

建筑力学

第二分册

理論、材料、建筑力学教研組合編

华南工学院教务处出版科印

1960.11

目 录

第六章 应力状态 (I)	(1)
§ 6.1 应力状态	(1)
§ 6.2 二向应力状态下任意斜截面上的应力的确定	(3)
§ 6.3 主应力, 主平面及最大剪应力的确定	(5)
§ 6.4 求应力的图解法 (摩尔圆)	(6)
§ 6.5 三向应力状态的摩尔圆的概念	(11)
§ 6.6 广义虎克定律, 体积变形	(12)
§ 6.7 三向应力状态下材料的弹性变形位能	(15)
§ 6.8 纯剪, 材料的三个弹性常数 E, G, μ 之间的关系	(16)
第七章 强度理论	(19)
§ 7.1 材料的危险状态和强度理论的概念	(19)
§ 7.2 最大拉应力理论 (第一强度理论)	(20)
§ 7.3 最大拉伸应变理论 (第二强度理论)	(21)
§ 7.4 最大剪应力理论 (第三强度理论)	(21)
§ 7.5 歪形能强度理论 (第四强度理论)	(22)
§ 7.6 摩尔强度理论	(23)
§ 7.7 强度理论的发展简述	(25)
§ 7.8 对于强度理论的認識	(26)
第八章 圆轴扭转	(27)
§ 8.1 工程实际中的扭转问题	(27)
§ 8.2 圆轴扭转时横截面上的应力计算	(28)
§ 8.3 圆轴扭转时的变形及变形位能	(30)
§ 8.4 圆轴的极惯性矩和抗扭断面系数的计算	(31)



§ 8.5	實心和空心圓軸的設計, 強度條件和剛度條件	(33)
§ 8.6	圓截面傳動軸的設計	(36)
§ 8.7	圓軸扭轉時斜截面上的應力	(38)
§ 8.8	薄壁圓筒扭轉實驗, 純剪	(39)
§ 8.9	密圈螺旋彈簧的應力及應變	(40)
第九章 平面圖形幾何性質 (幾何量)		(43)
§ 9.1	靜矩與形心	(43)
§ 9.2	慣性矩、慣性積、慣性半徑	(45)
§ 9.3	慣性矩及慣性積的平行軸定理	(49)
§ 9.4	組合的對稱平面圖形的慣性矩	(50)
§ 9.5	坐標軸旋轉時慣性矩及慣性積的變化	(53)
§ 9.6	平面圖形的主慣性軸及主慣性矩	(55)
§ 9.7	坐標軸旋轉時慣性矩及慣性積變化的圖解法——慣性圓	(56)
§ 9.8	組合的非對稱平面圖形的主形心慣性矩	(57)
第十章 平面彎曲 (梁)		(62)
一、作用在梁上的外力		
§ 10.1	梁的支座種類及反力	(62)
§ 10.2	作用在梁上的荷載	(64)
二、梁的橫斷面的內力: 剪力和彎矩		
§ 10.3	剪力和彎矩	(66)
§ 10.4	剪力圖和彎矩圖	(68)
§ 10.5	分布荷載、剪力、彎矩間的微分關係及其應用	(73)
§ 10.6	帶有中間鉸的梁的剪力和彎矩圖	(75)
§ 10.7	疊加法畫彎矩圖	(77)
三、梁的應力		
§ 10.8	純彎曲時橫斷面上正應力公式及該公式可應用在橫向彎曲的情形	(78)
§ 10.9	按橫斷面上的正應力作梁的強度計算	(82)
§ 10.10	梁的合理截面	(84)
§ 10.11	矩形截面梁的剪應力	(86)
§ 10.12	圓形截面梁的最大剪應力	(90)
§ 10.13	薄壁截面梁的剪應力	(91)
§ 10.14	不對稱截面梁的彎曲、彎曲中心概念	(95)
§ 10.15	等強度梁	(97)
§ 10.16	梁的強度總校核	(100)

§10.17	梁的主应力迹线	(103)
§10.18	弯曲变形能	(104)
四、梁的变形		
§10.19	梁的挠变与倾角, 梁的变形在工程中的应用	(105)
§10.20	挠曲轴的微分方程式	(105)
§10.21	积分法求梁的变形	(108)
§10.22	初参数求梁的变形、通用方程	(113)
§10.23	虚梁法求梁的变形	(118)
§10.24	用叠加法求梁的变形	(124)
§10.25	变截面梁的变形	(125)
五、平面曲梁的强度计算		
§10.26	平面曲梁横断面上的内力	(128)
§10.27	纯弯曲时横断面上的正应力	(128)
§10.28	平面曲杆在平面弯曲时的强度条件	(134)
第十一章 在任意荷载下材料的应力与强度计算 (137)		
§ 11.1	杆件在一般受力情况下横断面上的内力	(137)
§ 11.2	斜弯曲	(138)
§ 11.3	弯曲与拉(压)的组合	(143)
§ 11.4	偏心压缩或拉伸	(144)
§ 11.5	截面核心	(147)
§ 11.6	弯曲与扭转的组合	(149)
第十二章 三铰拱 (154)		
§ 12.1	拱的一般概念	(154)
§ 12.2	三铰拱的数解法	(155)
§ 12.3	三铰拱的图解法	(162)
§ 12.4	合理拱轴的概念及拱的法向应力	(166)
§ 12.5	三铰刚架	(168)
§ 12.6	三铰拱式桁架	(170)
第十三章 结构的机动分析 (171)		
§ 13.1	结构机动分析的目的	(171)
§ 13.2	平面体系自由度	(171)
§ 13.3	几何不变体系的组成规则	(176)

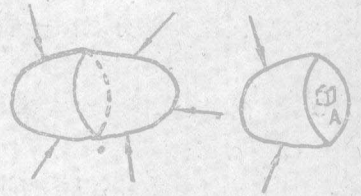
§ 13.4	瞬时变形体系	(176)
§ 13.5	机动分析的步骤与方法	(178)
§ 13.6	用速度图检查体系的瞬变性	(180)
§ 13.7	用零位法判断结构的几何可变性	(184)
第十四章 影响线		(186)
§ 14.1	影响线的概念	(186)
§ 14.2	用静力法绘制单跨静定梁的影响线	(187)
§ 14.3	用静力法绘制静定平面桁架影响线	(191)
§ 14.4	用静力法绘制三铰拱影响线	(193)
§ 14.5	用影响线求内力	(195)
§ 14.6	三角形影响线的最不利荷载位置的确定	(196)
§ 14.7	简支梁的绝对最大弯矩	(200)
§ 14.8	机动法绘制影响线的概念	(202)
第十五章 弹性结构的一般理论		(205)
(I) 弹性结构的基本定理		
§ 15.1	实功	(205)
§ 15.2	虚功	(210)
§ 15.3	虚位移原理在弹性体系中的应用	(211)
§ 15.4	功的互等定理	(211)
§ 15.5	变位互等定理	(212)
§ 15.6	反力互等定理	(214)
§ 15.7	反力变位互等定理	(215)
(II) 结构变位的计算公式		
§ 15.8	结构变位的概念	(217)
§ 15.9	由荷载作用所引起的结构变位	(218)
§ 15.10	图形相乘法	(225)
§ 15.11	由于温度变化所引起的变位	(231)
§ 15.12	由于支座位移所引起的变位	(234)
§ 15.13	变截面杆件变位求法的概念	(235)
§ 15.14	桁架变位图解法	(239)

第六章 应力状态論 (I)

§ 6.1 应力状态

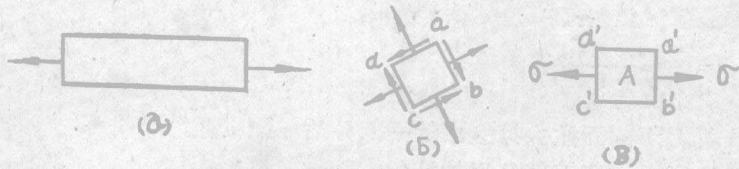
在 § 2.1 中我們已知道，一軸向拉（压）的桿件，随着所取截面的方向不同，在該截面上应力也不同。一般說来，应力（大小和方向）不仅随截面方向不同而不同，而且同一截面上各点的应力也不一定相同。为了判別一个构件的强度必須了解构件各点的〔应力状态〕。所謂〔一点的应力状态〕就是物体受力后，通过某一点的各个截面上的应力情况。我們研究通过不同点的不同截面上的应力情况，目的是能够判別物体受力后什么地方什么方向最危險，並为构件的强度校核提供条件。

当一物体受力时，在物体任何截面上都作用着应力，設在某一点 A 附近截出一个单元体——微小的长方体（图 6.1），則在单元体的六个面上都有应力作用。如果单元体取得极小，那么在每个面上的应力都可以认为是均匀分佈的，而且在相对两面上的应力是大小相等，方向相反的。于是这六个面上的应力就代表通过 A 点的三个不同方向截面上的应力。在彈性理論的基本方程一章里，我們將証明，只要知道了过一点三个不同方向截面上的应力，就可以算出过此点任一斜截面上的应力。因此这样一个小单元体的应力就代表了一点的应力状态。



(图 6.1)

在直杆受軸向拉力的情况下，我們在杆內任一点 A 附近截出一个单元体，若所取的单元体面是傾斜的（图 6.2），那么在这单元体的四面 abcd 上不仅有正应力作用，同时也有剪应力作用，单元体的前后两面显然是沒有任何应力作用的。但是如果我們在 A 点用鉛直和水平截面取出一单元体 a'b'c'd'（图 6.2.B），这时在 a'b' 和 c'd' 面上只有正应力 σ 作用，其余的四面上都沒有正应力和剪应力存在。同样地，一般情况下如图 6.1，通过



(图 6.2)

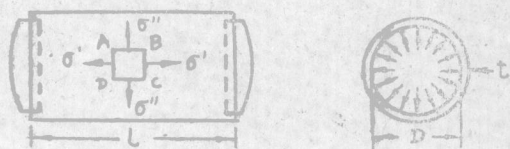
A 点在各个不同方向所截取的无数单元体中，可找出一个特殊的单元体，在这个单元体的各个面上只作用着正应力而沒有剪应力。凡是通过受力物体的任一点所取的截面上，如果沒有剪应力作用时，这个截面叫做該点的主平面。作用在主平面上的正应力，就称为主应力。

在彈性理論基本方程一章里將證明：通过受力物体内每一点，都有三个互相垂直的主平面，而这三个主平面上的三个主应力，其中有一个是最大的正应力，有一个是最小的，今后，我們將 σ_1 ， σ_2 及 σ_3 来代表受力物体中某一点的三个主应力，並以 σ_1 代表代数值最大的正应力， σ_3 代表最小的，亦即 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 。

在简单拉伸（或压）的桿件内，每一点上，只有一个主应力不等于零，（ $\sigma_1 = \sigma$ ， $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ），这样的单元体（图 6.2 B）叫做单向应力状态。若单元体上有两个主应力或三个主应力不等于零时，则分别叫二向应力状态或三向应力状态。下面我们举出二向和三向应力状态的例子。

二向应力状态最常见的例子就是锅炉（图 6.3）。

从图 6.3 中可以看出：对筒底的压力将使圆筒部分在横断面（垂直于圆筒的軸綫）上产生拉力，同时对筒壁的压力也将使筒壁在纵向截面上产生拉力。这样一来，假如我们从锅炉的圆筒部分取出一个单元体 ABCD，则这一单元体将受二方向的拉伸；与纵綫垂直的断面上的应力 σ' 以及沿纵綫的断面上的应力 σ'' （图 6.3）。



(图 6.3)

现在我们計算这些应力。用 D 代表圆筒的内直径， L 为它的长度， t 为它的壁厚（我們假设 t 比起 D 很小， $t < D/20$ ， $L \gg D$ ）。

作用在筒底上的並沿着纵綫方向拉伸圆筒的力等于：

$$P = g \frac{\pi D^2}{4} L$$

接受这些力的是厚度为 t ，直径为 D 的圆环面积（因筒的横断面），这一面积的值（像宽为 t 长为 πD 的細条一样）：

$$F = t \pi D L$$

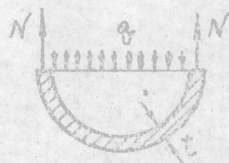
因而，应力等于：

$$\sigma' = \frac{P}{F} = \frac{g \frac{\pi D^2}{4} L}{t \pi D L} = \frac{gD}{4t}$$

用直径平面将锅炉截开並去掉上面的一部分后（图 6.4），我們就可以求应力 σ'' 。在留下部分里的液体或气体的直径平面上作用着压力 g ，該压力由圆筒纵断面上的拉力 N 所平衡。下面部分的平衡条件将为：

$$gDL = 2N$$

从这里得：



(图 6.4)

$$N = \frac{gDL}{2},$$

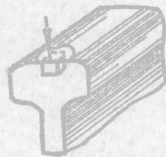
及应力 σ'' 等于:

$$\sigma'' = \frac{N}{tL} = \frac{gDL}{2tL} = \frac{gD}{2t}.$$

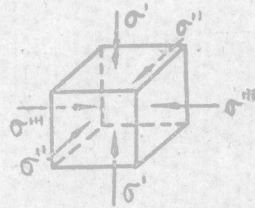
由此可知, 在平衡于圆筒纵线的面上的应力比在横截面上的大一倍。从锅炉内截出的单元体 ABCD 承受两个方向互相垂直的拉伸。在 σ' 和 σ'' 作用的截面上, 由于载荷对称的原因, 没有剪应力。在第三个方向, 即垂直于 ABCD 的方向, 因为内壁的压力和外壁的大气压力, 比起 σ' 和 σ'' 小得多, 所以可以认为它们等于零。如是, 我们在这里得到二向应力状态。采用主应力的符号, 得

$$\sigma_1 = \sigma'' = \frac{gD}{2t}, \quad \sigma_2 = \sigma' = \frac{gD}{4t}, \quad \sigma_3 = 0.$$

再举一个三向应力状态的例子。火车车轮和钢轨在表面上的很小范围内互相接触, 钢轨受到车轮的压力, 如果从钢轨的压力中心, 沿着平行及垂直于钢轨轴线方向 (图 6.5)。前已指出, 物体受压时, 横向尺寸将增大; 现在这个单元体的四周, 被大量钢轨材料紧紧包围, 阻碍着它向四周胀大, 也就是在单元体的侧面上, 受着正应力 σ'' 及 σ''' 的作用 (图 6.6), 所以我们说这个单元体处于三向应力状态。



(图 6.5)

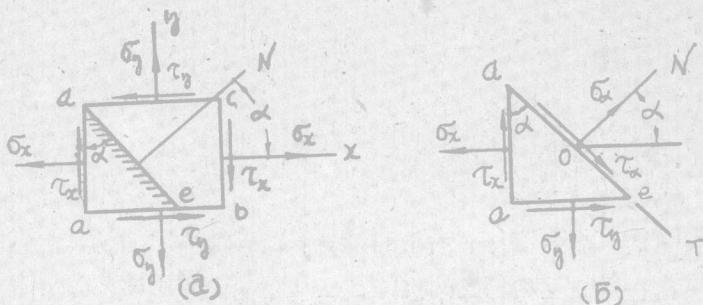


(图 6.6)

本章将着重研究二向应力状态, 即已知两正交面上的应力, 求任意斜截面上的应力。关于三向应力状态, 我们只粗略的谈谈, 留待以后详细讨论。

§ 6.2 二向应力状态下任意斜截面上的应力的确定

二向应力状态的一般情形表示在图 6.7a 上。单元体 abcd, 在它的四个侧面上作用有正应力 σ_x , σ_y 和剪应力 τ_x , τ_y 。附码表明这些应力作用的法线方向。因为单元体的尺寸很小, 所以各个平面上的应力可认为是均匀分布的。现在欲求出任一斜面 de (此截面与低平面相垂直) 上的正应力 σ_α 和剪应力 τ_α , 这个截面的外法线 N 与 σ_x 方向成 α 角, 我们规定 α 角以逆时针方向为正, 我们用 de 面切开单元体, 棱取出棱柱体 ade 作为分离体 (图 6.7b), 考虑这一分离体的平衡。



(图 6.7)

設 de 的面积是 dF 那么 ad 面和 ae 面的面积各是 $dF \cdot \cos \alpha$ 和 $dF \cdot \sin \alpha$, 取 T 和 N 作为参考轴, 计算作用于 ade 上的诸力在 N 方向的投影, 利用 $\sum F_N = 0$ 得

$$\sigma_\alpha \cdot dF + (\tau_x \cdot dF \cdot \cos \alpha) \sin \alpha - (\sigma_x \cdot dF \cdot \cos \alpha) \cos \alpha + (\tau_y \cdot dF \cdot \sin \alpha) \cos \alpha - (\sigma_y \cdot dF \cdot \sin \alpha) \sin \alpha = 0$$

上式中 $(\sigma_x \cdot dF \cdot \cos \alpha)$ 是作用在 ad 面上的总拉力 $\sigma_x \cdot ad = \sigma_x \cdot dF \cdot \cos \alpha$ 在 N 方向的投影, 其他各项可类似地写出. 利用剪应力互等定理 $\tau_x = \tau_y$ (此式由 $\sum M_0 = 0$ 得来) 将上式简化得

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - 2 \tau_x \sin \alpha \cos \alpha,$$

利用

$$\cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha) / 2, \quad \sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha) / 2$$

上式改写为

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha \quad (6.1)$$

同理, 利用 $\sum F_T = 0$ 得到

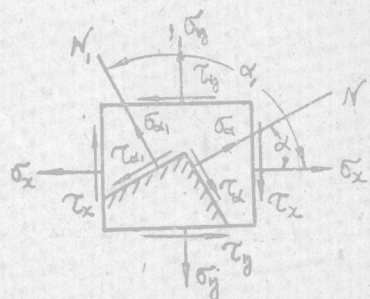
$$\tau_\alpha \cdot dF - (\tau_x \cdot dF \cdot \cos \alpha) \cos \alpha - (\sigma_x \cdot dF \cdot \cos \alpha) \sin \alpha + (\sigma_y \cdot dF \cdot \sin \alpha) \cos \alpha + (\tau_y \cdot dF \cdot \sin \alpha) \sin \alpha = 0$$

化简后得

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha \quad (6.2)$$

应用 (3.1) 和 (3.2) 两式即可将 de 面上的正应力 σ_α 及剪应力 τ_α 求出. 当 de 面方向改变时, α 角随同而变, 由此可见过单元体所取的截面不同, 其上作用的正应力和剪应力也就不同.

我们通过单元体取两个互相垂直的截面 (图 6.8), N 和 N_1 分别是两个截面的外向法线, 显然 N_1 与 X 成 $\alpha_1 = 90^\circ + \alpha$ 角, 欲求外向法线为 N_1 截面上的正应力 σ_{α_1} , 与剪应力 τ_{α_1} 时, 只须以 $\alpha_1 = 90^\circ + \alpha$ 代入 (6.1) 和 (6.2) 两式即得



(图 6.8)

$$\sigma_{\alpha 1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_x \sin 2\alpha \quad (6.3)$$

$$\tau_{\alpha 1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_x \cos 2\alpha \quad (6.4)$$

将 (6.1) 和 (6.3) 两式相加得出

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\alpha 1} = \sigma_x + \sigma_y$$

即通过单元体的互相垂直的两截面上的正应力之和是常数。

再比较 (6.2) 和 (6.4) 两式，我们仍然得到剪应力互等关系：

$$\tau_{\alpha} = -\tau_{\alpha 1}。$$

§ 6.3 主应力，主平面及最大剪应力的确定

由上节可知图 6.7a 所示的单元体中，截面 de 的方向改变时，其上的应力的和符号也发生改变。我们现在来推求在那个截面上的正应力达到最大值或最小值，为此可将 (6.1) 式对 α 求微商，并令此微商为零，就可求出正应力到达极值（最大或最小）时的 α 角：

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} (-2\sin 2\alpha) - 2\tau_x \cos 2\alpha = 0$$

$$\text{即} \quad \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha = 0 \quad (6.5)$$

比较 (6.5) 式和 (6.2) 式可以看出， σ_{\max} 和 σ_{\min} 所在的面就是 τ_{α} 为零的面，而剪应力为零的面，我们称之为主平面，在主平面上的正应力称为主应力。由此可知在两向应力状态中主应力就是最大或最小的正应力。所以在两向应力状态时主应力 σ_1 ， σ_2 和 X 轴所夹的角度 α_0 应当满足 (6.5) 式，即

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (6.6)$$

如果 α_0 满足上式，则 $\alpha_0 + 90^\circ$ 同样也满足上式，这样就定出了两个正交的主应力方向，主平面的方向也就随之确定，它们是互相垂直的。为了要计算主应力 $\sigma_1 = \sigma_{\max}$ 和 $\sigma_2 = \sigma_{\min}$ 的大小，我们先用 (6.6) 式计算出 $\sin 2\alpha_0$ 和 $\cos 2\alpha_0$ 值。然后代入 (6.1) 式，得到

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_{\max} \\ \sigma_2 = \sigma_{\min} \end{aligned} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \quad (6.7)$$

同样我们可以定出最大剪应力所有的面，令

$$\frac{d\tau_{\alpha}}{d\alpha} = 0$$

$$\frac{d\tau_{\alpha}}{d\alpha} = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha - 2\tau_x \sin 2\alpha = 0$$

設滿足上式的 α 角为 α_1 ，則

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_x} \quad (6.8)$$

如 α_1 滿足上式，則 $\alpha_1 + 90^\circ$ 也滿足上式，因此最大剪应力与最小剪应力的作用面是互相垂直的。由(6.8)式求出 $\sin 2\alpha_1$ 和 $\cos 2\alpha_1$ ，然后代入(6.2)式，得到

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{array} \right\} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \quad (6.9)$$

比較(6.6)式与(6.8)式，可以看出：

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = -\operatorname{Cot} 2\alpha_0 = \operatorname{tg} (2\alpha_0 \pm 90^\circ)。$$

由此可知，最大和最小剪应力所在的面是和主平面成 45° 角。

§ 6.4 求应力的圖解法 (摩尔圆)

前面两节所討論的解析方法，亦可用圖解法来进行。

在公式(6.1)及(6.2)中的角度 α 可以看成是一个参数，由(6.1)及(6.2)两式中把参数 α 消去。我們先把(6.1)式改写成

$$\sigma_{\alpha} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha, \quad (6.1')$$

將(6.1')及(3.2)两式平方后相加得

$$\left(\sigma_{\alpha} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{\alpha}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2. \quad (6.10)$$

因为在某一单元体上 σ_x 、 σ_y 及 τ_x 均匀为定值，所以在上式中右端是一个常数，如把 σ_{α} 及 τ_{α} 視為变量，那么(6.10)式的軌跡显然是一个圆。如果以 σ 作横坐标， τ 作

纵坐标，(6.10)所表示的是以 $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$ 为圆心， $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$ 为半径的圆。即代表任意斜截面上的正应力 σ_{α} 和剪应力 τ_{α} 的点必位于此圆周上。

这圆的画法可如下述：(参看图6.9)

1) 量取 $OA = \sigma_x$ (以拉应力为正，压应力为負)， $AD = \tau_x$ 即定出D点，这点的横坐标与纵坐标分別代表图6.9单元体上以X軸为法綫的面上的正应力和剪应力，图示 τ_x 为正，故自原点向上量取。

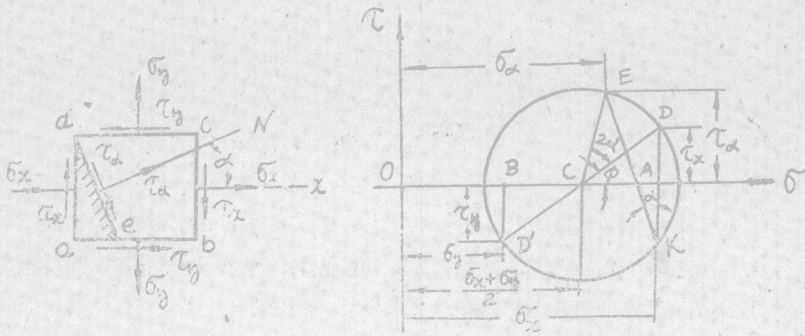


图 (6.9)

2) 量取 $OB = \sigma_y$, $BD' = \tau_y$ 即定出 D' 点, 这点代表以 Y 轴为法线的面上的应力, 图示 τ_y 为负, 故自原点向下量取。

3) 连接 D 及 D' 两点, 与横坐标轴交于 C 点, C 点即是圆心, 再以 CD 作半径画圆即得所欲求作圆。这圆称为摩尔圆或应力图。

上述作图法之正确易于证明, 因为

$$\overline{OC} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \quad \overline{CA} = \frac{\overline{OA} - \overline{OB}}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}.$$

又因 τ_x 与 τ_y 大小相同, 故知 $\triangle ADC \cong \triangle BD'C$, 所以

$$\overline{CD} = \sqrt{\overline{CA}^2 + \overline{AD}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} = \text{半径}.$$

利用上述的圆可以求单元体 (图6.9) 任意斜截面上的应力情况。如欲求 de 面的应力 σ_x 和 τ_x , 可在图6.9中把 DA 延长, 与圆周相交于点 K , K 点称为主点。自主点 K 画 KE 线平行 de 面, 交应力圆于点 E , 此点 E 的横、纵坐标分别代表 de 面上的正应力及剪应力。

现在证明上述作图法之正确。由图可知

$$\overline{OC} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \quad \overline{CA} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}.$$

由于 $KE \parallel de$, $KD \parallel ad$, 所以 $\angle DKE = \alpha$ 又 $\angle ECD$ 是 ED 弧的圆心角, 因之 $\angle ECD = 2\alpha$, 于是

$$\begin{aligned} E \text{ 点的横坐标} &= \overline{OC} + \overline{CE} \cdot \cos(\phi + 2\alpha) \\ &= \overline{OC} + (\overline{CD} \cos \phi) \cos 2\alpha - (\overline{CD} \sin \phi) \sin 2\alpha \\ &= \overline{OC} + \overline{CA} \cos 2\alpha - \overline{AD} \sin 2\alpha \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha = \sigma_\alpha \end{aligned}$$

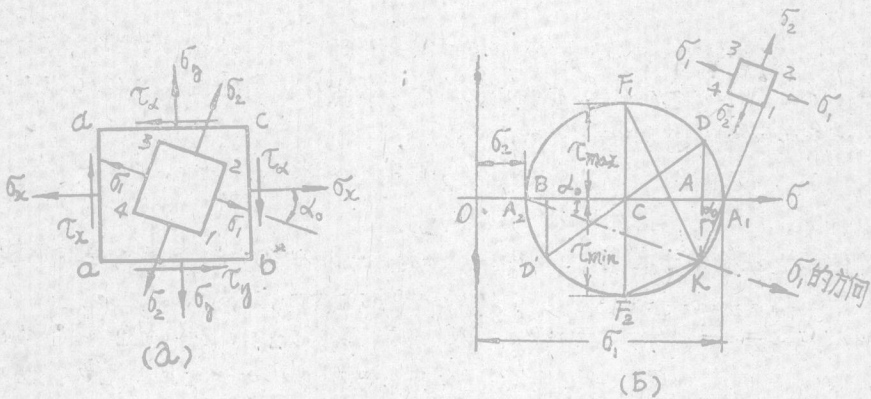
类似地证明:

$$\begin{aligned}
 E \text{ 点的纵标} &= \overline{CE} \sin(\phi + 2\alpha) \\
 &= \overline{CD} \sin\phi \cos 2\alpha + \overline{CD} \sin\phi \sin 2\alpha \\
 &= \tau_x \cos 2\alpha + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha = \tau_{\alpha}
 \end{aligned}$$

这就证明了上述图解法的正确。

在图 6.9 中, 自 D 点沿圆周转 2α 角 (与 α 角同一转向) 亦可得到 E 点。

利用上述图解法极易得到单元体的主平面方向和主应力大小。设需求图 6.10 a 所示单元体的主应力及其方向; 先画出应力图, 如图 6.



(图 6.10)

10 (b) 所示。画出的应力图和 $\sigma\sigma$ 轴相交于 A_1, A_2 两点。点 A_1 的纵坐标等于零, 而点 A_1 的横坐标最大, 所以 $CA_1 = \sigma_{\max} = \sigma_1$ 。连接 KA_1 , 过单元体 $abcd$ 作 12 面平行于 KA_1 , 那么点 A_1 代表着 12 面上的应力情况。因 12 面上只有应力 σ_1 作用而没有剪应力; 所以 12 面即是单元体 $abcd$ 的主平面之一。

同样点 A_2 的纵坐标也是零, 而点 A_2 的横坐标值最小, 即 $OA_2 = \sigma_{\min} = \sigma_2$ 。作 23 面平行于 KA_2 线即得主应力 σ_2 作用面的方向 23。分别作 12、23 平行的两对面得到单元体 1234, 在 1234 上只有主应力 σ_1 和 σ_2 作用着。

关于主应力 σ_1 和 σ_2 的大小可直接自图 6.10B 按画应力圆的比例尺量出。但是从图 6.10B 也可以直接推出公式 (6.6)、(6.7) 相同的结果。

因为应力圆的半

$$\overline{CK} = \sqrt{\overline{CA}^2 + \overline{AK}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

所以

$$\sigma_1 = \overline{OA_1} = \overline{OC} + \overline{CA_1} = \overline{OC} + \overline{CK} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

同理

$$\sigma_2 = \overline{OA_2} = \overline{OC} - \overline{CK} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

主应力 σ_1 和 σ_x 所成的角度 α_0 ，在应力园中为 $\angle A_1 A_2 K'$ ，而 $\angle A_1 C K = 2\alpha_0$ ，

所以
$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{\overline{AK}}{\overline{CA}} = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y}。$$

式中的負号是因为 $\overline{AK} = -\tau_x$ ，但从图 6.10B 亦可看出，在 $\sigma_x > \sigma_y$ 和 τ_x 均为正值时， α_0 是順时針旋轉，应为負值（前面已規定 α 角以反时針轉为正），这也說明了等式右边应带負号。

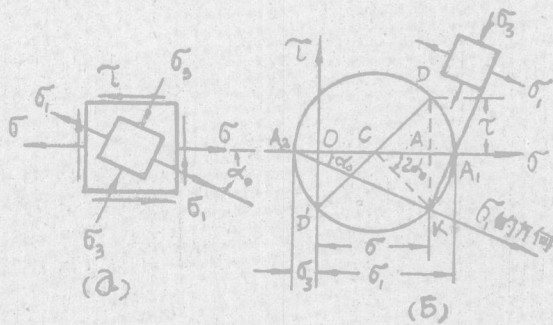
关于单元体中的最大和最小剪应力也很容易从图 6.10B 得出，自园心 C 点作垂直于 $O\sigma$ 軸的直径，和应力园相交在 F_1 、 F_2 两点，則 $CF_1 = \tau_{\max}$ ， $CF_2 = \tau_{\min}$ 。因为最大和最小剪应力的数值都等于应力园的半径，所以

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}。 \quad (6.11)$$

最大剪应力的作用面是和 KF_1 方向平行的，最小剪应力的作用面是和 KF_2 平行的，而 $\angle F_1 K F_2 = 90^\circ$ 所以最大和最小剪应力的作用面互相垂直。

又 KA_1 是和主应力 σ_1 的作用面平行， KF_1 是和最大剪应力的作用面平行，但是由图 6.10B 可知园周角 $A_1 K F_1 = 45^\circ$ ，所以剪应力的极值（最大和最小）的作用面和主平面成 45° 角。

現在来討論一下 $\sigma_y = 0$ 的特殊情形（图 6.11a）。在梁的强度校核时我們要用到这种情形，其应力园画在图 B 中。



(图 6.11)

其主应力 σ_1 、 σ_3 表明在图上，（ $\sigma_2 = 0$ ）显然其值为

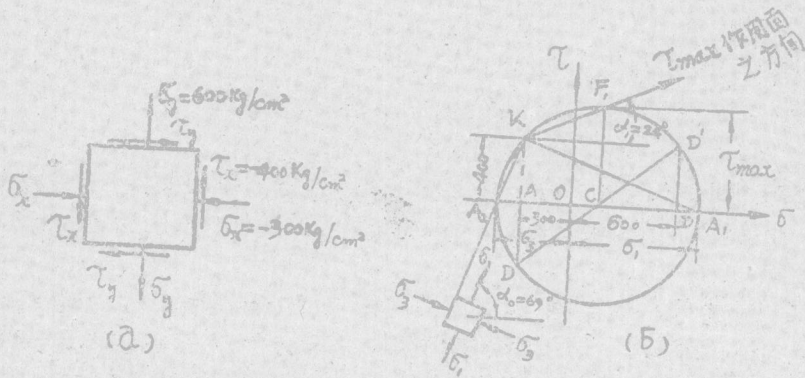
$$\sigma_{1/3} = \overline{OC} \pm \overline{CD} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \dots\dots\dots (6.7')$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{\overline{AK}}{CA} = -\frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \dots\dots\dots (6.6')$$

关于此式也很容易自 (6.7)、(6.6) 式得到。

例 [6.1] 对于图 6.12 a 所示的单元体，试用图解法，解析法求

- i) 主应力的大小及方向；
- ii) 最大剪应力大小及其作用面。



(图 6.12)

〔解〕 i) 图解法：根据已知的应力数值，选择适当的比例尺，作出应力圆。对应的应力圆画在 (b) 图上，由该图量出 $\sigma_1 = 750 \text{ Kg/CM}^2$ ， $\sigma_2 = -450 \text{ Kg/CM}^2$ 及 $\alpha_0 = 69^\circ$ (σ_1 方向与 σ_x 所成的角)。

又由图量得 $\tau_{\max} = 600 \text{ Kg/CM}^2$ ，最大剪应力的作用面和水线成 $\alpha_1 = 24^\circ$ 角。

ii) 解析法：以 $\sigma_x = -300 \text{ Kg/CM}^2$ ， $\sigma_y = 600 \text{ Kg/CM}^2$ ， $\tau_x = -400 \text{ Kg/CM}^2$ ，代入 (6.7) (6.6) 式得

$$\sigma_{1,2} = \frac{-300 + 600}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-300 - 600}{2}\right)^2 + (-400)^2} \cong \begin{matrix} 750 \\ -450 \end{matrix} \text{ Kg/CM}^2$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{-2 - (-400)}{-300 - 600} = -0.89$$

$$\alpha_0 \cong 69^\circ \text{ (或} = 90^\circ + 69^\circ \text{)}$$

此值对应于二个正交的主平面，要确定那一个是对应于最大主应力，可以观察 $\frac{d\sigma_x}{d\alpha^2}$ 之正负号，可是这样并不方便。

如用公式

$$\operatorname{tg} \alpha_{01} = -\frac{\tau_x}{\sigma_1 - \sigma_y}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{02} = -\frac{\tau_x}{\sigma_2 - \sigma_y}$$

便可直接得到对应 σ_1 的主方向 σ_{01} 及对应 σ_2 的主方向 σ_{02} ，虽然式中 σ_0 亦有多值性，但对决定主方向没有影响。在本例中

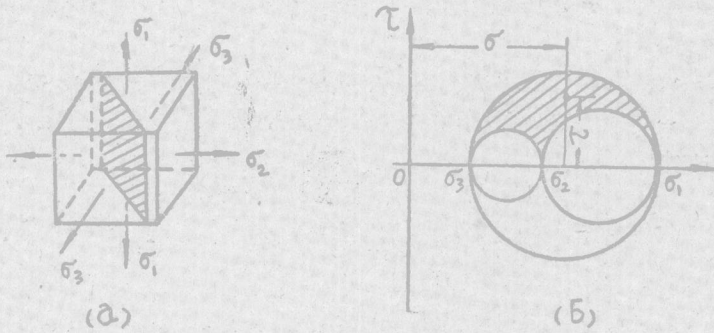
$$\operatorname{tg} \alpha_{01} = -\frac{-400}{750-690} \cong 2.66 \quad \alpha_{01} \cong 69^\circ \text{ (或 } 180^\circ + 69^\circ \text{)}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{02} = -\frac{-400}{-450-600} \cong -0.382 \quad \alpha_{02} \cong -21^\circ \text{ (或 } 159^\circ \text{)}$$

§ 6.5 三向应力状态的摩尔圆的概念

设想从物体内取出一个单元立方体，在它的六个面上作用着三个互相垂直的主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (图 6.13a)。现在提出与该立方体相交的任何面上的正应力与剪应力求法的问题。

首先我们取一个与主应力 (例如 σ_1) 相平行的这一类斜截面，这面用阴影面表示在图 6.13a 上。很容易看出，平行于所截阴影面的主应力 σ_1 不会在这截面上引起正应力或剪应力。所以在该面上的应力仅决定于 σ_2 和 σ_3 。——即得到二向受力状态，于是这些面就相当于以主应力 σ_2 和 σ_3 作成的应力圆。



(图 6.13)

同样我们也可以根据 σ_1 和 σ_3 画出应力圆 (圆上各点坐标代表平行于 σ_2 各截面上的应力) 及根据 σ_1 和 σ_2 画出应力圆 (圆上各点坐标代表平行于 σ_3 各截面上的应力)。

至于与所有三个主应力均不平行的斜截面，我们将在弹性理论的基本方程一章里证明，这些面上的应力 σ 和 τ 可以 (图 6.13b) 上的阴影面积上各点 D 的坐标来表示。

从这图上可以看出，三向应力状态之下，最大和最小的正应力相应地等于最大和最小主应力。

最大剪应力等于最大的圆的半径，所以，就等于最大主应力与最小主应力的差的一半，它作用在与此二主应力的方向成 45° 角的面上，同时，在这些面上的正应力就等于最大主应力和最小主应力之和的一半 ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$)。

因而，在材料的普遍受力状态里，当所研究的点上所有三个主应力都不等于零时，就得到：

$$\max \sigma = \sigma_1, \quad \min \sigma = \sigma_3, \quad \max \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (6.12)$$

在平行于各主应力中一个主应力並与其他二个主应力成 45° 角面上，剪应力为：公式 (6.12) 中的 τ_{\max} 及

$$\tau_{1,2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_{2,3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad (6.13)$$

§ 6.6 广义虎克定律，体积变形

在校核一个在其各面上作用着应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的单元体之强度时，有时，需要考虑关于該单元体变形的数值的问题。我們称 平行于主应力 σ_1 的稜边第一稜边，平行于主应力 σ_2 和 σ_3 的为第二和第三稜边；分別地研究每个主应力所引起的变形，然后加起来，就可以得到三个主应力同时作用下的变形。

在应力 σ_1 的作用下，单元体在第一稜边的方向得到的单位伸长等于

$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}.$$

但是对于主应力 σ_2 及 σ_3 来说，稜边 1 是一个横向的尺寸，所以在应力 σ_2 和 σ_3 的单独作用下，单元体在第一稜边的方向所受到的单位縮短等于

$$\varepsilon_1'' = -\mu \frac{\sigma_2}{E}, \quad \varepsilon_1''' = -\mu \frac{\sigma_3}{E}.$$

单元体在第一稜边的方向的总单位变形就用代数和

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''' = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E}$$

来表示。对于其余二个方向的变形也可得到的类似的表示形式，其结果为：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \mu \left(\frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_3}{E} \right) \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \mu \left(\frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_3}{E} \right) \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \mu \left(\frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_1}{E} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

上式表示在复杂应力状态下主应力与相对变形的关系，称为广义虎克定律，显然，这个定律只有在应力不超过比例极限的时候才能适用。如果主应力中某几个为压应力，則应連負号代入公式 (6.14)。算出的 ε 若为正值，表示相对伸长，負值表示相对縮短。