国家示范性高等职业院校教材

(机械类)

高等数学(上)

Advanced Mathematics

主 编 何力争 副主编 李喜罕

西北工业大学出版社

(机械类)

高等数学(上)

Advanced Mathematics

□策划编辑 / 蒋民昌
杨　军
□责任编辑 / 季苏平
蒋民昌
杨　军
□封面设计 / 高　博

ISBN 678-7-5612-2638-4

9 787561 226384 >

定价:50.00元(本册25.00元)

国家示范性高等职业院校教材

高等数学

（机械类）

上 册

主 编 何力争

副主编 李喜军

主 审 蒋大为

副主审 李志林

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，结合国家示范性高等职业院校教学实际情况，全面、系统地介绍了高职高专院校机械类各专业所需的高等数学基础知识.

全书分为下、下两册.上册：函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用；下册：空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，级数，微分方程等.

本书既可作为高职高专机械类各专业高等数学课程的教材，也可供工程技术人员和数学爱好者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：机械类/何力争主编.—西安：西北工业大学出版社，2009.8
ISBN 978-7-5612-2638-4

Ⅰ.高… Ⅱ.何… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 153660 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号 邮编：710072
电　　话：(029)88493844 88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西向阳印务有限公司
开　　本：727 mm×960 mm 1/16
印　　张：29.25
字　　数：490 千字
版　　次：2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：50.00 元(本册：25.00 元)

前　　言

本书是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，并结合西安航空职业技术学院《航空机械类专业高等数学课程标准》的内容要求编写的.

本书编写中充分体现了“任务引领，实践导向课程”的教学思想，力求改变单纯“理论知识传授为主要特征的传统学科课程模式”；以“实际问题”分析出发，设定数学能力培养目标，让学生在解决“实际问题”的过程中来构建相关理论知识；结合高职高专教育的特点，适度淡化深奥的数学理论，强化几何说明；根据机械类专业所需的高等数学知识为主线，培养学生用数学思想、概念、方法消化吸收机械工程概念及原理的能力；把机械工程中的实际问题转化为数学模型的能力，求解数学模型的能力.

在本书编写过程中，我们还注意了以下几个方面：

(1)在内容的编排上，注意与新编全国统编中学数学教材知识点的衔接，力求做到详略合理、增删有据.

(2)在内容的选取上，要充分体现高职、高专基础课教学“以应用为目的，以必须为度”的原则，既考虑人才培养的实用性，又使学生具有一定可持续发展性.

(3)在内容的表述上，重视数学概念的本质表述，有关定理、结论、方法的叙述力求通俗易懂，并结合几何图形，使学生易于接受，避免烦琐推证.

本书由西安航空职业技术学院基础部李金楼主任策划；由数学教研室谢欣歆主任安排实施；由数学教研室何力争担任主编，负责统筹全书编写、大纲及框架结构，编写第 1～8 章；李喜罕担任副主编，编写第 9～10 章；由西北工业大学应用数学系蒋大为教授担任主审；由西安航空职业技术学院数学教研室李志林担任副主审.

由于编者水平所限，书中不足之处难免，敬请读者批评指正，以便修订时改进.

编　者

2009 年 7 月

目　　录

第1章　函数、极限与连续

函数是高等数学的主要研究对象，它从数量方面反映了一切客观事物之间的相互联系、相互影响.极限理论是微积分的理论基础，极限思想是微积分思想方法的核心，它构成了微分学和积分学的基础.连续函数是高等数学主要讨论的函数类型.本章将介绍函数、极限和函数连续性等基本概念，以及它们的一些性质.

一、学习目标

通过本章学习，读者应达到以下学习目标：

(1) 理解函数、极限、函数连续性的概念.

(2) 掌握极限的运算.

(3) 能用极限来研究函数的性态(连续性).

二、学习要点

在学习本章内容时，读者应把握以下几点：

1. 概念的理解

函数是通过某一事实的信息去推知另一事实，函数的极限是在某一变化过程中，通过某一事实的信息推知另一事实的变化趋势.

函数在某点的极限与函数在该点的定义无关，与函数在该点的空心邻域内函数的定义有关.

2. 求极限

求极限是高等数学课程的基本运算之一，读者要熟练掌握其方法.这种运算包含的类型多，方法技巧性强，读者应多做一些练习，从中体会和总结.常用方法：

(1) 若 $x \neq x_0$ 时有 $f(x) = g(x)$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

(2) 四则运算法则，两个重要极限，等价无穷小替换等.

1.1 函　　数

一、函数的概念

1. 变量

人们在观察某一现象的过程时，常会遇到各种不同的量，把在某个过程中变化的量称为变量，保持不变状态的量称为常量. 例如，飞机在飞行过程中，飞行高度在不断变化，是变量，而机翼长度是保持不变的，因而是常量.

变量的每一个值都是一个数，所有这些数构成的数集，称为这个变量的变化域. 在许多情形，变量的变化域都是一个区间，而变量在某点的附近的变化域，即以某点为中心的微小区间称为该点的邻域.

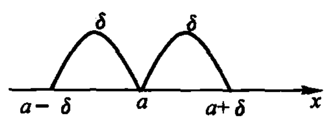

图　1.1

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta > 0$，数集 $\{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域，记为 $U(a,\delta)$. 其中点 a 叫做邻域中心，δ 叫做邻域的半径，如图 1.1 所示.

特别地，称数集 $\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 为 a 的空心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$.

2. 函数的定义

在客观世界中，各种事物的变化都是互相联系、互相制约的，反映在它们的量的关系上，就是变量与变量的某种依赖关系，即函数关系. 我们先介绍一个实例.

实例　在机械工程上为将转动转化为往复直线移动，常采用曲柄连杆机构(见图 1.2). 设主动轮半径 $\overline{AO}=r$，连杆 $\overline{AB}=l$，若主动轮以等角速度 ω 逆时针旋转，求滑块 B 的运动规律.

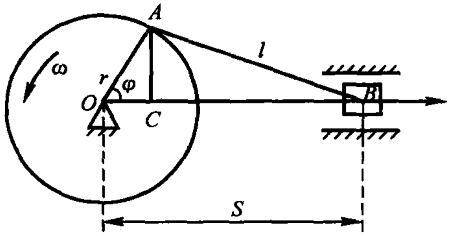

图　1.2

解　设在运动开始后经过t秒时，滑块B离O点的距离为S，求滑块B的运动规律就是建立变量S和变量t的函数关系式.

假设主动轮开始旋转时A点正好在OB连线上，经过时间t后主动轮转了角φ，那么

$$\varphi=\omega t$$

$$\overline{OC}=r\cos\varphi=r\cos\omega t$$

$$\overline{CA}=r\sin\varphi=r\sin\omega t$$

$$\overline{CB}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{CA}^2}=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}$$

从而

$$S=\overline{OC}+\overline{CB}=r\cos\omega t+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t},\quad t\in(0,+\infty)$$

这就是滑块B的运动规律. 数学上称变量S是关于变量t的函数，下面给出函数定义.

定义 1　设有两个变量x和y，变量x的变化域为D，如果对于D中每一个值x，按照某种确定的对应关系，变量y总有确定的数值和它对应，就称变量y是变量x的函数，记做

$$y=f(x),\quad x\in D$$

其中，x称为自变量，y称为因变量. 自变量x的变化域D称为函数的定义域，因变量y的变化域$\{f(x)\mid x\in D\}$称为函数的值域.

由于函数的定义域和对应法则被确定后，其值域就随之而定，因此定义域和对应法则就成了函数的两个要素. 如果两个函数的定义域和对应法则都相同，则称这两个函数相同，否则就不是同一函数. 例如，$y=x^3$与$y=t^3$是相同的函数，而$y=x$和$y=\sqrt{x^2}$是不同的函数.

若自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值仅有一个，则称此函数为单值函数，否则为多值函数. 今后，若无特别说明，函数均指单值函数.

二、初等函数

1. 基本初等函数

中学数学课程所学习过的函数：

常函数　　$y=C$　（C为常数）

幂函数　　$y=x^{\alpha}$　（α为常数）

指数函数　　$y=a^x$　（$a>0,a\neq1,a$为常数）

对数函数　　$y=\log_a x$　（$a>0,a\neq1,a$为常数）

三角函数　$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$

反三角函数　$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\text{arccot}\, x$

以上函数统称为基本初等函数.

2. 复合函数

定义 2　如果 y 是 u 的函数，$y=f(u)$，u 又是 x 的函数，$u=\varphi(x)$，就称 y 是 x 的复合函数，记做

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中，u 称为中间变量.

值得注意的是，不是任意两个函数都能构成一个复合函数，必须要求 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集是一个非空集合. 如 $y=\sqrt{u-2}$ 和 $u=\sin x$ 在实数范围内就不能进行复合.

利用复合函数的概念，可以把一个较复杂的函数分解成若干个简单函数（简单函数：指基本初等函数及基本初等函数四则运算后所成的函数）. 下面举例分析复合函数的复合过程，正确熟练地掌握这个方法，将会给以后的学习带来很多方便.

例 1　写出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=\arcsin(\ln x)$

(2) $y=\sin^2\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(3) $y=\ln(\tan e^{x^2+2\sin x})$

解　(1) 外层是反正弦函数，即 $y=\arcsin u$，内层是对数函数，即 $u=\ln x$，所以分解得

$$y=\arcsin u, \quad u=\ln x$$

(2) 最外层是幂函数，即 $y=u^2$；次外层是正弦函数，即 $u=\sin v$；从外向里第三层又是幂函数，即 $v=\omega^{-\frac{1}{2}}$；最里层是多项式函数，即 $\omega=x^2+1$. 因此，分解得

$$y=u^2, \quad u=\sin v, \quad v=\omega^{-\frac{1}{2}}, \quad \omega=x^2+1$$

(3) 最外层是对数函数，即 $y=\ln u$；次外层是正切函数，即 $u=\tan v$；从外向里第三层是指数函数，即 $v=e^{\omega}$；最里层是简单函数，即 $\omega=x^2+2\sin x$. 因此，分解得

$$y=\ln u, \quad u=\tan v, \quad v=e^{\omega}, \quad \omega=x^2+2\sin x$$

注解　复合函数的复合过程是由里到外，函数“套”函数而成；分解复合

函数时，是采取由外到内层层分解的办法.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限复合步骤得到的用一个解析式子表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=\mathrm{e}^{2x}\cos(5x+1)$，$y=\dfrac{3\arcsin\sqrt{1-x}}{x^2+1}$，均是初等函数.

三、分段函数

在自变量的不同取值范围内，有不同解析式表示的函数，称为分段函数.

例 2　某运输公司规定货物的每吨千米运价为：在 a 千米以内，每吨千米 k 元，超过部分为每吨千米 $\dfrac{3}{5}k$ 元，试建立运价 y 关于里程 x 之间的函数关系式.

解　当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时，

$$y=kx$$

当 $x>a$ 时，

$$y=ka+\frac{3}{5}k(x-a)$$

则

$$y=\begin{cases}kx, & 0<x\leqslant a\\ ka+\dfrac{3}{5}k(x-a), & a<x\end{cases}$$

例 3　设

$$f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0\\ 2, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x<3\end{cases}$$

求：(1) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$；(2) $f\left[f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]$；(3) 作出 $f(x)$ 的图形.

解　(1) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$

$$f\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]=f(2)=2-1=1$$

(3) $f(x)$ 的图形如图 1.3 所示.

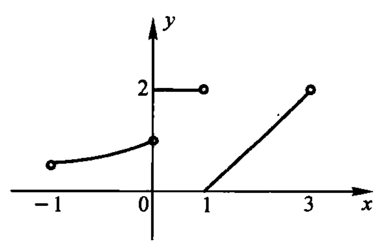

图　1.3

例 4 设函数

$$f(x)=\begin{cases}2+x, & x\leqslant 0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$$

写出 $\Delta y=f(\Delta x)-f(0)$ 的表达式.

解 当 $\Delta x\leqslant 0$ 时,

$$\Delta y=f(\Delta x)-f(0)=2+\Delta x-2=\Delta x$$

当 $\Delta x>0$ 时,

$$\Delta y=f(\Delta x)-f(0)=\sin\Delta x-2$$

故

$$\Delta y=\begin{cases}\Delta x, & \Delta x\leqslant 0\\ \sin\Delta x-2, & \Delta x>0\end{cases}$$

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-x^2}}$ (2) $y=\dfrac{1}{e^x-1}$

2. 求下列函数的值.

(1) 设 $f(x)=e^{\sin x^2}$，求 $f(0)$，$f\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$，$f(f(0))$；

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x-4, & x>0\end{cases}$，求 $f(0)$，$f(-1)$，$f(2)$，$f(f(e+2))$.

3. 设 $f(x)=1-x^2$，$\varphi(x)=\cos x$，求 $f(\varphi(x))$ 和 $\varphi(f(x))$.

4. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\arctan x^2$ (2) $y=e^{\cos^2 x}$

(3) $y=\sin^2(1+2x)$ (4) $y=[\arcsin(1-x^2)]^3$

5. 设函数 $f(x)=|x|+1$，写出 $\Delta y=f(\Delta x)-f(0)$ 的表达式($\Delta x\neq 0$).

6. 在半径为 R 的球内作内接圆柱体，试将圆柱体表示为高的函数，并求此函数的定义域.

1.2 极 限

函数给出了变量之间的对应关系，但研究变量变化仅靠对应关系是不够的，还需要通过变量的变化趋势来研究.

一、极限的概念

函数的自变量有几种不同的变化趋势：

(1)x 的绝对值 $|x|$ 无限增大，即 $x\to\infty$. 其中既有 x 小于零且 $|x|$ 无限增大，即 $x\to-\infty$，又有 x 大于零且 $|x|$ 无限增大，即 $x\to+\infty$.

(2)x 无限接近 x_0，即 $x\to x_0$. 其中分 x 从 x_0 的左侧(小于 x_0) 无限接近 x_0，即 $x\to x_0^-$，以及 x 从 x_0 的右侧(大于 x_0) 无限接近 x_0，即 $x\to x_0^+$.

下面分别讨论这两类变化过程函数的极限.

1. 自变量趋于无穷大时函数的极限

实例 1 (1) 讨论当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势；

(2) 讨论当 $x\to-\infty$ 时和 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)=\arctan x$ 的变化趋势.

由图 1.4 直观来看，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 与零无限接近；而从图 1.5 观察到，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)=\arctan x$ 与 $-\dfrac{\pi}{2}$ 无限接近；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=\arctan x$ 与$\dfrac{\pi}{2}$无限接近. 但是，当 $x\to\infty$ 时，$\arctan x$ 不能与确定的常数无限接近.

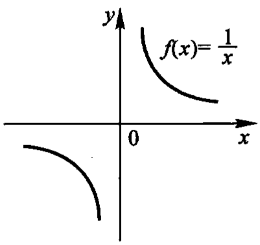

图 1.4

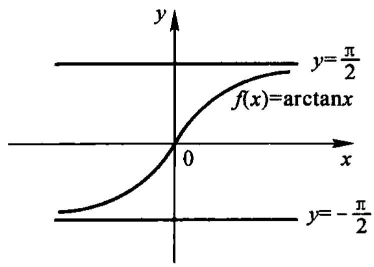

图 1.5

因此就说，当 $x\to\infty$ 时，函数$\dfrac{1}{x}$的极限为 0；当 $x\to-\infty$ 时，函数 $\arctan x$ 的极限为 $-\dfrac{\pi}{2}$；当 $x\to+\infty$ 时，函数 $\arctan x$ 的极限为$\dfrac{\pi}{2}$；但当 $x\to\infty$ 时，函数 $\arctan x$ 极限不存在. 下面给出定义.

定义 1 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，如果在 $x\to\infty$ 的

过程中，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的数值 A，那么 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限. 记做

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A$$

或

$$f(x)\to A\quad(x\to\infty)$$

当 $x\to-\infty$ 与 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 的极限分别记做

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$$

因此，由定义 1 和实例 1 的讨论可得下列结论：

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$；$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$；$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$；$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

定理 1 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$$

注解 数列是定义在正整数集上的函数，即整标函数，则其极限是当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 的极限的特例，记做$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$.

例 1 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{x}$ (2) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}$

解 (1) 由于$\dfrac{3x+1}{x}=3+\dfrac{1}{x}$，当 $x\to\infty$ 时，$3+\dfrac{1}{x}$ 无限接近 3，因此

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{x}=3$$

(2) 因为 $e^{x}=\dfrac{1}{e^{-x}}$，当 $x\to-\infty$ 时，$-x\to+\infty$，从而$\dfrac{1}{e^{-x}}$ 无限接近 0，因此

$$\lim_{x\to-\infty}e^{x}=0$$

(3) 从$\dfrac{n}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}$ 知，当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{n}{n+1}$ 无限接近于 1，因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

2. 自变量趋于有限值时函数的极限

先从实例讲起.

实例 2 (1) 讨论当 $x\to1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^{2}-1}{x-1}$ 的变化趋势；

(2) 讨论当 $x \to 0$ 时，$f(x)=\begin{cases}1, & x=0 \\ x^2, & x \neq 0\end{cases}$ 的变化趋势；

(3) 讨论当 $x \to 0^-$ 时和 $x \to 0^+$ 时，$f(x)=\begin{cases}x-1, & x \leqslant 0 \\ x+1, & x>0\end{cases}$ 的变化趋势.

由图 1.6 可看出，当 $x \to 1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 无限接近于 2. 而观察图1.7可知，当 $x \to 0$ 时，$f(x)=\begin{cases}1, & x=0 \\ x^2, & x \neq 0\end{cases}$ 无限接近于 0. 通过图 1.8 观察到，当 $x \to 0^-$（从 0 的左侧）时，$f(x)=\begin{cases}x-1, & x \leqslant 0 \\ x+1, & x>0\end{cases}$ 无限接近于 -1；当 $x \to 0^+$（从 0 的右侧）时，$f(x)=\begin{cases}x-1, & x \leqslant 0 \\ x+1, & x>0\end{cases}$ 无限接近于 1；当 $x \to 0$ 时（从 0 的两侧），$f(x)=\begin{cases}x-1, & x \leqslant 0 \\ x+1, & x>0\end{cases}$ 不能无限接近一个确定的常数.

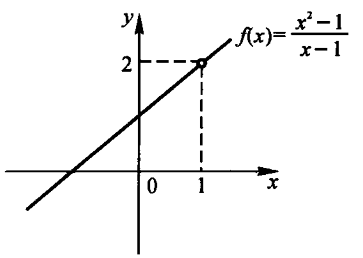

图　1.6

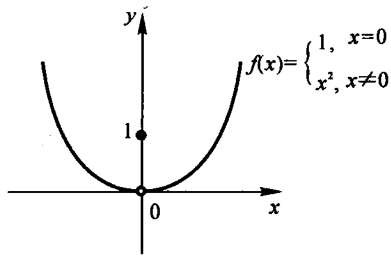

图　1.7

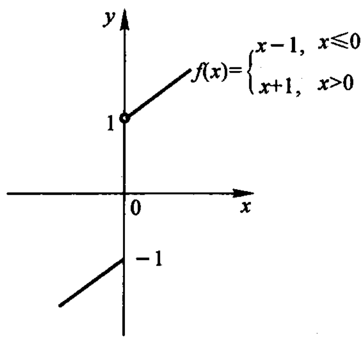

图　1.8

所以说，当 $x \to 1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的极限为 2；当 $x \to 0$ 时，$f(x)=\begin{cases}1, & x=0 \\ x^2, & x \neq 0\end{cases}$ 的极限为 0；当 $x \to 0$ 时，$f(x)=\begin{cases}x-1, & x \leqslant 0 \\ x+1, & x>0\end{cases}$ 的极限不存在，而在 $x=0$ 处的左、右极限分别为 -1 和 1. 下面给出定义.

定义 2　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的去心邻域内有定义，如果在 $x \to x_0$ 的过程中，对应的函数值无限接近于确定的数值 A，那么称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记做

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=A$$

或

$$f(x) \to A \quad (x \to x_0)$$

当 $x \to x_0^-$ 时与 $x \to x_0^+$ 时，$f(x)$ 的极限分别记做

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)=f(x_0-0)=A$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)=f(x_0+0)=A$$

分别叫做 $f(x)$ 在 x_0 的左极限和右极限.

注解　由极限定义（结合实例）可知，$f(x)$ 在 x_0 的极限与 $f(x)$ 在 x_0 处有无定义无关，也与 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值无关，仅与 $f(x)$ 在 x_0 的空心邻域内函数值的变化有关.

定理 2　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$$

例 2　求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x \to 1}(2x-1)$　　　　　　$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$

解　(1) 由于 $2x-1=1+2(x-1)$，当 $x \to 1$ 时，$1+2(x-1)$ 无限接近于 1，因此 $\lim\limits_{x \to 1}(2x-1)=1$.

(2) 当 $x \neq 3$ 时，$\dfrac{x^2-9}{x-3}=x+3$. 由极限定义知，$\dfrac{x^2-9}{x-3}$ 在 $x=3$ 处的极限与该函数在 $x=3$ 处的空心邻域内的函数值变化有关，则

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x \to 3}(x+3)=6$$

例 3　设函数