中两因式$\sqrt{1+x}\ \sqrt{1-x}$

$\to 1$,不必参与求导数.

解 3 用泰勒公式加无穷小分析. 在要求极限的式子中,分母是 x 的二阶无穷小,故只要将 $\sqrt{1+x}$ 与 $\sqrt{1-x}$ 展成 x 的泰勒多项式至 x^2 项:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2+o(x^2)$$

$$(1-x)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)(-x)^2+o(x^2)$$

因此, $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2=-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)$. 从而得到解 1,2 同样的结果.

这是 1998 年数学一的第一道填空题(1999 年第一道填空题与此题类似),举这个例子的意思是说明"精练"的含义,这是一道容易的题,但我们有三种解法. 当然还有其它解法,如求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$ 时,分子减 1 和加 1,分两项用等价无穷小替换可得此极限为 -1,如果把这些方法都加上去,对于本题还可以得出一些解法,读者可以试试,这样一题多解,作一道题,比作三道题强. 进一步,由比较,可见用泰勒公式加上无穷小分析,这道题是可以这样简单地获得答案的.(只要默想,不用笔算)以下描述想的过程:

$$\text{“}(1+x)^{\frac{1}{2}}=\cdots\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)x^2+\cdots$$

$$\underline{+(1-x)^{\frac{1}{2}}=\cdots\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)x^2+\cdots}$$

$$\cdots-\frac{1}{4}x^2+\cdots\qquad \underline{\text{答案为}-\frac{1}{4}\quad}.\text{”}$$

就是说,平常练一道题,反复做,用不同方法做. 并由比较而知,这一类型的题怎样做最方便,怎样做可以不用书写,默想出答案. 到了这一步,做一道题胜似十道题了!不仅如此,这道题还可以变,下面举几个变化的例子.

变化 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+\alpha x)^{\beta}+(1-\beta x)^{\alpha}-2}{x^2}=\frac{\alpha\beta}{2}(2\alpha\beta-\alpha-\beta)$, ($\alpha,\beta$ 是任意实数)

在求函数极限时,用泰勒公式方法往往十分奏效. 下面 5 个简单初等函数的泰勒公式,尤其要牢记:

当 $x\to 0$ 时(x 不一定是自变量)

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$;

$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ (也可写作 $o(x^4)$);

$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ (也可写作 $o(x^3)$);

$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+o(x^2)$ (α 是任意实数)

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

变化 2. 我们可用 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的泰勒公式编出一道极限题:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\frac{1}{3}$

或 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\frac{1}{3}$

上面的极限式中分子、分母同用 $\cos x$ 除,并分为两项得

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\frac{1}{3}$$

我们从例 0.9 这道 1998 年数学一的第一道试题,用泰勒公式解,联想到变化 2 的这道题恰好是 1999 年数学一的第一道试题. 这样从解一道不太难的题,用多种解法,联想到泰勒公式,再反过来用泰勒公式编题,变化出多种题,不用去"题海"中没完没了地作题. 一大类函数极限的题都被我们破解了!

例 0.10 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=[a_1,a_2,a_3]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=[b_1,b_2,b_3]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=[c_1,c_2,c_3]^{\mathrm{T}}$,则三直线

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\\a_3x+b_3y+c_3=0\end{cases}$$ 交于一点的充要条件是(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(C) $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

解 1　设(x_0,y_0)是唯一的交点,则此方程可写作:

$\boldsymbol{\alpha}_3=-x_0\boldsymbol{\alpha}_1-y_0\boldsymbol{\alpha}_2$,这说明 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示,且表示是唯一的,因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线与相关,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关. 选(D).

解 2　将此视为方程组,有唯一解充要条件是

$r[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad-\boldsymbol{\alpha}_3]=r[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2]=2$ (增广矩阵的秩与系数矩阵的秩相等且等于未知数的个数). 故选(D).

解 3　设(x_0,y_0)是交点,则它也是$\begin{cases}a_1x+b_1y=-c_1\\a_2x+b_2y=-c_2\end{cases}$的唯一解,由克莱姆法则知$\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\neq 0$ 即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关. 又齐次方程组:$a_ix+b_iy+c_iz=0\ (i=1,2,3)$,有非零解$(x_0,y_0,1)^{\mathrm{T}}$,故系数行列式为 0,即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,它们都是充要条件,故选(D).

还有许多解法. 在平时作选择题时,还应当学会排除其它选项. 如本题的(C) 当然不对,因为我们已证明了 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关;(A)是本问题的充分、但非必要的条件. 顺便提到(C),也是充分但非必要条件,如 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=1$. 这时选项(A),(C) 皆成立但三条线重合,命题不对;有的同学会问能不能说三直线交于一点的充要条件是 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$ 呢?也不对,这时如果 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=1$ 时表示三直线中有两条平行,第三条与它们中之一重合或也与它们平行,这时不可能相交. 这样作选择题的练习,可以把平面三直线的几何关系,与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的关系及与方法组的关系搞得十分清楚. 这是 1997 年数学一的一道考题,没料想,2003 年数学一和数学二又考了一道这样的题:

例 0.11　已知平面上三条不同直线方程为:

$l_1:ax+2by+3c=0$; $l_2:bx+2cy+3a=0$; $l_3=cx+2ay+3b=0$. 试证此三直线交于一点的充要条件是:$a+b+c=0$.

解 1　如果我们将 1997 年那道题搞透了,那么,这道题本质上与上一题是一样的. 我们试用例 0.10 的结论,三直线交于一点的充要条件是 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&2b&3c\\b&2c&3a\\c&2a&3b\end{bmatrix}$ 的秩小于 3,而 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a&2b\\b&2c\\c&2a\end{bmatrix}$ 的秩为 2,今三直线是不同直线的充分条件是 $r(\boldsymbol{B})=2$. 否则若 $r(\boldsymbol{B})=1$,必有$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{a}$,这表示三直线是同一直线. 故只要 $|\boldsymbol{A}|=0$,而

$$|\boldsymbol{A}|=-3(b+a+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],\text{而}(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$$

故　$a+b+c=0$,得证.

当然,我们只当不知原来结论,但我们已经把例 0.10 的方法搞透了,要想另解也特别的简单.

解 2　必要性. 设三直线交于一点(x_0,y_0),则方程组有唯一解,故 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=2$,即 $|\boldsymbol{A}|=0$.

而 $|\boldsymbol{A}|=-3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$. 故 $a+b+c=0$.

充分性. 若 $a+b+c=0$,则 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$,而由三条直线是不同直线,故 $r(\boldsymbol{B})=2$,因此,$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=2$. 即方程组有唯一解,说明三直线交于一点.

例 0.12　矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}$ 满秩,则直线 $\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与 $\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$ (　　).

(A) 交于一点　　(B) 重合　　(C) 平行不重合　　(D) 异面

解 1　记 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_i,b_i,c_i)$ 为三个行向量$(i=1,2,3)$. 则 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关(令 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)=0$,得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-k_1)\boldsymbol{\alpha}_2-k_2\boldsymbol{\alpha}_3=0$. 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关知 $k_1=k_2=0$). 表示二直线不平行. 而由$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$

$+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$. $\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 是已知二直线上的各一点的联成的向量，与二直线的方向向量共面. 说明二直线共面，故此二直线相交选(A).

解 2　像解 1 中的关系可用矩阵和行列式作，如由

$$\begin{vmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$$

而
$$\begin{vmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix}=0$$

知二直线共面但不平行，故相交选(A).

解 3　(用纯粹空间解析几何方法). 视 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 为空间三个点的向径($i=1,2,3$). 则由矩阵满秩知三点不在同一直线上. 故此三点决定一平面，而二直线分别过 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 的终点，而与另两点联线平行. 故此二直线必相交.

解 4　(引入参数，用方程组理论解)，令

$$\frac{x-a_3}{a_1-a_2}=\frac{y-b_3}{b_1-b_2}=\frac{z-c_3}{c_1-c_2}=t;\quad \frac{x-a_1}{a_2-a_3}=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}=-\tau.$$

于是问题化为关于 t,τ 为未知数的方程组

$$\begin{cases}(a_1-a_2)t+(a_2-a_3)\tau+a_3-a_1=0\\(b_1-b_2)t+(b_2-b_3)\tau+b_3-b_1=0\\(c_1-c_2)t+(c_2-c_3)\tau+c_3-c_1=0\end{cases}$$

是否有解，解是否唯一的问题，而这个方程组有唯一解的充要条件是：$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，与解 1、解 2 的结论一样.

像这样一题多解，在解题中多联系基本知识，多总结归纳一些解题方法，就会使一道简单的题的内涵显得极为丰富，一道题胜过许多的题. 如解 1 用到：若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{k-1}-\boldsymbol{\alpha}_k$ 亦线性无关；解 2 用到行列式的性质，也可以说矩阵经有限次初等变换不改变矩阵的秩，及行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$ 的充要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行(列) 向量线性相关；

这是 1998 年数学一的一道选择题，经过我们解 4 的变形，问题化得与 1997 年数学一的一道选择题几乎一样.

这道题讲了 4 种不同解法，而解 4 又使我们看到本题与前两题本质上又是一样的. 我们这样作练习，将本来不太难的题用多种方法反复练，将几种看似不同的题经过变化，发现其本质是一样的. 这样对知识与方法才能真正地融会贯通达到举一反三的目的，做一题胜似作许多题，这是我们提倡的复习数学的基本对策.

0.4　探索思路 归纳方法

要取得数学考研的理想成绩，主要在提高解题能力，除了反复训练基本功外，就是要在训练中不断总结解题的方法，探索解题的思路. 我们仍来举例说明一些数学方法的重要性.

例 0.13　求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解　本题要分左、右极限来求是唯一思路，而无穷小分析方法则是主要方法. 由 $x\to 0^+$，$e^{\frac{1}{x}}\to\infty$，$x\to 0^-$，$e^{\frac{1}{x}}\to 0$ 即知
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}=0.$$

而　$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}\right)=2$. 故原极限 $=1$.

无穷小分析的方法，在微积分中是十分重要的，在分析基础上，或用等价无穷小替换或用洛必达法则，泰勒公式在有些情况下更简捷.