

高等学校教学用书

高等数学教程

第二卷 第一分册

A. K. 伏拉索夫著

高等教育出版社

高等学校教学用书



高等数学教程

第二卷 第一分册

A. K. 伏拉索夫著
东北工学院数学教研组译

高等教育出版社



本書系根据苏联國立技術理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的伏拉索夫 (А. К. Власов) 著“高等数学教程” (Курс высшей математики) 第二卷 1952 年第五版修訂版譯出的。原書經苏联高等教育部審定為高等工業學校教學參考書。

本書共二卷，第二卷分上下兩冊出版。第二卷系由第一編高等代數初步與第二編微積分兩個部份所組成。高等代數初步的內容是高等代數的一些基本概念、基本定理和原理、方程的根的近似計算以及平面矢量和複數等。微積分是本書第一卷微積分第一編中各基本原理和方法的發展，其內容為有理分式和超越函數的積分法、多變量函數的微分法、多變量函數的極大極小、多重積分、曲面積分與曲線積分、函數級數、微分方程初步以及分析學在幾何方面的應用等。

參加本書第二卷翻譯工作與校訂工作的為童勤謨、柳孟輝、王澤漢等十九位同志。

本書原由商務印書館出版，自 1956 年 10 月起改由本社出版。

高等数学教程

第二卷 第一分冊

A. K. 伏拉索夫著

東北工學院數學教研組譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

上海集成印刷廠印刷 新華書店總經售

統一書號 13010·222 開本 850×1168 1/32 印張 8 13/16 字數 235,000

一九五四年三月商務初版(共印 12,000)

一九五六年十月上海新一版

一九五六年十月上海第一次印刷

印數 1—2,000

定價(8) 1.00

第一分冊 目錄

第一編 高等代數初步 1

第一章 高等代數的基本概念及原理 1

- § 1. 高等代數的問題 1
- § 2. 關於有理整函數的馬克勞林公式和戴勞公式 1
- § 3. 有理整函數的因式分解 4
- § 4. 方程的重根 7
- § 5. 關於方程根的個數的問題 9

第二章 複數 11

- § 1. 平面矢量和複數 11
- § 2. 複數作為平面上二矢量之比 13
- § 3. 矢量的加法 15
- § 4. 複數的加法 16
- § 5. 複數的減法 16
- § 6. 複數的乘法 17
- § 7. 複數的除法 20
- § 8. 虛數單位，複數的代數公式 21
- § 9. 複數的三角式 23
- § 10. 開方 23
- § 11. 關於複變量極限的概念 27
- § 12. 作為指數函數來看的複數，歐拉公式 27
- 習題 31

第三章 高等代數學的基本命題 32

- § 1. 作為複變量函數的整多項式 32
- § 2. 高等代數學的基本命題 34
- § 3. 具有實係數的方程，共軛虛根 36
- § 4. 方程的係數與其根之間的關係 37
- § 5. 分解整多項式為乘積之一般形式 38

第四章 方程的根的近似計算	40
§ 1. 方程實根的分離, 斯突姆定理	40
§ 2. 方程的正根(或負根)的上下界限的確定	46
§ 3. 有理整函數——高次拋物線的圖形	48
§ 4. 方程的根的近似計算法	51
習題	58
第二編 微積分	59
第一章 有理函數的積分法	59
§ 1. 最簡分式積分法	59
§ 2. 在分母的實根情況下展開有理分式爲最簡分式及其積分法	60
§ 3. 在分母有虛根的情況下有理分式的展開及其積分法	69
§ 4. 圓函數和對數函數間的關係, 歐拉公式	77
§ 5. 從有理分式積分分出代數函數部份的奧斯特洛格拉德斯基方法	79
習題	83
第二章 無理函數積分法	85
§ 1. 無理函數	85
§ 2. 具有有理指數的線性分式的積分法	85
§ 3. 二項微分式的積分法	87
§ 4. 含有二次三項式的根式的積分法	91
習題	97
第三章 超越函數的積分法	99
§ 1. 包含超越因式(其導函數爲代數函數者)的函數的積分法	99
§ 2. 含有超越因式 e^{ax} , $\sin ax$ 或 $\cos ax$ 的函數的積分法	100
§ 3. 指數函數的有理式的積分: $\int R(e^x)dx$	102
§ 4. 三角函數的有理式的積分: $\int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \cdots)dx$ 代換積分法	103
§ 5. 積分 $\int \sin^n x \cos^n x dx$ 的遞推公式	106
§ 6. $\sin^n x$ 和 $\cos^n x$ 化爲倍角的正弦和餘弦的分解	108
§ 7. $\int e^{ax} \cos bx dx$, $\int e^{ax} \sin bx dx$ 型的積分	110
§ 8. $\int x^n e^{ax} \cos bx dx$, $\int x^n e^{ax} \sin bx dx$ 型的積分	111

§ 9. 幾個著名的定積分	112
習題	113
第四章 多變量函數。偏導函數	121
§ 1. 多變量函數	121
§ 2. 多變量函數的連續性	123
§ 3. 偏導函數	128
§ 4. 偏微分與全微分	129
§ 5. 複合函數的微分	135
§ 6. 隱函數的微分	139
§ 7. 隱函數的存在定理	141
§ 8. 二變量函數的偏導函數與全微分的幾何意義	143
§ 9. 曲面之切面與法線方程	146
§ 10. 高階偏導函數。累次微分的結果與微分順序無關	149
§ 11. 高階的偏微分與全微分	152
§ 12. 關於齊次函數的歐拉定理	155
習題	156
第五章 多變量函數的極大值與極小值	159
§ 1. 二自變量函數的極大值與極小值。在函數可能有極大值或極小值處的自變量 之值的求法	159
§ 2. 二自變量函數的極大值或極小值的存在條件	160
§ 3. 多變量函數的極大值和極小值	163
§ 4. 相對的極大值或極小值	175
§ 5. 解關於相對極大值和極小值問題的拉格朗奇方法	178
複習問題	184
習題	185
第六章 多變量函數的積分問題	187
§ 1. 由已知的偏導函數求原函數	187
§ 2. 含參數的函數的積分	188
§ 3. 在積分號下求微分。萊伯尼慈法則	190
§ 4. 對參數的積分	197
§ 5. 二重積分的幾何意義	200
§ 6. 線積分	203
§ 7. 只與積分路徑的端點有關的線積分	207

§ 8. 全微分的積分	210
複習問題	216
習題	216
第七章 多重積分	217
§ 1. 二重積分	217
§ 2. 平均值定理	222
§ 3. 二重積分的計算	223
§ 4. 二重積分的變數變換	231
§ 5. 曲線坐標中的面積素	235
§ 6. 函數行列式的性質	238
§ 7. 化笛卡兒坐標為極坐標. 二重積分變數變換的應用例題	239
§ 8. 曲面面積的計值	243
§ 9. 在曲線坐標中的曲面面積	243
§ 10. 曲面積分, 或展佈於曲面任何固定一側的積分	250
§ 11. 三重積分	254
§ 12. 三重積分的變數變換	258
§ 13. 體積的計算	264
§ 14. 重心, 葛利旦定理	267
§ 15. 轉動慣量	271
複習問題	273
習題	274

第一編 高等代數初步

第一章 高等代數的基本概念及原理

§ 1. 高等代數的問題

對於高次代數方程的研究構成高等代數的主要問題之一。對於這個問題的研究可以化爲對於有理整函數之性質(即按照自變量的乘幂排列而成的多項式之性質)的探討。

命 $f(x)$ 表示 n 次多項式:

$$f(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \cdots + p_n.$$

如果當 $x=a$ 時, 這個多項式的值等於零, 亦即, 如果 $f(a)=0$, 則 a 就叫做方程 $f(x)=0$ 的根, 或多項式 $f(x)$ 的根。多項式的根的求法或高次方程的解法正是高等代數中的主要問題之一。所給的多項式是否至少有一個根, 並且, 假使有的話, 究竟要有多少個, ——這就是首先要探討的兩個問題。

在代數方程內根的問題的研究中, 將多項式分解因式具有重大的意義。於此, 將多項式按照 $x-a$ 的乘幂展開(其中 a 爲任一數)也是非常重要的。在這種展開式中正可以看到有理整函數的高階導函數的意義。

§ 2. 關於有理整函數的馬克勞林公式和戴勞公式

任意次多項式

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots + Mx^n \quad (1)$$

的每一個係數，可以用它自己和它的相繼各階的導函數在一個固定點，例如是 $x=0$ 這點的值表示出來。事實上，作出這些導函數，並在它們當中和在多項式本身中命 $x=0$ ，即得：

$$\begin{aligned} f(x) &= A + Bx + Cx^2 + \cdots + Mx^n & \text{及} & \quad f(0) = A, \\ f'(x) &= B + 2Cx + \cdots + nMx^{n-1} & \text{及} & \quad f'(0) = B, \\ f''(x) &= 1 \cdot 2C + 2 \cdot 3Dx + \cdots & & \\ & \quad \cdots + n(n-1)Mx^{n-2} & \text{及} & \quad f''(0) = 1 \cdot 2C, \\ f'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3D + 3 \cdot 4 \cdot 5Ex + \cdots & & \\ & \quad \cdots + n(n-1)(n-2)Mx^{n-3} & \text{及} & \quad f'''(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3D, \\ & \dots\dots\dots & & \\ f^{(n)}(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots nM & \text{及} & \quad f^{(n)}(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots nM, \end{aligned}$$

由此 $A = f(0), \quad B = \frac{1}{1}f'(0), \quad C = \frac{1}{1 \cdot 2}f''(0),$

$$D = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}f'''(0), \dots, \quad M = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}f^{(n)}(0).$$

如將多項式(1)中的係數 $A, B, C, \dots, M$ ，都用它們的藉助於函數及其導函數的表達式來替代，我們就把有理整函數寫成下面的形狀：

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2}f''(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}f'''(0) + \cdots \\ & \quad \cdots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}f^{(n)}(0). \end{aligned} \quad (2)$$

這種形狀的多項式就是有理整函數的馬克勞林公式。

例 1. 按照 x 的乘幕展開有理整函數 $f(x) = (x+a)^n$ ，其中 n 為正整數(牛頓二項式定理)。

解 求出已知函數的導函數，然後令 $x=0$ ；於是就得到這函數及其 n 個導函數的值：

$$\begin{aligned} f(0) &= a^n, \quad f'(0) = na^{n-1}, \quad f''(0) = n(n-1)a^{n-2}, \quad \dots, \\ f^{(k)}(0) &= n(n-1)\cdots(n-k+1)a^{n-k}, \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1. \end{aligned}$$

因而

$$(x+a)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}x^2 + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} a^{n-k}x^k + \dots + x^n$$

或者,表爲通常的按照 x 的降冪的排列式,

$$(x+a)^n = x^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2x^{n-2} + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} a^{n-k}x^k + \dots + a^n.$$

我們這裏所依據的乘冪的導函數公式可以不根據二項式定理導出來(如第一卷第 323 頁所作的那樣),而,可由別的辦法,例如,由乘積的導函數公式(第一卷第 326 頁)去求。所以在這例題中所作的演算實爲根據馬克勞林公式對牛頓二項展開式所作的一個新的證明。

馬克勞林公式還可以推廣,只要將所給的多項式按 $x-a$ 的乘冪排列,其中 a 爲任一數。事實上,所給的多項式首先可以表爲

$$f(x) = A + B[(x-a) + a] + C[(x-a) + a]^2 + \\ + D[(x-a) + a]^3 + \dots + M[(x-a) + a]^n.$$

這裏處處地方都把 $x-a$ 看作是一個量,來將所有括號按照牛頓二項式定理展開,並將各項依據差 $x-a$ 的冪排列,而以 $A_1, B_1, C_1, D_1, \dots, M_1$ 表示 $x-a$ 的各個不同冪的係數(此處,很明顯, $M_1 = M$):

$$f(x) = A_1 + B_1(x-a) + C_1(x-a)^2 + \\ + D_1(x-a)^3 + \dots + M_1(x-a)^n. \quad (3)$$

作出這個多項式的導函數,並在它們以及就在此多項式之中,命 $x=a$, 就有:

$$\begin{aligned} f(x) &= A_1 + B_1(x-a) + C_1(x-a)^2 + \dots \\ &\quad \dots + M_1(x-a)^n; & f(a) &= A_1; \\ f'(x) &= B_1 + 2C_1(x-a) + \dots \\ &\quad \dots + nM_1(x-a)^{n-1}; & f'(a) &= 1 \cdot B_1; \\ f''(x) &= 1 \cdot 2C_1 + 2 \cdot 3D_1(x-a) + \dots \\ &\quad \dots + n(n-1)M_1(x-a)^{n-2}; & f''(a) &= 1 \cdot 2 \cdot C_1; \end{aligned}$$

$$\dots \dots \dots f^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n M_1; \quad f^{(n)}(a) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n M_1.$$

由此 $A_1=f(a), B_1=\frac{1}{1}f'(a), C_1=\frac{1}{1\cdot 2}f''(a),$

$$D_1=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(a), \dots, M_1=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}f^{(n)}(a).$$

將這些係數的值代入多項式(3),就得

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}f^{(n)}(a). \quad (4)$$

多項式依照差 $x-a$ 的乘幂的這種展開式,就是有理整函數的戴勞公式。命 $x=a+h$, 因而 $x-a=h$, 就可將這個公式表為另一種形式

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)+\cdots+\frac{h^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}f^{(n)}(a). \quad (4')$$

由馬克勞林及戴勞公式可知, n 次有理整函數為函數本身及其各階導函數於自變量取某一值時的諸值所完全確定。

例2. 按照差 $x-1$ 的乘幂展開多項式 x^3-2x+5 。

解 由戴勞公式(4),有

$$x^3-2x+5=f(1)+\frac{x-1}{1}f'(1)+\frac{(x-1)^2}{1\cdot 2}f''(1)+\frac{(x-1)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(1),$$

其中

$$f(1)=1^3-2\cdot 1+5=4,$$

$$f'(x)=3x^2-2 \quad \text{且} \quad f'(1)=1,$$

$$f''(x)=6x \quad \text{且} \quad f''(1)=6,$$

$$f'''(x)=6 \quad \text{且} \quad f'''(1)=6.$$

因而

$$x^3-2x+5=4+(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3.$$

例3. 求一四次幂的整函數,使當 $x=2$ 時,它的函數值是3,而它的各階導函數的值分別為1, 2, 6, 48。

$$f(2)=3, f'(2)=1, f''(2)=2, f'''(2)=6 \quad \text{及} \quad f^{(4)}(2)=48.$$

答
$$f(x)=3+\frac{x-2}{1}\cdot 1+\frac{(x-2)^2}{1\cdot 2}\cdot 2+\frac{(x-2)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 6+\frac{(x-2)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 48,$$

即

$$f(x)=29-55x+43x^2-15x^3+2x^4.$$

§3. 有理整函數的因式分解

在戴勞公式

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} f^{(n)}(a) \quad (5)$$

中，右邊除首項外，所有各項都含有差 $x-a$ 作為其因子。把這差提到括號外面，而以 $Q_1(x)$ 表示括號內的多項式，就可以將有理整函數表為兩項的和的形式，其中一項可被二項式 $x-a$ 整除，而另一項完全不含有自變量 x ：

$$f(x) = f(a) + (x-a)Q_1(x). \quad (6)$$

因此，我們得到下面的命題：

別茲定理 多項式 $f(x)$ 除以差 $x-a$ ，所得的餘式，等於被除式在 $x=a$ 時的值，即 $f(a)$ ；換句話說，差 $f(x)-f(a)$ 可被差 $x-a$ 整除。

這定理也可用除法直接證明，而無需藉助於戴勞公式。事實上，當多項式 $f(x)$ 除以差 $x-a$ 時，如用 $Q_1(x)$ 表商式，而以 R_1 表餘式，則

$$f(x) = (x-a)Q_1(x) + R_1, \quad (6')$$

並且餘式 R_1 不含 x ，因為除式 $x-a$ 是一次式。由恆等式(6')，如令 $x=a$ ，就得

$$R_1 = f(a),$$

這就是所要證明的。

商式 $Q_1(x)$ 的次數比被除式的次數少一次，亦即等於 $n-1$ ，而其最高次幂的係數等於被除式最高次幂的係數，即 p_0 ，因為除式中的對應係數等於一。

推論 1. 若數 a 是多項式 $f(x)$ 的根，即若 $f(a)=0$ ，則這個多項式可被 $x-a$ 整除，也就是說，可以分解因子，其因子之一等於 $x-a$ ：

$$f(x) = (x-a)Q_1(x), \quad \text{若 } f(a)=0. \quad (7)$$

推論 2. n 次方程不能有多於 n 個不同的根。

事實上，設 a 是 n 次多項式 $f(x)$ 的根，於是由上面的證明，得

$$f(x) = (x-a)Q_1(x), \quad (7')$$

其中 $Q_1(x)$ 為一 $n-1$ 次的多項式。再設 b 是多項式 $f(x)$ 的一個與 a

不同的根。把 $x=b$ 代入(7')中,使得

$$0=(b-a)Q_1(b)。$$

但依照條件 $b-a \neq 0$ 。所以 $Q_1(b)=0$, 亦即, b 是多項式 $Q_1(x)$ 的根。於是

$$Q_1(x)=(x-b)Q_2(x),$$

從而

$$f(x)=(x-a)(x-b)Q_2(x),$$

其中 $Q_2(x)$ 是 $n-2$ 次的多項式。繼續這種論證,我們便得:若 $a, b, \dots, d$ 是多項式 $f(x)$ 的 p 個互不相同的根,則

$$f(x)=(x-a)(x-b)\cdots(x-d)Q_p(x),$$

其中 $Q_p(x)$ 是 $n-p$ 次的多項式。但因多項式的次數不為負數,所以 $p \leq n$, 這就表明 $f(x)$ 不能有多於 n 個不同的根。

同時,我們看到,解代數方程與分解整多項式為線性因子,即關於 x 為一次因子,是同樣的問題:假使我們已分解多項式 $f(x)$ 為線性因子,那末,同時也就解出了方程 $f(x)=0$; 假使已經解出方程 $f(x)=0$, 那末,同時也就得到了多項式 $f(x)$ 的因式分解。

假使 n 次多項式 $f(x)$ 有 n 個不同的根 $a, b, c, \dots, l$, 那末,由上面的證明便得

$$f(x)=(x-a)(x-b)\cdots(x-l)Q_n(x),$$

其中 $Q_n(x)$ 是零次多項式,即常數。顯然, $Q_n(x)$ 就是 $f(x)$ 中 x 的 n 次幕的係數 p_0 , 所以

$$f(x)=p_0(x-a)(x-b)\cdots(x-l)。$$

例1. 方程 $x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$, 由二次方程求解的公式有根 $x_1 = \frac{2}{3}$ 及 $x_2 = -1$; 最高次幕的係數等於1, 因而

$$x^2 + \frac{x}{3} - \frac{2}{3} = \left(x - \frac{2}{3}\right)(x+1)。$$

2. 方程 $3x^2 + x - 2 = 0$ 有同樣的根 $x_1 = \frac{2}{3}$ 及 $x_2 = -1$ 。因而, 和前例一樣, 三項式 $3x^2 + x - 2$ 含有因子 $x - \frac{2}{3}$ 及 $x+1$; 但最高次幕的係數等於3; 所以

$$3x^2+x-2=3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+1)。$$

3. 將三項式 x^2-5x+6 分解為因子 $x-2$ 及 $x-3$ 。事實上，

$$x^2-5x+6=x^2-2x-3x+2\cdot3=(x-2)x-3(x-2)=(x-2)(x-3)。$$

所以，這個三項式有根 $x_1=2$ 及 $x_2=3$ 。

4. 多項式 $x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$ ，很明顯地，有根 1：

$$1^5-1^4+1^3-1^2+1-1=0。$$

所以，這個多項式可被 $x-1$ 整除；因而

$$x^5-x^4+x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^4+x^2+1)。$$

用分解一個方程左邊的因式去解方程的方法，僅在特殊的情形下有效。就一般情形說，把一個方程解法的問題化為分解多項式為一次因子問題，仍然並不表示問題已經簡單化。

推論 3. 多於 n 個不同的根的 n 次多項式，恆等於零，亦即，它所有的係數等於零。

事實上，若命題不真確，則多項式將高於 n 次，而這與假設衝突。

例如，若三項式 Ax^2+Bx+C 於 $x=x_1$ ， $x=x_2$ 及 $x=x_3$ 處等於零，其中 x_1 ， x_2 ，及 x_3 互不相等，那末，它恆等於零；換句話說，由等式

$$Ax_1^2+Bx_1+C=0, \quad Ax_2^2+Bx_2+C=0, \quad Ax_3^2+Bx_3+C=0$$

當 x_1 ， x_2 及 x_3 互不相等時，即有

$$A=0, \quad B=0, \quad C=0。$$

§ 4. 方程的重根

假使多項式 $f(x)$ 能被差 $x-a$ 的 k 次幂整除，但不能用這個差的 $(k+1)$ 次幂整除，則數 a 叫做多項式 $f(x)$ 的 k 重根，而 k 叫做根 a 的重複次數。若 $k=1$ ，則 a 叫做多項式 $f(x)$ 的單根，若 $k>1$ ，則叫重根。

定理 多項式 $f(x)$ 的重根也就是導函數 $f'(x)$ 的根，但其重複次數減低一次。

事實上，若 a 是多項式 $f(x)$ 的重根（其重複次數為 k ），則按照重

根定義，

$$f(x) = (x-a)^k \varphi(x), \quad (8)$$

其中 $\varphi(a) \neq 0$ 。微分這等式，有

$$\begin{aligned} f'(x) &= k(x-a)^{k-1} \varphi(x) + (x-a)^k \varphi'(x) = \\ &= (x-a)^{k-1} [k\varphi(x) + (x-a)\varphi'(x)]. \end{aligned}$$

但方括號中的式子當 $x=a$ 時成為 $k\varphi(a)$ ，由假設， $k\varphi(a)$ 不等於零。這樣，由關於 $f'(x)$ 的最後等式，就證明了 a 為多項式 $f'(x)$ 的 $(k-1)$ 重根。

所以，若 a 是方程 $f(x)=0$ 的 k 重根，則

$$\left. \begin{aligned} f(a) &= 0, f'(a) = 0, f''(a) = 0, \dots, f^{(k-1)}(a) = 0, \\ \text{但 } f^{(k)}(a) &\neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

這些關係式不僅是數 a 為方程 $f(x)=0$ 的 k 重根的必要條件，而且也是充分條件。事實上，按照戴勞公式，在條件 (9) 之下，多項式 $f(x)$ 可表為下面的形式：

$$f(x) = \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a),$$

由此，將 $(x-a)^k$ 提到括號外面，便得

$$f(x) = (x-a)^k \varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 表示括號內的整多項式，而且 $\varphi(a) = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \neq 0$ 。

推論 方程 $f(x)=0$ 的重根，就是多項式 $f(x)$ 與其導函數的最大公因式的根，而其重複次數降低一次。

因此，我們求得兩個多項式的最大公因式，就可以把方程的重根分出來。

例 給定方程

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0.$$

這個方程是否有重根？假如有的話，怎樣求出它們？

為了解答這問題，求出多項式

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \quad \text{及} \quad f'(x) = 3x^2 - 10x + 8$$

的最高公因式，或求 $3f(x)$ 與 $f'(x)$ 的最高公因式（因在所給的問題中，常數因子沒有關係）。

當 $3f(x)$ 除以 $f'(x)$ 時，得餘式 $-\frac{2}{3}(x-2)$ ：

$$3f(x) = \left(x - \frac{5}{3}\right)f'(x) - \frac{2}{3}(x-2)。 \quad (10)$$

由此可見，多項式 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 的最高公因式也應當是 $x-2$ 的因子。其次， $f'(x)$ 確實可被 $x-2$ 整除，於是等式 (10) 即表明： $f(x)$ 也可以被 $x-2$ 整除。因而，二項式 $x-2$ 就是所求的 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 的最高公因式，而 2 為方程 $f(x)=0$ 的二重根。當多項式 $f(x)=x^3-5x^2+8x-4$ 除以 $(x-2)^2$ 時，得商式 $x-1$ 。所以

$$f(x) = (x-2)^2(x-1)，$$

亦即，已知方程有二重根 2 與單根 1。

§ 5. 關於方程根的個數的問題

前面已經證明 n 次多項式不能有多於 n 個的根。假使我們能證明任一多項式至少有一個根，則由此命題必然得出： n 次多項式具有 n 個根。但是，要對於一般的情形來證明這個命題是能做到的，只要我們引進新的數——虛數，以推廣數的概念。把這些數與那些我們一直運用到現在並總稱之為實數的數（整數，分數，無理數，正數和負數）歸併在一起，就使我們能夠在許多數學問題中作出普遍的劃一的表述。

在實數域中，二次方程的解法歸結為三種情形：或者二次方程有二根，或者二次方程有一根，最後，或者二次方程沒有根，亦即，作為該方程左邊的二次三項式，當 x 為任何值時，恆保持一定的符號。例如，方程 $x^2-4x+3=0$ 有兩個根 1 與 3；方程 $x^2-4x+4=0$ 僅為 $x=2$ 一值所滿足，而方程 $x^2-4x+8=0$ 根本沒有根，亦即三項式 x^2-4x+8 不論 x 為任何（實）值，都不為零，對於所有的 x 值，都是正數。

按照為方程 $x^2+px+q=0$ （其中 p 及 q 為任何數）所導出的公式

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}，$$

來解方程 $x^2-4x+8=0$ ，引導出沒有意義的運算，即引出負數的平方根：

$$x=2\pm\sqrt{4-8}=2\pm\sqrt{-4}。$$

所有正的和負的實數的平方都是正數，而記號 $\sqrt{-4}$ 就需要找出新的數，它的平方將等於負數 -4 。

假使我們希望二次方程解法的公式帶有普遍性，亦即，當係數 p 與 q 的值為任何數值時都有意義，我們就必須首先給這一類如 $\sqrt{-4}$ 的記號以意義。這就必須由引進新的數——虛數來擴充數的概念。