



面向 21 世纪 课程 教材
Textbook Series for 21st Century

高等数学

第二版 上册

侯云畅 冯有前 刘卫江 主编



高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

面向 21 世纪课程教材 Textbook Series for 21st Century

高等数学

第二版 上册

侯云畅 冯有前 刘卫江 主编

8111678281118	数学一	10018281000	数学二
8100-010-0100	数学三	10018281000	数学四
http://www.pearson.com	数学五	10018281000	数学六
http://www.pearson.com	数学七	10018281000	数学八
http://www.pearson.com	数学九	10018281000	数学十
http://www.pearson.com	数学十一	10018281000	数学十二
http://www.pearson.com	数学十三	10018281000	数学十四
http://www.pearson.com	数学十五	10018281000	数学十六
http://www.pearson.com	数学十七	10018281000	数学十八
http://www.pearson.com	数学十九	10018281000	数学二十
http://www.pearson.com	数学二十一	10018281000	数学二十二
http://www.pearson.com	数学二十三	10018281000	数学二十四
http://www.pearson.com	数学二十五	10018281000	数学二十六
http://www.pearson.com	数学二十七	10018281000	数学二十八
http://www.pearson.com	数学二十九	10018281000	数学三十
http://www.pearson.com	数学三十一	10018281000	数学三十二
http://www.pearson.com	数学三十三	10018281000	数学三十四
http://www.pearson.com	数学三十五	10018281000	数学三十六
http://www.pearson.com	数学三十七	10018281000	数学三十八
http://www.pearson.com	数学三十九	10018281000	数学四十
http://www.pearson.com	数学四十一	10018281000	数学四十二
http://www.pearson.com	数学四十三	10018281000	数学四十四
http://www.pearson.com	数学四十五	10018281000	数学四十六
http://www.pearson.com	数学四十七	10018281000	数学四十八
http://www.pearson.com	数学四十九	10018281000	数学五十
http://www.pearson.com	数学五十一	10018281000	数学五十二
http://www.pearson.com	数学五十三	10018281000	数学五十四
http://www.pearson.com	数学五十五	10018281000	数学五十六
http://www.pearson.com	数学五十七	10018281000	数学五十八
http://www.pearson.com	数学五十九	10018281000	数学六十
http://www.pearson.com	数学六十一	10018281000	数学六十二
http://www.pearson.com	数学六十三	10018281000	数学六十四
http://www.pearson.com	数学六十五	10018281000	数学六十六
http://www.pearson.com	数学六十七	10018281000	数学六十八
http://www.pearson.com	数学六十九	10018281000	数学七十
http://www.pearson.com	数学七十一	10018281000	数学七十二
http://www.pearson.com	数学七十三	10018281000	数学七十四
http://www.pearson.com	数学七十五	10018281000	数学七十六
http://www.pearson.com	数学七十七	10018281000	数学七十八
http://www.pearson.com	数学七十九	10018281000	数学八十
http://www.pearson.com	数学八十一	10018281000	数学八十二
http://www.pearson.com	数学八十三	10018281000	数学八十四
http://www.pearson.com	数学八十五	10018281000	数学八十六
http://www.pearson.com	数学八十七	10018281000	数学八十八
http://www.pearson.com	数学八十九	10018281000	数学九十
http://www.pearson.com	数学九十一	10018281000	数学九十二
http://www.pearson.com	数学九十三	10018281000	数学九十四
http://www.pearson.com	数学九十五	10018281000	数学九十六
http://www.pearson.com	数学九十七	10018281000	数学九十八
http://www.pearson.com	数学九十九	10018281000	数学一百

高等教育出版社

内容简介

本书是国家级精品课程使用教材,是在第一版教材多年教学实践的基础上修订而成的。

修订时,保持了原教材加强数学思想方法的阐述,注意运用现代数学的语言和符号,教材体系作了较大调整,使概念之间的内在联系更加清晰,注重理论联系实际等优点;还吸取了国内外高等数学课程改革和学科建设的新成果,注意了教材内容的定位,教材深度符合新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”,同时,为适应工科本科各专业根据不同教学要求实施分层次教学的需要,还增加了以*号标出的和楷体字排印的选学内容。

本书分上下两册。上册包括函数与极限、一元函数微积分学和向量代数与空间解析几何;下册包括多元函数微积分学、无穷级数和常微分方程。本书可作为普通高等院校工科本科各专业的教材,也可供社会读者自学之用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册 / 侯云畅,冯有前,刘卫江主编. —2

版. —北京:高等教育出版社,2009.6

ISBN 978-7-04-026631-3

I. 高… II. ①侯…②冯…③刘… III. 高等数学-高等学校-教材 IV. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第067923号

策划编辑	兰莹莹	责任编辑	崔梅萍	封面设计	张楠
责任绘图	黄建英	版式设计	张岚	责任校对	胡晓琪
责任印制	韩刚				

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京中科印刷有限公司

开 本 787×960 1/16
印 张 21.25
字 数 390 000

购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landracol.com>
<http://www.landracol.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 1999年10月第1版
2009年6月第2版
印 次 2009年6月第1次印刷
定 价 23.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 26631-00

再版前言

本书是在第一版的基础上,以创新教学理念为指导,坚持教学改革方向,遵照国家级精品课程教材的要求,为适应新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”,根据我们对原教材多年的教学实践,对原教材内容进行全面修订而成的。

本书保持了原教材的优点:为提高读者的数学素养和创新能力,加强了数学思想方法的阐述;注意运用现代数学的语言和符号,增加了展示现代数学内容的窗口;教材体系作了较大调整,使概念之间的内在联系更加清晰;注重理论联系实际,引进了经济、管理和军事等方面的建模实例;习题分为 A,B 两类,题型有新意;全书名词术语统一采用了国家公布的《数学名词》。

在修订时,还吸取了国内外高等数学课程改革和学科建设的新成果;注意了教材内容的定位,弱化了第一版中的关于实数理论及其应用的相关内容,简化了关于多元函数微分学一些概念和方法的叙述,教材的深度完全符合教学基本要求;同时,为了适应高校工科本科各专业根据不同教学要求实施分层次教学的需要,还增编了一些以*号标出或以楷体字排印的选学内容;对于 A,B 两类习题的梯次、难度也作了较大的调整,增加了一些有利于创新能力培养的应用题、综合题。

本书另有与之配套且具一定特色的教学辅导书《高等数学学习与考研指导》,该书由侯云畅主编,国防工业出版社出版。

参加第二版修订的有侯云畅、冯有前、刘卫江。寇光兴绘制了插图。在修订中得到了领导、教研室同仁和高等教育出版社李艳馥老师的大力支持,在此谨向他们表示衷心的感谢。由于编者水平所限,新版中的不足之处,请专家、同仁不吝指正。

编 者

2009 年 1 月

第一版序

当今，世界科技迅猛发展，数学已渗透到各个领域，数学的重要地位越来越为人们所重视，但是经典的《高等数学》教材与现代科学技术中数学的广泛应用，其间的差距越发加大，因此，《高等数学》教材的改革势在必行。

为了培养新时期需要的军事合格人才，深化军队院校的教学改革，总参军训部组织空军工程学院、信息工程学院、电子工程学院、国防科技大学、海军航空工程学院五所院校中热心教学改革、熟悉教学规律、教学经验丰富、勇于创新的教师，在研究了国内外教学改革的新形势，对高等数学课程的内容进行了全面的分析与研究的基础上，决心除旧布新，锐意改革，以空军工程学院所编、已试用过两届的《高等数学》教材为基础，同心协力，共同编成此书。

阅后，感到该书有以下几个主要特点：

(1) 内容。为了加强读者的数学能力和数学素养，编者在除旧布新思想的指导下，删除或削弱了一些陈旧的和与中学重复的内容，从简处理了一些公式的推导，减少了某些定理的证明，放低了对解题特殊技巧训练的要求，从而较多地压缩了这些内容所占的篇幅，为更新内容创造了必要的条件。全书不仅能满足原国家教委颁布的工科本科《高等数学课程教学基本要求》，而且较大程度地高于“基本要求”。

在内容更新的同时，还注意渗透现代数学的概念、语言与方法，为现代数学提供了展示其内容的“窗口”，也铺展了向现代数学延伸和发展的“接口”。宽编窄用，在增加的内容中，有的打有*号，供不同的专业选用。为了培养读者的应用能力，该教材特别重视理论联系实际。一些重要的基本概念都能从实际问题中概括抽象提出，例题中应用题较多，涉及的面也较广，除传统的几何、物理等方面的应用外，尚有在目前十分活跃的经济学、生命科学方面的应用以及军事科学方面的应用，这些应用渗透在全书的各个部分，且有的问题饶有兴趣，可提高读者学习数学的积极性，通过这些应用，对数学建模能力的培养将大有裨益，自不待言。

(2) 体系。全书在吸取传统教材优点的基础上，对体系进行了改革，虽然从章的名称与编排的前后次序来看，与现有的高等数学教材相比并无太大的变化，但从各章内容的布局看，结合内容与讲法的更新，体系上仍有很大的变化。例如第一章，由于引入了集合、映射等现代数学语言、逻辑符号和实数系等，从而带

动了体系的变化。对数列极限作了比较详细的阐述,加强了极限论的内容,叙述语言的更新,使之与现代数学科学文献的语言适当接近。又如一元函数积分学,先讲定积分,再讲不定积分与积分法,最后讲积分应用,且合为一章,安排得比较紧凑,与现行的教材不同。多元函数微分学部分,从引入 n 维欧氏空间开始,一切概念都推广到多维空间中,多元函数积分学分为数值函数积分和向量值函数积分两章讲授,从而使第一型线、面积分与第二型线、面积分的实质更加突出,是一种新的尝试,全书的体系与传统教材相比有一定的新意。

(3) 习题。书中所配习题分为A、B两类。A类为使读者搞清概念、熟练掌握课文内容的习题;B类则为拓宽课文内容,并有一定难度且富有新意的习题,其中包括一些定理与性质的证明、应用题、研究生入学试题以及数学建模方面的习题。这些习题,读者通过思考或在教师指导下可以完成其中的一部分。这既对培养读者自学能力、独立思考能力、建模能力与解题能力有一定的好处,而且可以获得不少实际知识。

综观该教材,对面向21世纪所需的教学内容有一定的反映,课程体系的结构有所创新,为培养新世纪人才的数学素养有一定的突破,迈出了教材改革可喜的一步,形成了一家之言。

高等数学是一门经典基础理论课,它的改革难度较大,不是能一蹴而就的。在这门课程的改革面前,受习惯势力的影响,能知难而进者,屈指可数。侯云畅、盛立刚、杨士杰、符绩杭、翟景春等同志,不畏困难,以其丰富的教学经验,对国内外教材进行了悉心研究,分析了培养跨世纪人才需要的数学知识,编成了这本改革教材。他们敢于创新、勇于攻坚的精神是难能可贵的,也是值得称颂的。

目前迈出较大步伐的高等数学改革教材并不多见,此书的出版,表明军事院校的教学改革与教材建设已走在全国的前列。可以预期,该书不仅能提高全军的教学质量,而且对掀起教材改革的浪潮可增添一份力量,对全国《高等数学》的教材建设也将起积极的促进作用。

草此数行,言不尽意,权以为序。

1996年5月于西安交通大学面衣

陆庆乐

第一版前言

本书是面向 21 世纪课程教材,也是普通高等教育“九五”国家级重点教材,是在原军队院校工科本科《高等数学》通用教材试用多年的基础上修订而成的。本书旨在为适应科学技术的高速发展和数学地位的巨大变化,提高读者的数学素养和创新能力,为科教兴国,为我军打赢高技术条件下局部战争培养新世纪合格人才。

本书内容符合原国家教委颁布的工科本科《高等数学课程教学基本要求》。与传统教材相比,编写时着力于数学思想方法的阐述;注意运用现代数学的语言和符号,增设展示现代数学内容的“窗口”和延伸发展的“接口”;体系结构作了较大的调整,使概念之间的内在联系更加紧密;教材介绍了实数的完备性,对极限论有所加强;运用向量和矩阵工具讲解多元函数微积分学;注重联系实际,加强数学建模能力的训练,引进了经济、管理、人口、军事等方面的建模实例;习题分 A、B 两类梯次编排,题型有新意,配有拓宽正文内容的习题及具有启发性的研究生入学试题;教材编入了较深入的“*”号内容,可供不同专业选用;全书科学名词术语采用全国自然科学名词审定委员会 1993 年公布的《数学名词》。除“*”号内容外,全书可用 180 学时(含习题课)讲完;各章参考学时为一、22,二、14,三、14,四、22,五、14,六、22,七、18,八、16,九、16,十、22。

原军队院校工科本科《高等数学》通用教材主编为侯云畅,副主编为盛立刚。参加编写的有电子工程学院盛立刚,信息工程学院杨士杰、韩中庚,海军航空工程学院翟景春、张作钦,空军工程学院侯云畅、王乃鹏,国防科技大学符绩枬、罗建书。全书由侯云畅、盛立刚统编定稿,由全国高等学校工科数学课程教学指导委员会前主任、西安交通大学陆庆乐教授主审。

这次参加“九五”国家级重点教材《高等数学》修订工作的有侯云畅、王乃鹏、盛立刚、杨士杰、韩中庚、符绩枬、翟景春。由侯云畅修订定稿。根据国家对重点教材出版要求,教材修订后,又由全国高等学校工科数学课程教学指导委员会主任、西安交通大学马知恩教授和课委会委员、西安交通大学王绵森教授主审,参审的有张肇炽、王道钰、邹国源、陈占平和刘卫江等教授,他们给本书提出了许多宝贵的意见,对提高本书的质量起了重要作用;在编写过程中得到总参军训部、参编院校领导特别是空军工程学院各级领导和刘桂茂副院长的关心和支

持，在此谨向他们致以衷心的感谢。

工科数学课程教学内容改革是个新的课题，由于编者水平有限，本书定有许多不足甚至错误之处，渴望军内外专家、同仁批评指正。

言简则一策

编者

1999年1月于西安

本书是根据《工科数学课程教学内容改革》一书编写而成的。本书编写过程中，得到了许多同志的支持和帮助，特别是西安电子科技大学的同志，他们为本书的编写提供了许多宝贵的意见和建议。本书在编写过程中，参考了国内外许多有关文献，特别是《工科数学课程教学内容改革》一书，该书为本书的编写提供了重要的参考。本书在编写过程中，力求做到概念清晰、重点突出、由浅入深、循序渐进。本书可作为工科院校数学课程的教学参考书，也可供从事工科数学教学工作的同志参考。

本书共分五章。第一章为绪论，主要介绍本书的编写目的、原则、特点及适用范围。第二章为预备知识，主要介绍集合、函数、极限、微分、积分等基本概念和性质。第三章为多元函数微分学，主要介绍多元函数的微分、偏导数、全微分、极值等。第四章为多元函数积分学，主要介绍多元函数的二重积分、三重积分、曲线积分、曲面积分等。第五章为无穷级数，主要介绍数项级数、幂级数、傅里叶级数等。本书在编写过程中，力求做到概念清晰、重点突出、由浅入深、循序渐进。本书可作为工科院校数学课程的教学参考书，也可供从事工科数学教学工作的同志参考。

本书在编写过程中，得到了许多同志的支持和帮助，特别是西安电子科技大学的同志，他们为本书的编写提供了许多宝贵的意见和建议。本书在编写过程中，参考了国内外许多有关文献，特别是《工科数学课程教学内容改革》一书，该书为本书的编写提供了重要的参考。本书在编写过程中，力求做到概念清晰、重点突出、由浅入深、循序渐进。本书可作为工科院校数学课程的教学参考书，也可供从事工科数学教学工作的同志参考。

郑 重 声 明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

反盗版举报传真：(010) 82086060

E-mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100120

购书请拨打电话：(010) 58581118

目 录

第一章 函数 极限 连续函数	1
第一节 集合及其运算	1
习题 1-1	4
第二节 映射与函数	5
2-1 映射	5
2-2 函数	7
2-3 函数的几种特性	9
2-4 复合函数和反函数	10
2-5 初等函数	12
习题 1-2	14
第三节 极限	16
3-1 数列的极限	16
习题 1-3 (1)	23
3-2 函数的极限	24
习题 1-3 (2)	30
3-3 两个重要极限	32
习题 1-3 (3)	34
3-4 无穷小量和无穷大量	35
习题 1-3 (4)	40
第四节 连续函数	40
4-1 函数的连续性和间断点	40
4-2 连续函数的运算和初等函数的连续性	43
4-3 闭区间上连续函数的性质	46
*4-4 函数的一致连续性	49
习题 1-4	50
第二章 导数与微分	53
第一节 导数与微分的概念	53
1-1 导数的概念	53

1-2 函数的微分	60
习题 2-1	63
第二节 微分法则	65
2-1 函数的和、差、积、商的微分法则	65
2-2 反函数的微分法则	67
2-3 复合函数的微分法则	67
习题 2-2	73
第三节 高阶导数	76
习题 2-3	80
第四节 隐函数和由参数方程确定的函数的微分法	81
4-1 隐函数的微分法	81
4-2 由参数方程确定的函数的微分法	84
4-3 由极坐标方程表示的函数的微分法	85
习题 2-4	87
第五节 相关变化率	88
习题 2-5	90
第三章 微分中值定理及函数性态的研究	92
第一节 微分中值定理	92
1-1 费马引理和罗尔定理	92
1-2 拉格朗日中值定理	94
1-3 柯西中值定理	96
1-4 泰勒中值定理	98
习题 3-1	103
第二节 洛必达法则	106
习题 3-2	109
第三节 函数性态的研究	111
3-1 函数的单调性	111
习题 3-3 (1)	113
3-2 函数的极值和最值	114
习题 3-3 (2)	119
3-3 曲线的凹凸性及拐点	121
习题 3-3 (3)	124
3-4 函数图形的描绘	125
习题 3-3 (4)	129

第四节 弧微分 曲率	129
习题 3-4	137
第四章 一元函数积分学及其应用	139
第一节 定积分的概念与性质	139
1-1 定积分的概念	139
习题 4-1 (1)	143
1-2 定积分的性质	144
习题 4-1 (2)	147
第二节 微积分基本定理	148
2-1 积分和微分的关系	148
2-2 牛顿-莱布尼茨公式	151
习题 4-2	152
第三节 不定积分	154
3-1 不定积分的概念	154
3-2 不定积分的线性性质	156
习题 4-3	159
第四节 基本积分法	160
4-1 第一换元法	161
习题 4-4 (1)	166
4-2 第二换元法	168
习题 4-4 (2)	173
4-3 分部积分法	177
习题 4-4 (3)	182
第五节 有理函数和三角函数的有理式的积分	184
5-1 有理函数的积分	184
5-2 三角函数的有理式的积分	188
习题 4-5	189
第六节 定积分的应用	190
6-1 微元法	190
6-2 几何应用	191
6-3 物理应用	199
习题 4-6	209
第七节 反常积分	212
7-1 无穷区间的反常积分	212

7-2 无界函数的反常积分	214
*7-3 反常积分的审敛法 Γ 函数	217
习题 4-7	220
第五章 向量代数与空间解析几何	222
第一节 向量及其运算	222
1-1 向量的概念	222
1-2 向量的线性运算	223
1-3 向量在轴上的投影	226
1-4 内积 向量积 混合积	227
习题 5-1	232
第二节 向量的坐标和向量运算的坐标表示	233
2-1 向量的坐标	233
2-2 向量运算的坐标表示	237
习题 5-2	240
第三节 平面和空间直线	242
3-1 平面的方程	242
3-2 空间直线的方程	245
3-3 空间中点到平面和点到直线的距离	247
3-4 空间中平面和平面、直线和直线、平面和直线的位置关系	249
习题 5-3	253
第四节 曲面及其方程	255
4-1 曲面方程的概念	255
4-2 柱面 旋转面	256
4-3 二次曲面	258
*4-4 曲面的参数方程	263
习题 5-4	265
第五节 空间曲线	267
5-1 空间曲线的方程	267
5-2 空间曲线在坐标面上的投影	270
习题 5-5	271

附录 1 行列式简介	273
-------------------------	------------

附录 2 简明积分表	275
附录 3 常用曲线	286
习题答案	292

第一章

函数 极限 连续函数

高等数学的主体是微积分学，它是一门研究变量的数学。它的内容和方法在自然科学、工程技术乃至社会科学的许多领域中都有着广泛的应用。函数是变量之间相互关系的数学描述，是微积分学研究的主要对象；极限理论是微积分学的理论基础；连续函数是微积分学所讨论的主要函数类型。本章主要介绍函数、极限和连续函数这些微积分学的基础内容。

第一节 集合及其运算

一、集合的概念

集合是一个只能描述而难以精确定义的概念，我们只给出集合的一种描述：集合是指所考察的具有确定性质的对象的总体。集合简称集，组成集合的每一个对象称为该集合的元素，简称元。

例如，我军战士的全体构成一个集合；我军女干部的全体构成一个集合；某校一年级男大学生的全体构成一个集合。又如，不超过自然数 N 的非负整数构成一个集合；平面上的所有直角三角形构成一个集合。

通常用大写字母 $A, B, X, Y, \dots$ 记集合，用小写字母 $a, b, x, y, \dots$ 记集合的元素。若 x 是集合 A 的元素，则说 x 属于 A ，记为 $x \in A$ ；若 x 不是集合 A 的元素，则说 x 不属于 A ，记为 $x \notin A$ 或 $x \bar{\in} A$ 。

由有限个元素组成的集合称为有限集，由无限个元素组成的集合称为无限集。一个无限集，如果其元素可用自然数编号，就称之为可数无限集，简称可数集或可列集。如前面例中，平面上的所有直角三角形构成的集合是无限集，其余各例皆为有限集。

不含有任何元素的集合称为空集，记为 $\emptyset$ 。空集在研究集合运算和集合之间的关系时，有其逻辑上的意义。如，由方程 $x^2 + 1 = 0$ 的实根构成的集合，即为空集。

集合一般有两种表示方法。

一是列举法。把它的所有元素一一列举在一个花括号内。例如，集合 A 由元素 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 组成，表示为 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ；自然数集 $\mathbf{N}$ 表示为 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ 。这种表示方法一般适用于有限集和可数无限集。

二是描述法. 指明集合中元素所具有的性质. 一般形式为

$$A = \{x | x \text{ 具有性质 } p\}.$$

例如, 方程 $x^3 + x - 1 = 0$ 的解集记为

$$S = \{x | x^3 + x - 1 = 0\}.$$

又如, 平面上以原点为中心的单位圆内的点的全体组成的集合, 记为

$$A = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}.$$

以数为元素的集合称为数集. 通常用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集, $\mathbf{Z}$ 表示整数集, $\mathbf{Q}$ 表示有理数集, $\mathbf{R}$ 表示实数集, $\mathbf{C}$ 表示复数集. 用下标加“+”表示集内排除 0 与负数的集. 如 $\mathbf{N}_+$ 表示正整数集.

只有一个元素的集合, 称为单元素集, 记为 $\{x\}$.

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素, 则称 A 是 B 的子集, 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 读成 A 含于 B 或 B 包含 A . 显然有 $A \subset A$. 若 A 是 B 的子集, 而 B 中至少有一个元素不属于 A , 则称 A 是 B 的真子集, 记为 $A \subsetneq B$, 例如 $\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \subsetneq \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \subsetneq \mathbf{R}$.

空集 $\emptyset$ 是任何集合的子集.

若 $A \subset B$, 且 $B \subset A$, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A = B$.

二、区间、邻域

区间和一点的邻域是常用的一类实数集.

实数集 $\{x | a < x < b\} = (a, b)$ 称为开区间; $\{x | a \leq x \leq b\} = [a, b]$ 称为闭区间; $\{x | a \leq x < b\} = [a, b)$, $\{x | a < x \leq b\} = (a, b]$ 称为半开半闭区间. a, b 称为区间的端点, 这些区间统称为有限区间. $\{x | a \leq x\} = [a, +\infty)$, $\{x | x \leq b\} = (-\infty, b]$, $\{x | -\infty < x < +\infty\} = (-\infty, +\infty)$, 都为无限区间.

实数集 $\{x | |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$, 称为点 x_0 的 δ 邻域, 记为 $U_\delta(x_0)$. 它在数轴上表示以 x_0 为中心, 长度为 2δ 的对称开区间, 如图 1-1 所示.

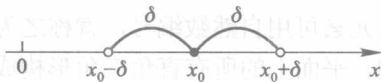


图 1-1

实数集 $\{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$, 称为 x_0 的 δ 去心邻域, 记为 $U_\delta^0(x_0)$.

实数集 $U_\delta^+(x_0) = \{x | 0 \leq x - x_0 < \delta\}$ 和 $U_\delta^-(x_0) = \{x | 0 \leq x_0 - x < \delta\}$, 分别称为 x_0 的右邻域和左邻域. $U_\delta^{0+}(x_0) = \{x | 0 < x - x_0 < \delta\}$ 和 $U_\delta^{0-}(x_0) = \{x | 0 < x_0 - x < \delta\}$, 分别称为 x_0 的去心右邻域和去心左邻域.

$U_M(\infty) = \{x | |x| > M\}$, $U_M(+\infty) = \{x | x > M\}$ 和 $U_M(-\infty) = \{x | x < -M\} (M > 0)$,

分别称为无穷邻域, 无穷右邻域和无穷左邻域.

三、集合的运算

集合有三种基本运算, 即并、交、差.

设 A, B 都是集 S 的真子集, 则集合

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\};$$

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\};$$

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$$

分别称为 A 和 B 的并集、交集、差集.

当 $A \subset S$ 时, $S \setminus A$ 称为 A 在 S 中的余集或补集, 记为 $\complement A$, 即

$$\complement A = \{x | x \in S, x \notin A, A \subset S\}.$$

集合 S 称为母集 (或全集、基本集). 我们总是在母集中讨论问题.

集合的运算, 可用文氏图 (图 1-2) 形象表示.

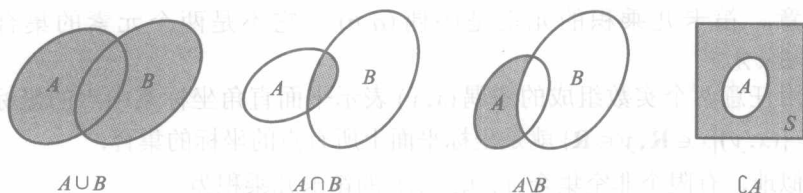


图 1-2

集合的这些运算具有以下性质:

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$

(2) 结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

(3) 分配律 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

(4) 幂等律 $A \cup A = A, A \cap A = A.$

(5) 吸收律 $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A.$

(6) 德摩根 (De Morgan) 律 (或称对偶原理)

$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B, \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B. (A \subset S, B \subset S.)$$

性质 (1) — (5) 是显然的. 现仅证性质 (6).

证 由 $x \in \complement(A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ 且 } x \notin B \Leftrightarrow x \in \complement A \cap \complement B$. 于是, 有 $\complement(A \cup B) \subset \complement A \cap \complement B, \complement A \cap \complement B \subset \complement(A \cup B)$; 故有 $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$. 同理可证 $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$.

注 符号 “ $\Rightarrow$ ” 表示 “蕴含”, “ $\Leftrightarrow$ ” 表示 “等价的”.