21 Applicable Education

21世纪应用型人才教育公共基础课通用教材

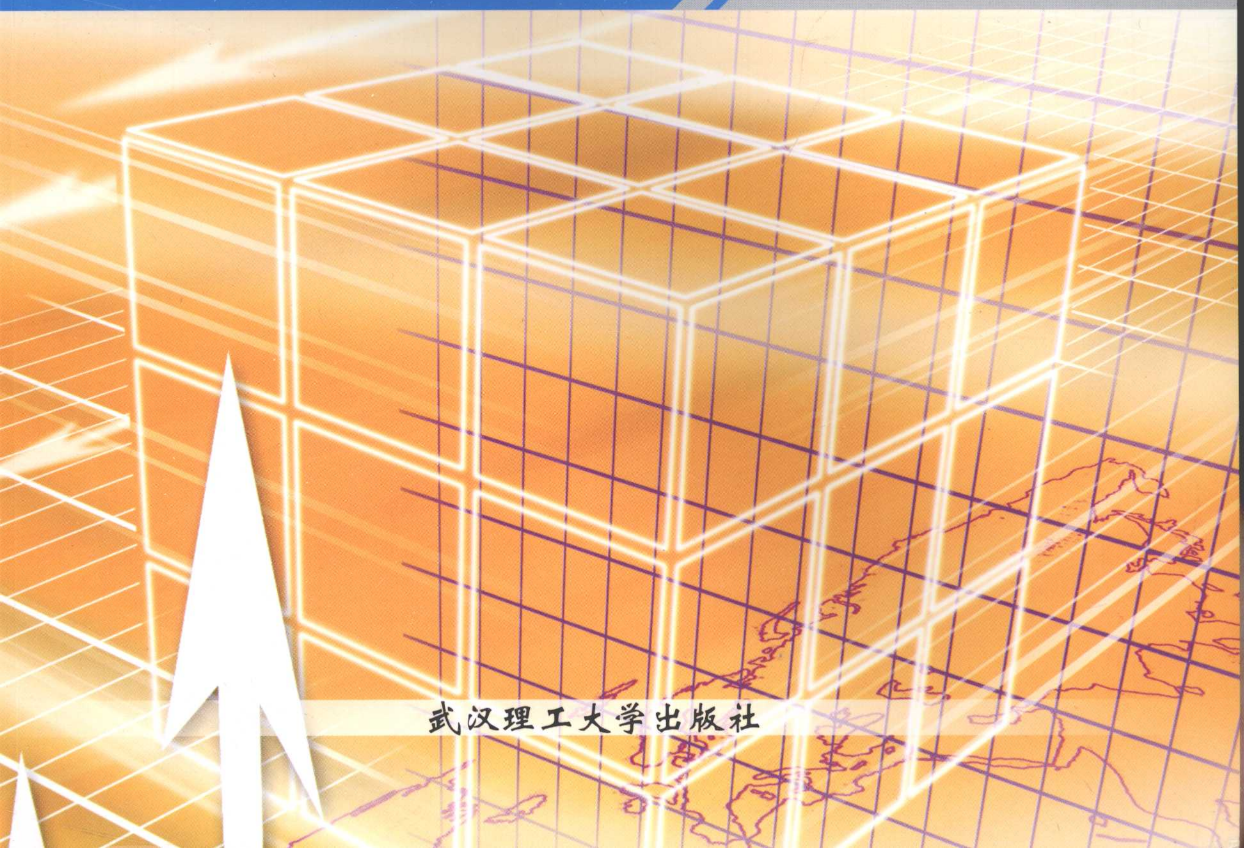
高等数学

GAODENG SHUXUE

（下 册）

AODENG SHUXUE

葛恒林　施伟斌　主编



武汉理工大学出版社

21世纪应用型人才教育公共基础课通用教材

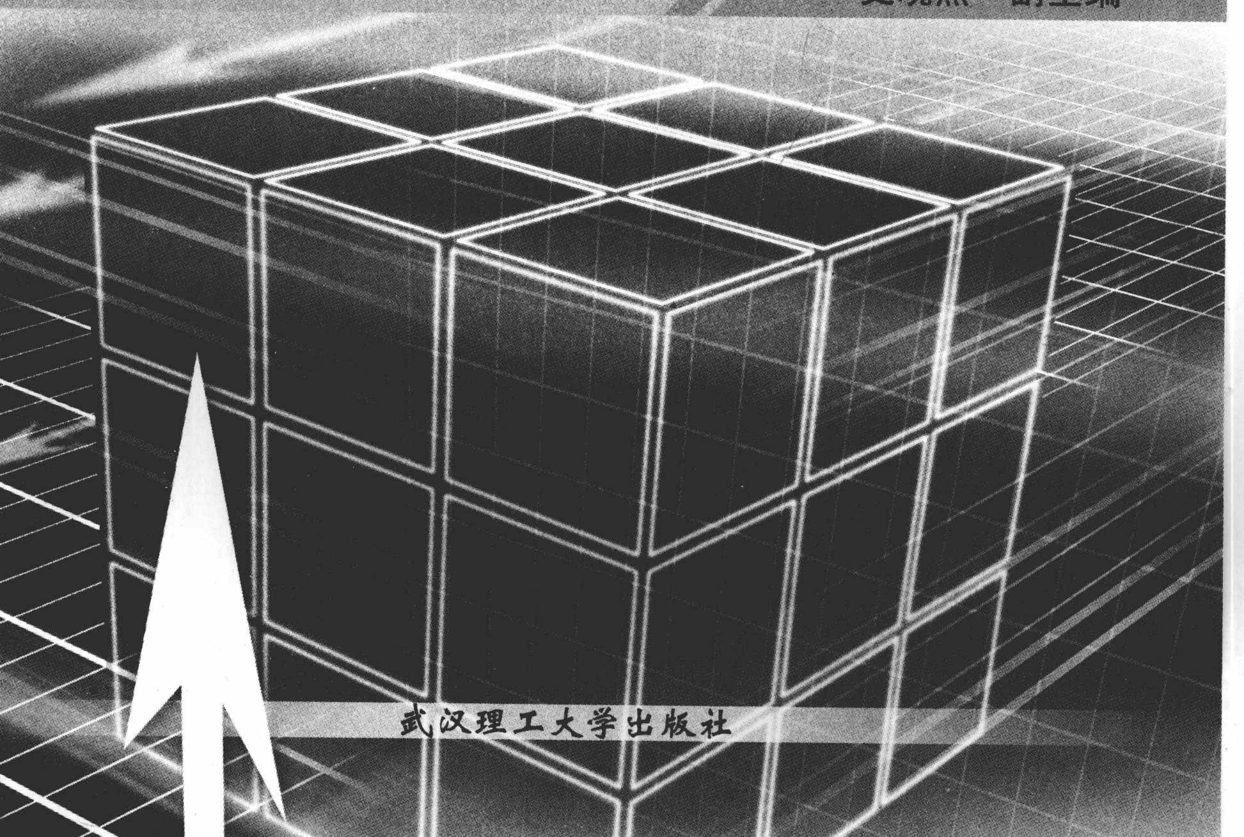
高等数学

GAODENG SHUXUE

（下册）

葛恒林　施伟斌　主编

史晓燕　副主编



武汉理工大学出版社

【内容提要】

《高等数学》(上、下)是21世纪应用型人才教育公共基础课通用教材之一.

本书主要包括三部分内容,分别是微积分、线性代数初步、概率论与数理统计初步.上册的内容为微积分,下册的内容为线性代数初步和概率论与数理统计初步.在选材和叙述上概念清晰易懂,内容深浅适度,容量适当,并结合工科专业的特点,注重实践应用.同时,在例题和习题的选择上,不少题目既具有启发性、趣味性,又具有挑战性和广泛的应用性.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·下/葛恒林,施伟斌主编.—武汉:武汉理工大学出版社,2009.3

ISBN 978-7-5629-2890-4

Ⅰ.高…　Ⅱ.①葛…　②施…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第017146号

出版者:武汉理工大学出版社(武汉市洪山区珞狮路122号　邮编:430070)

印刷者:河北省高碑店市鑫宏源印刷包装有限责任公司

发行者:各地新华书店

开　本:787×960　1/16

印　张:13

字　数:255千字

版　次:2009年3月第1版

印　数:1—3000册

定　价:25.00元

前　言

《高等数学》(上、下)是21世纪应用型人才教育公共基础课通用教材之一.

学好这门课程,能为学生毕业后从事计量分析工作提供有力的工具,同时能够极大地提高学生的逻辑思维能力和创新思维能力.编写本套教材的主要原则是在讲清必要的基本概念和基本理论的基础上,加强基本方法和基本技能的训练,利用有限的学时,使学生掌握后续课程和今后实际工作中常用的数学方法.

本套书主要包括三部分内容,分别是微积分、线性代数初步、概率论与数理统计初步.上册的内容为微积分,下册的内容为线性代数初步和概率论与数理统计初步.在选材和叙述上概念清晰易懂,内容深浅适度,容量适当,并结合工科专业的特点,注重实践应用.同时,在例题和习题的选择上,不少题目既具有启发性、趣味性,又具有挑战性和广泛的应用性.

参加本书编写的有:安徽财经大学葛恒林教授(下册第一篇第一、二、三、四章)、西安技师学院施伟斌副教授(下册第二篇第一、二、三章)、辽宁地质工程职业学院史晓艳副教授(下册第二篇第四、五章)、山东省德州学院刘耀斌教师(下册第二篇第六章).由葛恒林、施伟斌老师担任主编,史晓艳老师担任副主编,最后全书由葛恒林、施伟斌老师负责总纂、修改和审定.

本书在编写过程中,得到诸多参编老师所在学校领导和北京华兴同盟文化交流有限公司的大力支持,同时得到有关专家和学者的热情帮助,书中借鉴了一些著作,在此一并致谢!

由于认识和视野的局限,本书的缺陷和不足在所难免,我们诚恳地希望读者对本书提出宝贵的意见,以使其不断地得到充实和修改.

编　者

2008年11月

目　　录

第二篇

第一篇

第一章　行列式

行列式的概念来源于线性方程组的求解.在中学代数里,已经介绍过二阶、三阶行列式的定义、性质和计算.行列式是研究线性代数的一个重要工具,在数学的各个分支以及其他学科中,都有着广泛的应用.在这一章中,将介绍 n 阶行列式的定义,讨论它的性质以及计算方法,最后给出解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

1.1　n 阶行列式

一、二阶、三阶行列式

设有二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,方程组(1-1)有唯一解:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1-2}$$

为了记忆的方便,引进符号:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

并称它为二阶行列式。二阶行列式的计算可用图 1-1 表示.

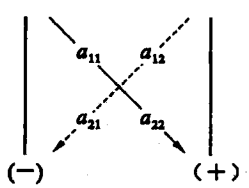


图 1-1

利用二阶行列式概念,式(1-2)中的分子可以分别

记为：

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

因此，当行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，方程组(1-1)的解可以表示为：

$$x_1=\frac{D_1}{D}\qquad x_2=\frac{D_2}{D} \tag{1-3}$$

【例 1-1】 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2=8 \\ 2x_1+7x_2=5 \end{cases}$$

解　因为方程组中未知量的系数行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=3\times 7-2\times 4=13\neq 0$$

所以方程组有唯一解，再计算：

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=36,\quad D_2=\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-1$$

于是方程组的解为：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{36}{13},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{1}{13}$$

对于含有三个变量的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1-4}$$

也有类似的结论. 为此，引进三阶行列式，记：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

三阶行列式所表示的代数和可以用图 1-2 显示的对角线规则(亦称沙流氏规则)记忆. 图中，沿各实线相连的三个数的积取正号；沿各虚线相连的三个数的积取负号，其代数和即为三阶行列式的值.

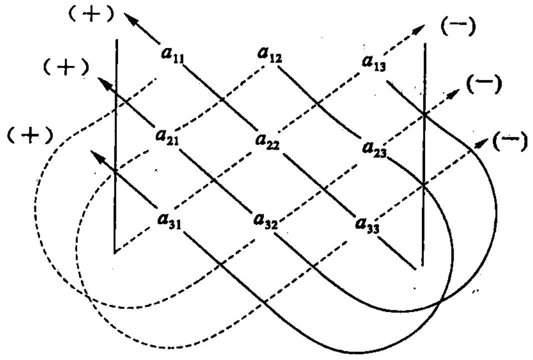


图 1-2

【例 1-2】 计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

解　$D=1\times0\times6+2\times5\times(-1)+3\times4\times0$

$-3\times0\times(-1)-1\times5\times0-2\times4\times6$

$=-10-48=-58$

二、排列及其逆序数

二阶、三阶行列式可以由对角线规则计算，但是 n 阶行列式却不能按对角线规则推广，而要依据其结构规律进行. 为此，先引入排列的概念.

定义 1.1　由 n 个数码 $1,2,\cdots,n$，组成一个 n 元有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$，称为一个 n 阶排列.

例如，3124 是一个四阶排列；2715436 是一个七阶排列. 我们知道，不同的 n 阶排列共有 $n!$个，例如 1,2,3 这三个数码的不同排列总共有 $3!=6$ 个：

$$123,132,213,231,312,321$$

定义 1.2　在一个 n 阶排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果较大的数 i_s 排在较小的数 i_t 的前面，即 $i_s>i_t(t>s)$时，称这一对数 i_s,i_t 构成一个逆序，一个排列的逆序总数，称为该排列的逆序数，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

【例 1-3】 在排列 25413 中，构成逆序的数对有 21,54,51,53,41,43 共 6 个，因此：

$$\tau(25413)=6$$

【例 1-4】 计算排列 $123\cdots n$ 与 $n(n-1)\cdots321$ 的逆序数.

解：在 n 阶排列 $123\cdots n$ 中，各个数是按照由小到大的自然顺序排列的，这一排列称为 n 元自然序排列.自然序排列的任何一个数对都不构成逆序，其逆序数为 0，$\tau(123\cdots n)=0$；而在排列 $n(n-1)\cdots 321$ 中，排在 n 之后而小于 n 的数码有 $(n-1)$ 个，排在 $(n-1)$ 之后小于 $(n-1)$ 的数码有 $(n-2)$ 个，…，排在 3 之后小于 3 的数码有 2 个，排在 2 之后小于 2 的数码是 1 个，可见：

$$\tau(n(n-1)\cdots 321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

定义 1.3　逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

如例 1-3 中的排列 25413 是一个偶排列，容易验证 132，213，321 是奇排列，而 123，231，312 则是偶排列.

定义 1.4　在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，把其中的某两个数码 i_s 和 i_t 互换位置，而其余数码不动，就得出另一个排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，对排列施行的这种变换称为对换，常用符号 (i_s,i_t) 表示.

例如，$25413\xrightarrow{(5,1)}21453$.

定理 1.1　任意一个排列经过一次对换后，改变其奇偶性.

证明　首先讨论互换相邻两个数码的情形，设排列为 $AijB$，其中 A，B 表示除 i，j 两个数码外的其余数码，经过对换 (i,j)，变为排列 $AjiB$.

在这两个排列中，除 i，j 外，其他任何两个数的顺序均未改变，并且 i，j 与 A、B 中数码的次序也没有改变.因此，若 $i<j$，则新排列比原排列增加了一个逆序；反之，则减少了一个逆序.即相邻对换改变排列的奇偶性.

一般情况，设互换的两个数 i，j 之间还有 k 个数 $i_1,i_2,\cdots,i_k$，即原排列为 $Aii_1i_2i_3\cdots i_kjB$，经过对换 (i,j) 变为排列 $Aji_1i_2\cdots i_kiB$.我们可以把它看做是先把 i 依次与 $i_1,i_2,\cdots,i_k,j$ 作 $k+1$ 次相邻对换，得到排列 $Ai_1i_2\cdots i_kjiB$ 后，再把数 j 依次与 $i_k,\cdots,i_2,i_1$ 作 k 次相邻对换而得出.也就是说 (i,j) 对换可以看作经过上述 $(2k+1)$ 次相邻对换得来，其奇偶性变更了 $(2k+1)$ 次.即两者的奇偶性恰好是不同的.

定理 1.2　当 $n\geqslant 2$ 时，所有 $n!$ 个 n 阶排列中，奇偶排列各占一半.

证明　设共有 p 个 n 阶奇排列，q 个 n 阶偶排列，$p+q=n!$.对于 p 个奇排列施行同一个对换 (i,j)，那么由定理 1.1 可得出 p 个偶排列，而且不同的奇排列经过同一对换 (i,j) 后不能得到相同的偶排列，故 $p\leqslant q$.同理，可证 $q\leqslant p$，所以 $p=q=\frac{1}{2}n!$.

三、n 阶行列式

在给出 n 阶行列式的定义之前，先来分析一下二、三阶行列式的特点，二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

由两个项组成，每一项都是不同行、不同列的两个元素的乘积，而三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

它是所有位于不同行不同列的三个元素乘积的代数和，因此，它的每一个项都有下述形式：

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

且其符号恰好与排列 $j_1j_2j_3$ 的奇偶性一致. 所以三阶行列式可以表示成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中“$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$”表示 $j_1\ j_2\ j_3$ 取遍所有的三阶排列时，对形如 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的项求和.

通过对二、三阶行列式的分析，我们不难给出 n 阶行列式的概念.

定义 1.5　**由 n^2 个数 $a_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的算符：**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，其中横排称为行，纵排称为列，它表示所有可能取自不同行、不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和. 在这个代数和中，一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的行标按自然顺序排列，其符号由列标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的奇偶性确定，若 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列则取负号，而当它是偶排列时取正号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-5}$$

其中“$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$”表示对所有的 n 阶排列求和.

由于 n 阶排列共有 $n!$ 个,所以式(1-5)所表示的代数和共有 $n!$项,当 $n=2$ 时,就得到二阶行列式;$n=3$ 时,即是三阶行列式;而当 $n=1$ 时,就是一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$,这里,一阶行列式与绝对值记号虽然形式上一样,但其意义是完全不同的.

【例 1-5】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 按照定义,D 是一个含有 $5!=120$ 项的代数和,但是除了项 $1\times2\times3\times4\times5$ 外,其余各项均为零,而项 $1\times2\times3\times4\times5$ 的行标排列是自然序排列,列标排列则是 54321,其逆序数 $\tau(54321)=10$,所以 $D=(-1)^{\tau(54321)}1\times2\times3\times4\times5=(-1)^{10}\times120=120$.

【例 1-6】 计算 n 阶行列式:

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-6}$$

解 根据定义 1.5:

$$D_n=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

在上述等式右边,只有当 $j_n=n,j_{n-1}=n-1,\cdots,j_2=2,j_1=1$ 时,乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 才不为零,因此:

$$D_n=(-1)^{\tau(12\cdots j_n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

具有式(1-6)形状的行列式称为上三角行列式,行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线,主对角线上的元素称为主对角元素. 上三角行列式是主对角线下方元素全为零的行列式;如果主对角线上方元素全为零,则称为下三角行列式;而当主对角线以外的元素全为零时,称为对角行列式.

同理可知,下三角行列式以及对角行列式,其值亦等于其主对角元素的乘积.

1.2　行列式的性质

利用行列式定义计算行列式的值，只在较低阶的情形才有可能. 因此，有必要研究行列式的基本性质，这些性质有助于我们了解行列式，简化行列式的计算. 而且，它们在理论上也具有重要意义.

定理 1.3　n 阶行列式中的一般项目可以记为

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \tag{1-7}$$

证明　由于 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 都是 n 阶排列，因此(1-7)式中的 n 个元素取自 D 的不同行与不同的列.

如果交换(1-7)式中两个元素 $a_{i_s j_s}$ 与 $a_{i_t j_t}$，则其行标排列由 $i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 变为 $i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$，由定理 1.1 可知两者有不同的奇偶性；而列标排列由 $j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n$ 变为 $j_1 \cdots j_t \cdots j_s \cdots j_n$，两者奇偶性亦不同. 但以下排列逆序数之和的奇偶性则是相同的，即有

$$(-1)^{\tau(i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n)+\tau(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)} = (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n)+\tau(j_1 \cdots j_t \cdots j_s \cdots j_n)}$$

可见交换(1-7)式中元素的位置，其符号不变，经有限次交换后，总可以使(1-7)式中各元素的位置，其行标排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为自然序排列 $12\cdots n$，记此时的列标排列为 $k_1 k_2 \cdots k_n$，则(1-7)式变成

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n} = (-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}$$

此结果即是行列式定义中的一般项.

性质 1　将行列式的行、列互换，行列式的值不变，即设：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D=D^{\mathrm{T}}$，行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式.

证明　记 D 的一般项为：

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_2} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

它的元素在 D 中位于第 1 行、第 2 行、…、第 n 行以及第 j_1 列、第 j_2 列、…、第 j_n 列上，因而它是 D^{T} 中位于第 j_1 行、第 j_2 行、…、第 j_n 行和第 1 列、第 2 列、…、第 n 列上的元素，这个 n 元素的乘积在 D^{T} 中应为：

$$a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}$$

由定理 1.3，其符号也是$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$，即 D 与 D^{T} 具有相同的项，且符号

也相同,所以 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 1 表明,在行列式中,行与列的地位是对称的:凡是行具有什么性质,它的列也必具有同一性质.因此有关行列式的定理、性质,只需就其中的行(或列)给出即可.

性质 2　互换行列式的两行(列),行列式改变符号.

证明　给定行列式:

$$D=\begin{array}{c|cccc|l}
 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & \text{第 } i \text{ 行}\\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & \text{第 } s \text{ 行}\\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} &
\end{array}$$

互换 D 的第 i 行与第 s 行,得到行列式:

$$D_1=\begin{array}{c|cccc|l}
 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & \text{第 } s \text{ 行}\\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & \text{第 } i \text{ 行}\\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} &
\end{array}$$

D 的一般项中 n 个元素的乘积为:

$$a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}$$

它的各个元素位于 D 中不同的行、列上,因而也是 D_1 中不同行列上的元素的乘积,该乘积在 D 中的符号为:

$$(-1)^{\tau(1\cdots i\cdots s\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)}$$

由于 D_1 是互换 D 的第 i 行与第 s 行得出的,列的次序并没有改变,并且注意到 $\tau(1\cdots s\cdots i\cdots n)$ 是奇数,所以它在 D_1 中的符号为

$$(-1)^{\tau(1\cdots s\cdots i\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)}=-(-1)^{\tau(1\cdots i\cdots s\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)}$$

可见 D_1 中的每一项都是 D 的对应项的相反数:$D=-D_1$.

推论　如果行列式中有两行(列)的对应元素相同,则此行列式的值为零.

因为将行列式 D 相同的两行互换,其结果不变,但由性质 2 知它同时又等于相反数:$D=-D$,故 $D=0$.

性质 3　用数 k 乘以行列式某一行(列)的所有元素,等于用数 k 乘以此行列式,即:

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i2} & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD$$

证明　根据行列式定义:

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=kD \end{aligned}$$

推论 1　行列式一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式的外面.

推论 2　若行列式 D 有一行(列)的元素全为零,则此行列式的值等于零.

推论 3　如果行列式有两行(列)的对应元素成比例,则此行列式的值为零.

性质 4　若行列式 D 中第 i 行(列)的所有元素都可以表示成两个数的和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则行列式 D 可以写成两个行列式的和,其中一个行列式的第 i 行元素是 $b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in}$,另一个行列式的第 i 行元素是 $c_{i1},c_{i2},\cdots,c_{in}$,而这两个行列式的其他各行都与 D 相同,即:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5　将行列式某一行(列)的所有元素乘以同一数 k 后,加到另一行(列)的相应元素上,行列式的值不变,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行}\times k \\ \\ s\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1}+ka_{i1} & a_{s2}+ka_{i2} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明　由性质 4 及性质 3 的推论 3 即可得证.

下面举例说明如何利用行列式的性质,使行列式的计算简化,使高阶行列式的计算成为可能.

【例 1-7】 计算行列式:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix}$$

解　因为第 1 列与第 2 列对应元素成比例,根据性质 3 的推论 3:$D=0$.

【例 1-8】 计算行列式:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解　利用性质 2 和性质 5 把原行列式化为上三角行列式: