

高等算學入門

周為羣編

高等算學入門

江苏工业学院图书馆
藏书章

開明書店

編輯大意

1. 本書可供高級中學學生三年之用，或作教科書，或作參考書，均覺適當；即大學一年級學生——除對於算學須深詳研究者外——亦可採用；即其他人等為學問上或業務上欲了解高中範圍內的算學，本書亦恰合其需要。

2. 本書採用混合編法，其中包含平面三角，高等代數，解析幾何，微分積分，取材精當，聯絡自然，絕無蕪雜凌亂之弊。

3. 本書雖係混合編法，然平面三角，高等代數，解析幾何，微分積分各自的體系仍能保持，且於其相互關聯處，發揮盡致，使學者領悟算學中有“左右逢源”，“殊途同歸”之妙，與僅學習分科算學者大異其趣。

4. 本書所有習題，多寡合度，學者須逐一演算勿缺。在第二十三章以後，對於較難的習題附記答數，寓有啓發作用。

5. Breslich's Second-Year Mathematics.

Breslich's Third-Year Mathematics.

Breslich's Correlated Mathematics For Junior Colleges.

Wentworth's Plane And Spherical Trigonometry.

Fine's College Algebra.

Siceloff, Wentworth and Smith's Analytic Geometry.

Love's Analytic Geometry.

Love's Differential and Integral Calculus.

Baker's The Calculus For Beginners.

Osborne's Differential and Integral Calculus.

上列各書，編輯本書時均經參考，得助甚多，特表謝意，並以示不敢掠美。

編者識 二十三年三月二十四日。

目次

第一章 三角比.....1

求角與距離(1) 一個角的三角比(3) 以圖形法決定三角比的數值(4) 三角函數(5) 已知一個角的一個函數,用圖形法求其他諸函數(6) 30° 與 60° 的函數的確值(7) 45° 的函數的確值(8) $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 的函數的確值的總覽(8) 一個直角三角形的決定(9) 三角恆等式(16) 已知一個函數的值,求其他諸函數的值(17) 三角恆等式的證法(18) 倒數(20) 正切,餘弦,正弦的倒數(21)

第二章 三角函數的變化 對數23

餘角的三角函數(23) 以直線代表各三角函數(24) 角度變化時各函數所生的變化(26) 對數的定義(28) 關於對數的定理(29) 底的變換(31) 兩種重要對數(31) 指標和假數(31) 指標的求法(32) 小數的對數的指標(33) 小數的對數的記法(34) 真數和對數的互求(35) 對數表用法示例(35) 三角函數的真數檢查法(40) 三角函數的對數檢查法(43)

第三章 任何角的三角函數.....46

任何角(46) 角可以當作旋轉的總量(46) 象限(47) 三角函數定義的推廣(47) 在每個象限內的諸函數的符號(49) 以圖形法求三角函數的值(50) 一個角有一個函數的值已知,求作此角(51) 反三角函數(51) 已知一個角的一個函數的

值,解答其他各函數的值(52) 以直線代表三角函數(53) 代表正弦與餘弦的線(54) 正弦與餘弦的變化(54) 代表正切與正割的線(56) 正切與正割的變化(56) 代表餘切與餘割的線(58) 函數變化表(58) 大於 360° 的角的函數(59) 任何角的函數都可化做第一象限內的角(即銳角)的函數(59) 公式繼續有效(60) 弧度法(61) 弧度法與六十分法的關係(62) 一個角和牠的截弧和圓的半徑的關係(63) 正角和負角(64) 以 α 的三角函數表明 $-\alpha$ 的三角函數(65) 以 α 的三角函數表明 $(\frac{\pi}{2} \pm \alpha)$ 的三角函數(66) 以 α 的三角函數表明 $(n \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha)$ 的三角函數(69)

第四章 對數與三角形的解法73

三角形的解法(73) 公式(73) 解直角三角形應有的佈置(74) 正弦定律(76) 外接圓的直徑(77) 餘弦定律(78) 正切定律(79) 一個三角形的各個半角的正切·內切圓的半徑(82) 斜角三角形的解法(83) 第一種情形(84) 第二種情形(85) 第三種情形(87) 斜角三角形的面積(88)

第五章 幾個角的函數 91

正弦和餘弦的加法定理(91) 正弦和餘弦的減法定理(94) 正弦與餘弦的和與差(96) 正切與餘切的加法與減法定理(97) 二倍角的函數(98) 半角的函數(99) 三角方程式(102)

第六章 點的定位法 數系104

以直線代表整數(104) 原點·橫距(104) 正數與負數(105)

零(105) 以直線代表分數(105) 有理數(106) 無理數(106)
實數(106) 直線坐標(107) 極坐標(109) 直線坐標與極坐
標的關係(110) 虛數(111) 虛單位(112) 複素數(113) 以
極坐標表示複素數(114) 相等的複素數(115) 共軛複素數
(115) 複素數的加法(116) 複素數的減法(118) 複素數的
乘法(119) 一個複素數的 n 次冪(121) 複素數的除法(121)

第七章 直線 直線函數125

直線的斜率(125) 點的記法(126) 點斜式(127) 斜截式
(128) 二點式(128) 行列式(129) 截段式(130) 與 x 軸
平行的線(130) 與 y 軸平行的線(131) 經過原點的線(131)
定理(131) 直線方程式(132) 直線函數(132) 直線方程
式的作圖法(132) 以極坐標立直線的方程式(134) 法線式
(135) 變 $Ax + By + C = 0$ 為法線式(136) 自一點至一線的
距離(138) 一個角的平分線(139) 兩點間的距離(140) 離
二定點等遠的一個動點的軌跡(140) 依照定比分割一根線段
(141) 一根線段的中點(141)

第八章 幾根直線 聯立二元一次方程式 面積147

平行線(147) 矛盾方程式(148) 垂直線(148) 二線所夾的
角(149) 相交的二直線(150) 用行列式解一組的直線方程
式(150) 矛盾方程式和同值方程式(154) 線系(157) 平行
線系(158) 雙線方程式(158) 消去法(159) 三次行列式
(160) 以行列式解方程式(161) 有一個頂點在原點上的一

個三角形的面積(165) 任何三角形的面積(166)

第九章 行列式170

行列式(170) 元素,列,行,對角線(170) 子式(171) 用子式展開行列式(172) 三次以上的行列式(173) 行列交換(174) 二列或二行對調(175) 以一數乘一行列式(176) 行列式的分化(177) 行列式的求值法(178) 用行列式解方程式(181)

第十章 二次函數 拋物線184

二次函數(184) 二次函數 $y = ax^2$ 的圖形(184) 討論 $y = ax^2$ (185) 拋物線 $y = ax^2$ 的對稱軸(185) 拋物線的畫法(186) 拋物線的標準方程式(187) 拋物線的極方程式(187) $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形(188) 結論(189) 曲線的斜率(190) 割線的斜率(190) 曲線的切線(191) 切線的斜率(192) 有理整函數(192) 引申函數(193) 切線的方程式(194) 拋物線和彈丸的歷程(195)

第十一章 二次以上的有理整函數197

二項式定理(197) 有理整函數的圖形(200) 函數的求值法(200) $f(x)$ 的連續性(201) x 的一個有理整函數的引申函數(203) $f(x+h)$ 的計算法(204) 餘數定理(206) 因數定理(207)

第十二章 以數係數解方程式208

代數的解法(208) 方程式的根數(209) 倍根(210) 不等的

實數根(210) 相等的實數根(211) 複素數根(213) 笛卡兒
 的符號定則(215) 定理(218) 定理(219) 定理(220) 定
 理(221) $f(x)=0$ 的實數根所 的推測(221) 整數根(222)
 定理(223) 求 $f(x)=0$ 的整數根(224) 恆等式(225) 定理
 (226) 根與係數的關係(226)

第十三章 三次和四次方程式的代數的解法 …230

三次方程式的解法(230) 這三個根的討論(233) 四次方
 式的解法(234)

第十四章 偏分數 …238

偏分數(238) 第一種情形(238) 第二種情形(241) 第三種
 情形(243)

第十五章 排列法 組合法 或然率 …245

元素·排列法(245) n 個元素的排列法(246) 基本定理(248)
 n 個元素的排列法,但其中有相同的元素(249) 從 n 個元素中
 取出 r 個來排列(251) 圓周上的排列法(252) 組合法(253)
 組合的計算(253) 組合的總數(254) 或然率(256) 或
 然率應用的一斑(257)

第十六章 極限論和不定式 …261

極限的意義(261) 無限小(263) 無限大(263) 定理(264)
 定理(265) 函數的極限值(267) 不定式(268)

第十七章 微分法 …271

所加數(271) 微分法(272) 微分法的例示(273) $\frac{dy}{dx}$ 在幾何學

上的意義(275) 引申函數可以表示速率(277) 加速率(277)

第十八章 微分法的公式.....282

代數函數的微分法的公式(282) 公式 I 的證法(283) 公式 II 的證法(283) 公式 III 的證法(283) 公式 IV 的證法(284) 公式 V 的證法(285) 公式 VI 的證法(285) 公式 VII 的證法(286) 對數和指數函數的微分法的公式(291) 公式 VIII 的證法(291) 公式 IX 的證法(293) 公式 X 的證法(293) 公式 XI 的證法(293) 公式 XII 的證法(293) 三角函數的微分法的公式(294) 公式 XIII 的證法(295) 公式 XIV 的證法(296) 公式 XV 的證法(296) 公式 XVI 的證法(296) 公式 XVII 的證法(297) 公式 XVIII 的證法(297) 反三角函數的微分法的公式(297) 公式 XIX 的證法(298) 公式 XX 的證法(299) 公式 XXI 的證法(299) 公式 XXII 的證法(300) 公式 XXIII 的證法(300) 公式 XXIV 的證法(300) 以 $\frac{dx}{dy}$ 表明 $\frac{dy}{dx}$ (302) 以 $\frac{dy}{dz}$ 和 $\frac{dz}{dx}$ 表明 $\frac{dy}{dx}$, 就是求函數的函數的引申函數(303) 引申函數的引申函數, 或微分係數的微分係數(305) 記法(306) 顯函數和隱函數(307) 隱函數的微分法(307)

第十九章 圓.....310

普通二元二次函數(310) 普通二元二次方程式(310) 圓的標準方程式(311) 圓的普通方程式(312) 圓的特殊位置(314) 求一個已知圓的中心和半徑(314) 從已知條件中求圓的方程式(316) $xy = 0$ 的切線的斜率(318) $f(x,y)=0$

的切線的方程式(319) 圓的切線的方程式(319) 曲線的法線(320) 次切線和次法線(321) 從一個已知點到一個已知圓上的切線的長(322) 圓系·根軸(323) 圓的極方程式(326)

第二十章 橢圓 雙曲線 拋物線328

橢圓·焦點(328) 橢圓的方程式(328) 討論這方程式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (329) 焦半徑(331) 橢圓的機械畫法(332) 偏心率

(332) 橢圓的極方程式(334) 討論這方程式 $\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$

(335) 橢圓的幾何畫法(337) 橢圓的切線和法線的方程式

(338) 次切線和次法線的長(340) 雙曲線·焦點(342) 雙

曲線的方程式(342) 討論這方程式 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (343) 焦半

徑(344) 偏心率(344) 等邊雙曲線(344) 漸近線(344)

焦點在 y 軸上的雙曲線的方程式(346) 共軛雙曲線(346)

雙曲線的極方程式(348) 討論這個極方程式(348) 雙曲線

的切線和法線的方程式(349) 次切線和次法線的長(350)

拋物線(351)

第二十一章 圓錐曲線 改變坐標法360

圓錐曲線(360) 拋物線(361) 橢圓(362) 雙曲線(364)

定理(365) 改變坐標法(367) 遷移法(368) 圓錐曲線的

又一標準方程式(370) 撤消方程式中一次各項(374) 旋轉

法(376)

第二十二章 普通二元二次方程式與圓錐曲線...379

圓錐曲線的普通方程式(379) 經過五個已知點的一種圓錐曲

線(379) 撤消 xy 項(382) 討論這個方程式 $Ax^2 + By^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0$ (384) $AB - H^2$ 的值不因坐標軸旋轉而變
(385) 討論這個方程式 $Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0$
(386) 圓錐曲線的中心坐標(387) 一種圓錐曲線的方程式化為最簡式(388)

第二十三章 無窮級數 392

級數的和(392) 無窮級數(393) 收斂級數和發散級數(393)
正級數(394) 定理(394) 定理(395) 比較檢驗法(395)
定理(395) 定理(396) 定理(397) 標準級數(398) 比值
檢驗法(401) 定理(401) 正負項都有的級數(405) 定理
(405) 絕對收斂級數(405) 定理(406) 定理(406) 各項
是 x 的函數的級數(408)

第二十四章 函數展開法 413

麥克老令的定理(414) 麥克老令的定理的證法(414) 以級
數求值(418) 對數的計算法(418) π 的計算法(421) 台洛
的定理(422) 台洛的定理的證法(423)

第二十五章 再論不定式 427

決定不定式 $\frac{0}{0}$ 的值(427) 中值定理(428) 不定式 $\frac{0}{0}$ 的普通
定值法(430) 決定不定式 $\frac{\infty}{\infty}$ 的值(433) 決定不定式 $0 \cdot \infty$
和 $\infty - \infty$ 的值(435) 決定不定式 $0^0, 1^\infty, \infty^0$ 的值(436)

第二十六章 極大與極小 439

升函數和降函數(439) 定義(440) 極大與極小的必具條件

(444) 判別極大和極小的第二法(446)

第二十七章 積分法457

微分(457) 積分和積分法(458) 積分常數(460) 定理(460)

第二十八章 積分法的基本公式463

基本公式(463) 公式 I—IV 的例題(464) 公式 V—VI 的例題(466) 公式 VII—IX 的例題(467) 公式 X—XI 的例題(468) 公式 XII 的例題(469)

第二十九章 三角函數的積分法 替代積分法

有理分數的積分法474

三角函數的積分法(474) 第一種形式(474) 第二種形式(475) 第三種形式(475) 第四種形式(477) 替代積分法(478) 有理分數的積分法(481)

第三十章 定限積分486

定限積分(486) 上下限交換(487)

第三十一章 面積與體積491

面積(491) 旋成體的體積(495) 曲線的長(500) 旋成面的面積(503)

第一章

三角比

1. 求角與距離. 畢塔哥拉斯(Pythagoras)的定理,我們知道了;兩個直角三角形,如各有一個銳角彼此相等,則兩形相似,這事實我們也知道了;還有在同一直角三角形內的兩個銳角互為餘角,我們也知道了.從這些原理我們能悟得一種求未知角和未知距離的方法.

這些原理是“三角法 (Trigonometry)”的基礎;三角法不僅在研究高等算學方面很有用處,在一切實用科學方面也很有用處的.

習題

1. 試證凡直角三角形各有一個銳角彼此相等,則互相似.

2. 在方格紙(書店內有製成的出售)上畫一直角三角形,令其一角等於 30° . 量其各邊至小數點下第二位,並求對 30° 角的邊與斜邊的比值.

3. 試證凡直角三角形有一個角是 30° 的,這個比值是

相同的。

4. 在習題2那個三角形內,求對 60° 角的邊與斜邊的比值,算至小數點下第二位.將你所算得的結果和同班同學的比較一下.

5. 試證凡直角三角形有一個角是 60° 的,這個比值是相同的。

6. 在有一個角是 45° 的直角三角形內,求對 45° 角的邊與斜邊的比值,算至小數點下第二位。

7. 試證凡直角三角形有一個角是 45° 的,這個比值是一定不變的。

8. 用量角器畫一個 40° 的角(圖1).在任一邊上取 A_1, A_2, A_3 各點,再從各點作垂線至他邊.量 A_1C_1 與 A_1O ,並求其比值。

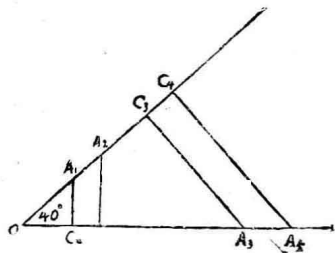


圖 1

9. 試證在圖1的一切三角形內,對 40° 角的邊與各自斜邊的比值是相同的。

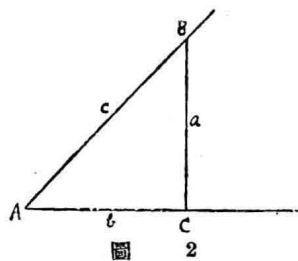
從習題9的事理看來,可知兩邊的長雖變動不居,而其比值是固定的。

如圖1,對邊與斜邊這個固定的比值叫做 40° 角的正弦($\sin$)。

2. 一個角的三角比 (Trigonometric ratios).

設有一個 A 角 (圖 2). 在這個角的任一邊上取一點, 如 B , 自 B 至他邊作垂線即成了一個直角三角形, 如 ABC .

在這個三角形內, 對 A 角的邊與斜邊的比叫做 A 角的“正弦” (寫爲: $\sin A$), 即



$$\sin A = \frac{a}{c}.$$

鄰 A 角的邊與斜邊的比叫做 A 角的“餘弦 (Cosine)”, (寫爲: $\cos A$), 即

$$\cos A = \frac{b}{c}.$$

對 A 角的邊與鄰 A 角的邊的比叫做 A 角的“正切 (tangent)”, (寫爲: $\tan A$), 即

$$\tan A = \frac{a}{b}.$$

簡括言之:

$$\sin A = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}, \text{ 或 } \frac{a}{c}.$$

$$\cos A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}, \text{ 或 } \frac{b}{c}.$$

$$\tan A = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}, \text{ 或 } \frac{a}{b}.$$

3. 以圖形法決定三角比的數值.

一個已知角的三角比的數值可以約略求得, 只須畫一個含有已知角的直角三角形, 看以下的習題自可明瞭.

習題

1. 求 $\sin 50^\circ$ 的數值.

用量角器在方格紙上畫一個角等於 50° (圖 3). 作 $AB \perp CB$. 量 AB 與 AC . 求這個比 $\frac{AB}{AC}$ 的值. 這就是要求的數.

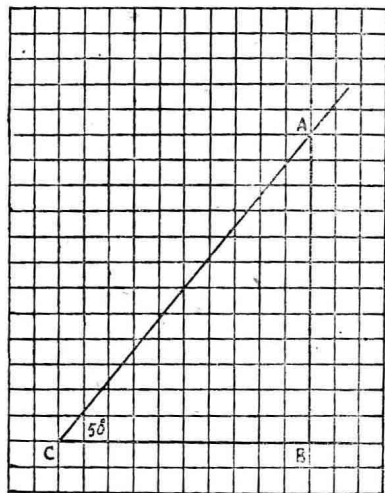


圖 3

2. 求 $\sin 20^\circ$; $\sin 45^\circ$; $\sin 60^\circ$; $\sin 70^\circ$ 的數值.

3. 從 1° 到 90° 各角的三角比的值可以列成下表. 把你演算習題 1, 2 所得結果與表中相當的值比較一下.

1°—90° 各角的正弦、餘弦和正切的表

角	正弦	餘弦	正切	角	正弦	餘弦	正切
1°	.0175	.9983	.0175	46°	.7193	.6947	1.0355
2	.0349	.9994	.0349	47	.7314	.6820	1.0724
3	.0523	.9986	.0524	48	.7431	.6691	1.1106
4	.0693	.9976	.0699	49	.7547	.6561	1.1504
5	.0872	.9962	.0875	50	.7660	.6428	1.1918
6	.1045	.9945	.1051	51	.7771	.6293	1.2349
7	.1219	.9925	.1228	52	.7850	.6157	1.2799
8	.1392	.9903	.1405	53	.7986	.6018	1.3270
9	.1564	.9877	.1584	54	.8090	.5878	1.3764
10	.1736	.9848	.1763	55	.8192	.5736	1.4281
11	.1908	.9816	.1944	56	.8290	.5592	1.4826
12	.2079	.9781	.2128	57	.8387	.5445	1.5399
13	.2250	.9744	.2299	58	.8480	.5299	1.6003
14	.2419	.9703	.2493	59	.8572	.5150	1.6643
15	.2588	.9659	.2679	60	.8660	.5000	1.7321
16	.2756	.9613	.2837	61	.8746	.4848	1.8040
17	.2924	.9563	.3057	62	.8829	.4695	1.8807
18	.3090	.9511	.3249	63	.8910	.4540	1.9626
19	.3256	.9455	.3443	64	.8988	.4384	2.0503
20	.3420	.9397	.3640	65	.9063	.4226	2.1445
21	.3584	.9336	.3839	66	.9135	.4067	2.2460
22	.3746	.9272	.4040	67	.9205	.3907	2.3559
23	.3907	.9205	.4245	68	.9272	.3746	2.4751
24	.4067	.9135	.4452	69	.9336	.3584	2.6051
25	.4226	.9063	.4663	70	.9397	.3420	2.7475
26	.4384	.8988	.4877	71	.9455	.3256	2.9042
27	.4540	.8910	.5095	72	.9511	.3090	3.0777
28	.4695	.8829	.5317	73	.9563	.2924	3.2709
29	.4848	.8746	.5543	74	.9613	.2756	3.4874
30	.5000	.8660	.5774	75	.9659	.2588	3.7321
31	.5150	.8572	.6009	76	.9703	.2419	4.0108
32	.5299	.8480	.6249	77	.9744	.2250	4.3315
33	.5446	.8387	.6494	78	.9781	.2079	4.7046
34	.5592	.8290	.6745	79	.9816	.1908	5.1446
35	.5736	.8192	.7002	80	.9848	.1736	5.6713
36	.5878	.8090	.7265	81	.9877	.1564	6.3138
37	.6018	.7986	.7536	82	.9903	.1392	7.1154
38	.6157	.7880	.7813	83	.9925	.1219	8.1443
39	.6293	.7771	.8098	84	.9945	.1045	9.5144
40	.6428	.7660	.8391	85	.9962	.0872	11.4301
41	.6561	.7547	.8693	86	.9976	.0698	14.3006
42	.6691	.7431	.9004	87	.9986	.0523	19.0811
43	.6820	.7314	.9325	88	.9994	.0349	28.6363
44	.6947	.7193	.9657	89	.9998	.0175	57.2900
45	.7071	.7071	1.0000	90	1.0000	.0000	∞

4. 三角函數. 設有一方程式 $y=2x+3$. $x=0$,

$y=3$; $x=1$, $y=5$; $x=-1$, $y=1$;……;當 x 有一個值, y 必有一

個對應的值; y 跟着 x 而變. y 就說是 x 的函數. 凡乙數跟