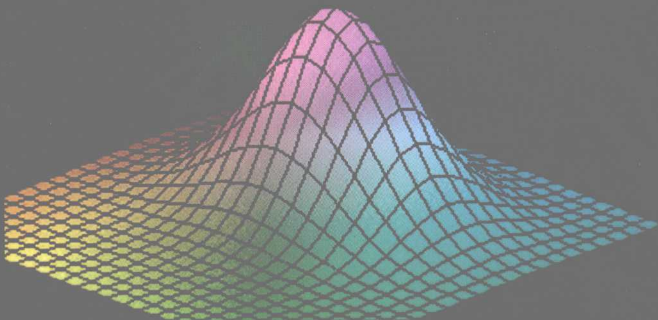
21世纪普通高等学校数学系列规划教材



# 概率论与数理统计学习指导

魏振军 编著

☑本书作者曾两次获全国教育软件大赛一等奖

☑光盘内含自我测试题；题目典型

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

21世纪普通高等学校数学系列规划教材

# 概率论与数理统计学习指导

魏振军　编著
茆诗松　主审

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

## 内 容 简 介

本书是与主教材《概率论与数理统计》(魏振军编著)配套的学习指导书. 各章与主教材一致,每章内容设计为内容框图、教学基本要求、基本内容概括、重点难点解析、习题选解。附录中介绍R软件的使用方法。所附光盘提供了200多道自我检测题.

本书内容丰富,讲解透彻,是编者多年教学实践经验的总结. 适合作为普通高等院校概率论与数理统计课程的配套教材,还可作为专科相关课程的配套教材,或作为考研指导书。

**图书在版编目(CIP)数据**

概率论与数理统计学习指导/魏振军编著. 一北京:中国铁道出版社,2008.7

(21世纪普通高等学校数学系列规划教材)

ISBN 978-7-113-08828-6

Ⅰ.概… Ⅱ.魏… Ⅲ.①概率论一高等学校一教学参考资料②数理统计一高等学校一教学参考资料 Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第111298号

**书　　名:** 概率论与数理统计学习指导
**作　　者:** 魏振军　编著

---

**策划编辑:** 李小军　　**编辑部电话:** (010)63583215
**责任编辑:** 李小军
**编辑助理:** 袁　琳　　**封面制作:** 李　雪
**封面设计:** 付　魏　　**责任印制:** 李　佳

---

**出版发行:** 中国铁道出版社(北京市宣武区右安门西街8号　　邮政编码:100054)
**印　　刷:** 北京鑫正大印刷有限公司
**版　　次:** 2009年4月第1版　　2009年4月第1次印刷
**开　　本:** 787mm×960mm　1/16　　**印张:** 8.5　　**字数:** 164千
**印　　数:** 4000册
**书　　号:** ISBN 978-7-113-08828-6/O・181
**定　　价:** 16.00元(附赠光盘)

---

# 前　言

本书是与教材《概率论与数理统计》(魏振军编著、中国铁道出版社 2009 年出版)配套的学习指导书.主要包括下述内容:

1. 各章“知识结构框图”

给出这些框图的目的是告诉读者:要学习一门知识,需要注意前后的联系,从知识点的关联中把握和理解学科的完整体系.这样做不仅有助于理解和应用,也是发现问题、分析和解决问题的基础.

2. 各章教学基本要求

它们涵盖了教育部关于这门课程 2008 年考研大纲的考试要求.

3. 各章基本内容概括

概括本章主要内容。

4. 各章重点难点解析

对各章的重点和难点做了进一步的归纳和说明.

5. 习题选解

包括少量基本练习题和全部提高题.

6. 本书的“附录”

与通常的“附录”不同,“附录”结合教材有关内容,说明了“R 软件”(一个免费而专业的统计计算机语言及软件平台)的应用;通过具体实例介绍了“R 软件”中与概率分布有关的指令,用 R 进行计算机模拟的方法,以及如何用 R 进行区间估计和假设检验、一元线性回归等.读者结合参看 R 软件的帮助可以实现举一反三,编写简单程序.用好 R 软件,有助于我们探索随机现象的规律性、进行数据的整理分析、掌握统计方法,理解其中的统计思想,能把我们从烦琐的计算中解放出来.

7. 所附光盘

光盘提供了可供学生自我检测的 200 多道简答题,这些题目涵盖了本课程基本知识点,能考查学生对基本概念、原理的掌握情况.

中国铁道出版社有关同志为教材及本辅导书出版发行付出了大量劳动.本校张新建老师、刘璐博士都曾认真审阅过书稿,并提出了宝贵意见.在此向他们表示衷心的感谢.

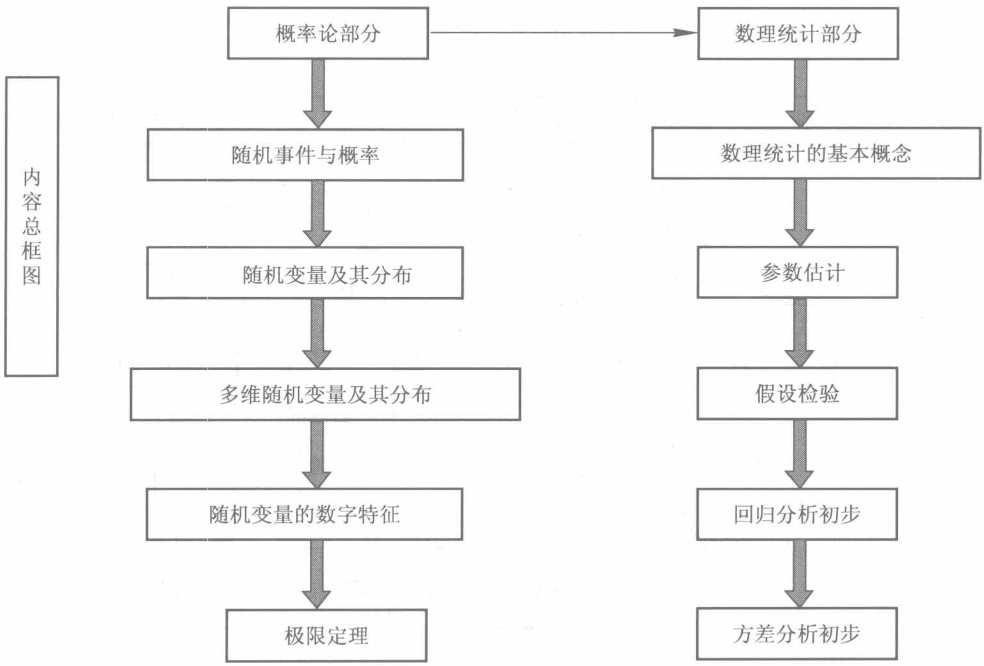
受作者水平所限,书稿及所配光盘内容难免会有错误及不当之处,恳请同行专家及读者批评、指正.

编著者

2008 年 6 月

# 目　录

# 课程内容总框图

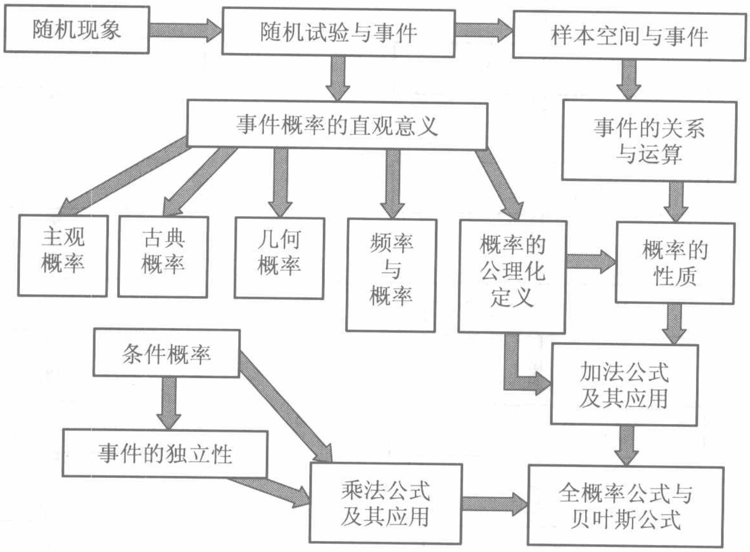


内容总框图
概率论部分
随机事件与概率
随机变量及其分布
多维随机变量及其分布
随机变量的数字特征
极限定理
数理统计部分
数理统计的基本概念
参数估计
假设检验
回归分析初步
方差分析初步

# 第 1 章

# 随机事件与概率

## 内容框图




## 教学基本要求

(1) 了解样本空间的概念,理解随机事件的概念,掌握事件的关系和运算,着重理解事件的“包含”、“和”、“积”、“对立”、“互不相容”. 会用简单事件表达复杂事件,并能熟练运用事件运算的交换律、结合律、分配律、对偶律(德·莫根律).

(2) 理解概率、条件概率的概念,掌握概率的基本性质,会计算古典型概率和几何型概率,掌握概率的加法公式、乘法公式、减法公式、全概率公式以及贝叶斯公式.

(3) 理解事件独立性的概念,掌握用事件独立性进行概率计算.

## 基本内容概括

本章由四个基本概念(随机事件、概率、条件概率、独立性),四个基本公式(加法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式)和一个概型(古典概型)组成.

本章的重点是概率的概念、条件概率、独立性和四个公式;难点是古典概型中的概率计算、条件概率、全概率公式和贝叶斯公式的应用.

## 重点难点解析

### 一、四个重要概念

(一) 随机事件

在随机试验中,可能发生也可能不发生的事件,称为**随机事件**,简称**事件**.

随机事件具有以下特点:

首先,随机事件的发生具有偶然性.在一次试验中,它可能发生,也可能不发生.例如,抛掷一枚硬币,"出现正面"就是一个随机事件.某个人"购买彩票中大奖"也是一个随机事件.

其次,在大量重复试验中,随机事件的发生具有某种规律性.例如,在掷骰子试验中,"掷出1点"是一个随机事件.在大量重复试验中,该事件出现的频率稳定地在1/6附近摆动,并且一般来说,摆动的幅度随着试验次数的增大而变小.

对于事件的运算,要熟悉事件的和、积及对立事件.

对于一个具体事件,要会用数学符号来表示;反之,对于用符号表示的事件,要清楚其具体含义是什么.也就是说,要正确无误地"互译".

**【例1】** 从一批产品中任取两件,观察合格品的情况.记 $A=\{$两件产品都是合格品$\}$,初学者往往误认为 $\overline{A}=\{$两件产品都是不合格品$\}$.我们知道 $\overline{A}$ 是 $A$ 的对立事件,它表示 $A$ 不出现或者说是 $A$ 的否定,所以 $\overline{A}=\{$两件产品不都是合格品$\}$.但在概率论里,常常叙述为 $\overline{A}=\{$两件产品至少有一件是不合格品$\}$.而它又可写为两个互不相容事件之和:$\overline{A}=\{$两件产品恰有一件是不合格品$\}\cup\{$两件产品都是不合格品$\}$.若记 $B_i=\{$取出第 $i$ 件是合格品$\}$,$i=1,2$,则 $A=B_1B_2$,而

$$\overline{A}=\overline{B_1B_2}=\bar{B}_1+\bar{B}_2=\bar{B}_1B_2+B_1\bar{B}_2+\bar{B}_1\bar{B}_2.$$

注意两事件互不相容与对立的区别:

两事件 $A$、$B$ 互不相容,是指 $A$、$B$ 不可能同时发生,即 $AB=\varnothing$.

两事件 $A$、$B$ 互为对立事件,除要求 $A$、$B$ 互不相容外,还要求 $A+B=S$,即 $A+B$ 是必然事件.于是有 $\overline{A}=B$,$\bar{B}=A$.

注意 $n$ 个事件互不相容不等于 $A_1A_2\cdots A_n=\varnothing$.

若 $n$ 个事件中任意两个事件都互不相容,则称这 $n$ 个事件互不相容.所以,若 $n$ 个事件

互不相容,则其中任意两个事件都互不相容.但由"$A_1A_2\cdots A_n=\varnothing$"并不能说明这 $n$ 个事件互不相容。

(二) 概率

概率简单来说就是一个在 0 和 1 之间的数,用来度量在一定条件下事件发生的可能性大小.两个极端情况是,在一定条件下必定发生的事件,其概率为 1;在一定条件下不可能发生的事件,其概率为 0.任一事件的概率在 0 和 1 之间.

我们用 $P(A)$ 表示事件 $A$ 的概率,用 $S$ 表示必然事件,用 $\varnothing$ 表示不可能事件,则有$P(S)=1$,$P(\varnothing)=0$,$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

本章介绍了定义和确定概率的五种方法.

**1. 古典方法**

若所涉及的随机试验满足下述两个条件:

(1) 它的样本空间 $S$ 只有有限多个样本点(或基本事件);

(2) 每个样本点(或基本事件)出现的可能性相同(简称等可能性).

称这种试验为**有穷等可能随机试验**或**古典概型**.

古典概型中事件的概率计算:

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的样本点数}}{S\text{ 中样本点的总数}}.$$

称此概率为**古典概率**.这种确定概率的方法称为**古典方法**.

对于古典概型,只要知道事件 $A$ 所包含的基本事件数和样本空间的基本事件总数,就可求得事件 $A$ 的概率.这样就把求概率问题转化为计数问题.排列组合是计算古典概率的重要工具.排列组合的基本知识已包含在中学教材中,这里不再赘述.

**2. 几何方法**

把等可能推广到无限个样本点的场合,人们引入了几何概型.由此形成了确定概率的另一方法 —— 几何方法.

向一个有限区域$S$中任意投掷一质点,假定随机点落入该区域的任一小区域$A$的可能性与小区域$A$的测度(可以是长度、面积或体积等)成正比,而与$A$的位置与形状无关,称这种随机试验为**几何概型**.

几何概型中事件的概率计算:

如果"点落入小区域 $A$"这一随机事件仍记作 $A$,则

$$P(A)=\frac{A\text{ 的测度}}{S\text{ 的测度}}.$$

这样算出的概率称为**几何概率**.这种确定概率的方法称为**几何方法**.

**3. 频率方法**

这种方法基于大量试验或观察中事件出现的频率,要求所涉及的随机现象可以进行大

量重复.

假如在 $N$ 次重复试验中,事件 $A$ 出现 $k_N$ 次,则事件 $A$ 发生的频率为

$$f_N(A)=\frac{k_N}{N}=\frac{\text{事件 }A\text{ 出现的次数}}{\text{重复试验的次数}}.$$

由频率的定义可见,如果事件 $A$ 出现的频率越大,也就是说它发生得越频繁,那么就意味着它在一次试验中发生的可能性越大.可见,频率和概率有着密切的关系.

随着重复次数 $N$ 的增加,频率 $f_N(A)$ 逐渐稳定在某一常数附近.这个频率的稳定值与 $N$ 无关,它就是事件 $A$ 发生的概率 $P(A)$. 所以我们说,概率是频率稳定性的依据,是随机事件规律的一个体现.

现实世界中,无限次重复是不可能的,只要重复次数足够多,就可用频率近似概率.实际使用中大多数概率就是用频率近似得到的.而且一般来说,重复的次数越多,估计的准确度越高.

**4. 主观方法**

主观概率反映的是人们对某事件发生可能性大小所给出的个人信念,也是在 0 和 1 之间的一个数字.主观概率主要用于随机现象不能大量重复的场合.它是建立在人类经验基础上的,要与主观臆造区分开来.

**5. 公理化方法**

设 $E$ 是随机试验,$S$ 是它的样本空间,对于 $E$ 中的每一个事件 $A$,赋予一个实数,记为 $P(A)$,称为事件 $A$ 的**概率**.如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下述三条公理:

**公理 1** $P(A)\geqslant 0$.

**公理 2** $P(S)=1$.

**公理 3** 若 $A_1,A_2,\cdots$ 是 $S$ 中互不相容的事件序列,即 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j, i,j=1,2,\cdots$,则有

$$P(A_1+A_2+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots.$$

这里事件个数可以是有限或无限的.

由前苏联数学家柯尔莫哥洛夫建立的概率的公理,给出了概率这个概念所必须满足的最基本的性质,但它没有也不可能解决在特定场合下如何定出概率的问题.公理的意义在于它为一种普遍而严格的数学化概率理论奠定了基础.

由概率的公理,可以推导出概率的若干性质.这些性质在计算概率时很有用.

下面是几个常用的性质:

**性质 1** $P(\varnothing)=0$

**性质 2** 对于有限个互不相容事件序列 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P(A_1+A_2,\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

**性质 3** 对任一事件 $A$,有

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

**性质 4** 设 $A$、$B$ 是两个事件,若 $A \subset B$,则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A).$$

$$P(B) \geqslant P(A).$$

**性质 5** 对任意两事件 $A$、$B$,有 $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

性质 5 可以推广为:

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3).$$

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n)$$

(三)条件概率

**1. 条件概率 $P(A \mid B)$ 与概率 $P(A)$ 的区别**

每一个随机试验都是在一定条件下进行的.设 $A$ 是随机试验的一个事件,则 $P(A)$ 是在一定条件下事件 $A$ 发生的可能性大小.而条件概率 $P(A \mid B)$ 是指在原条件下又添加"$B$ 发生"这个条件时 $A$ 发生的可能性大小,即 $P(A \mid B)$ 仍是概率.$P(A \mid B)$ 与 $P(A)$ 的区别在于两者发生的条件不同.它们是两个不同的概念,在数值上一般也不相同.

**2. 条件概率 $P(A \mid B)$ 与概率 $P(A)$ 的数值关系**

条件概率 $P(A \mid B)$ 是在随机试验条件下又添加"$B$ 发生"这个条件时 $A$ 发生的可能性大小.既然添加了新的条件,是否一定有 $P(A \mid B) \geqslant P(A)$ 呢?请看下面几种情形.

情况 1:$A$、$B$ 互不相容,即 $AB = \varnothing$,$P(AB) = 0$.由于

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 0,$$

故有

$$P(A \mid B) \leqslant P(A).$$

情况 2:$A \subset B$.此时 $P(AB) = P(A)$,

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \geqslant P(A).$$

情况 3:$B \subset A$.此时 $P(AB) = P(B)$,

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \geqslant P(A).$$

情况 4:$A$、$B$ 既不互不相容又没有包含关系.

例如,$P(A) = 0.4$,$P(B) = 0.5$,$P(AB) > 0$.对以下三种情况,我们得到三种不同的结论:

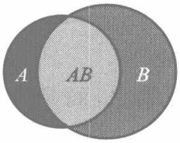
$$\text{(a)}P(AB)=0.38,\quad P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.38}{0.50}=0.76>P(A);$$

$$\text{(b)}P(AB)=0.20,\quad P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.20}{0.50}=0.4=P(A);$$

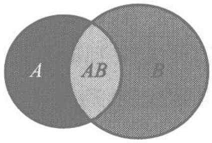
$$\text{(c)}P(AB)=0.10,\quad P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.10}{0.50}=0.2<P(A).$$

如图 1.1 所示.

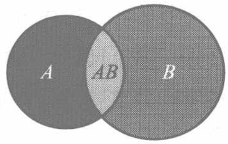
在这种情况,若不知 $P(AB)$ 的具体大小,我们不能对 $P(A\mid B)$ 和 $P(A)$ 的相对大小做出任何结论.




(a) $P(A|B)>P(A)$




(b) $P(A|B)=P(A)$




(c) $P(A|B)<P(A)$

图 1.1

现在,大家可以对条件概率 $P(A\mid B)$ 与概率 $P(A)$ 的数值关系做出回答了.

**3. 条件概率 $P(A\mid B)$ 与概率 $P(AB)$ 的区别**

这也是初学者容易混淆的问题之一. 尤其在实际问题的计算中,初学者往往分不清求的是 $P(A\mid B)$ 还是 $P(AB)$.

$P(A\mid B)$ 是指在 $B$ 发生的条件下 $A$ 发生的概率,而 $P(AB)$ 是指 $AB$ 同时发生的概率. 因而,“$B$ 发生”在 $P(A\mid B)$ 中是作为条件,而在 $P(AB)$ 中是作为结果,所以两者完全不同.

**【例 2】** 甲、乙两厂共同生产 1 000 个零件. 其中 300 个是乙厂生产的,而在这 300 个零件中,有 189 个是标准件. 现从这 1 000 个零件中任取一件,问这个零件是乙厂生产的标准件的概率是多少?

我们令 $B=\{$取一个是乙厂生产的$\}$, $A=\{$取一个是标准件$\}$,则所求为

$$P(BA)=\frac{189}{1\ 000}=0.189.$$

即从 1 000 个零件中任取一件是乙厂生产的标准件的概率.

若将本例后半部分改为:现从这 1 000 个零件中任取一件,发现它是乙厂生产的,问它是标准件的概率是多少?这里求的就是 $P(A\mid B)$.

$$P(A\mid B)=\frac{189}{300}=0.63.$$

它等于在乙厂生产的零件中任取一件是标准件的概率.

（四）独立性

独立性的概念在概率理论及应用中都起着重要的作用. 如果事件是独立的，则许多概率的计算就可以得到简化.

**1. 正确理解独立的概念**

两事件独立的定义比较简单，即若两事件 $A$、$B$ 满足

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称事件 $A$、$B$ **相互独立**.

通过对教材上的例子进行讨论，我们知道所谓事件 $A$、$B$ 相互独立，就是一个事件的发生并不影响另一个事件发生的概率. 当 $P(B)\neq 0$ 时，$P(AB)=P(A)P(B)$ 等价于 $P(A\mid B)=P(A)$. 我们也常利用这个事实来判断两事件是否独立.

在实际应用中，我们常常不是根据定义来判断两事件是否独立，而是根据问题的实际意义来做出判断.

例如，甲、乙两人同时向一目标射击，显然可以认为甲命中（乙命中）并不影响乙命中（甲命中）的概率，即事件"甲命中"与"乙命中"是相互独立的. 同理，可以认为"甲命中"与"乙未命中"、"甲未命中"与"乙命中"以及"甲未命中"与"乙未命中"也都是相互独立的.

而三个事件 $A$、$B$、$C$ 相互独立，则要求 4 个等式同时成立，即

$$P(AB)=P(A)P(B),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(AC)=P(A)P(C),$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$$

$n(n>3)$ 个事件相互独立，则要求 $C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-n-1$ 个等式同时成立.

**2. 独立与互斥的区别**

两个事件互斥是指两个事件不可能同时发生. 因而，当两个事件的概率都大于 0 时，若它们互斥，一个事件的发生必导致另一个事件不发生，即一个事件的发生影响另一个事件发生的概率，所以两个事件不独立. 反之，若它们相互独立，即一个事件是否发生对另一个事件的概率没有影响，当然推不出一个事件发生，另一个事件不发生，所以两事件不互斥. 这可归结为下面的命题：

若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则 $A$、$B$ 互斥与独立不能同时成立.

**证明** 若 $A$、$B$ 独立，有 $P(AB)=P(A)\,P(B)>0$，即 $AB\neq\varnothing$，所以 $A$、$B$ 不互斥；

若 $A$、$B$ 互斥，即 $AB=\varnothing$，则 $P(AB)=0$，而 $P(A)\,P(B)>0$，所以 $P(AB)\neq P(A)\,P(B)$，即 $A$、$B$ 不独立.

一个特殊情况是：不可能事件 $\varnothing$ 与任何事件都独立且互斥.

**3. 事件的独立性与概率的计算**

若 $n$ 个事件是相互独立的，则它们同时发生的概率就等于它们各自发生的概率的乘积.

当我们计算 $n$ 个独立事件至少有一个发生的概率时，使用独立性可以简化计算. 即有：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则

$$\begin{aligned} P(A_1+A_2+\cdots+A_n) &= 1-P(\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n}) \\ &= 1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n) \\ &= 1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n). \end{aligned}$$

也就是说，$n$ 个独立事件至少有一个发生的概率等于1减去各自对立事件概率的乘积.

## 二、四个重要公式

计算概率最常用的两个公式是加法公式和乘法公式.

（一）加法公式

它计算的是事件和的概率.

若事件 $A$、$B$ 互不相容（互斥），概率的加法公式是

$$P(A+B)=P(A)+P(B);$$

若事件 $A$、$B$ 不是互斥的，则要使用下面的（广义）加法公式

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

显然，前者是后者的特例.

（二）乘法公式

它计算的是事件积的概率.

若 $P(A)>0$，则

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A).$$

它反映了 $P(AB)$，$P(A)$，$P(B\mid A)$ 之间的关系. 在用乘法公式计算概率时，关键在于条件概率的计算.

加法公式和乘法公式都可以推广到两个以上的事件.

（三）全概率公式和贝叶斯公式

在概率计算中，有时要综合利用加法公式和乘法公式才能解决问题. 这就是教材上介绍的全概率公式和贝叶斯公式.

**全概率公式**　设 $S$ 为随机试验的样本空间，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，且有 $P(A_i)>0, i=1,2,\cdots,n$，$S=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$，则对任一事件 $B$，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B\mid A_i).$$

**贝叶斯公式**　在全概率公式的假定之下，有

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(BA_i)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)}, i = 1,2,\cdots,n.$$

那么要问:什么情况下使用全概率公式?什么情况下使用贝叶斯公式?

可以粗略地说,全概率公式用于已知原因求结果,而贝叶斯公式恰好相反,是已知结果求原因.下面我们看一个例子.

**【例 3】** 发报台分别以概率 0.6 和 0.4 发出信号"•"和"—".由于通信系统受到干扰,当发出信号为"•"时,收报台未必收到信号"•",而分别以概率 0.8 和 0.2 收到信号"•"和"—".同样,当发出信号为"—"时,收报台分别以概率 0.9 和 0.1 收到信号"—"和"•".

(1) 求收报台收到信号"•"的概率;

(2) 当收报台收到信号"•"时,发报台确是发出信号"•"的概率.

**解** 设 $A=$ {发报台发出信号为"•"},$B=$ {收报台收到信号"•"}.
则 $\overline{A}=$ {发报台发出信号为"—"}.

问题(1) 是由原因求结果.结果是 $B$,原因是 $A$ 和 $\overline{A}$.用事件关系表示为:

$$B = AB + \overline{A}B.$$

结果发生的可能性与两种原因的"贡献"大小有关.用概率表达它们可能性之间的关系,即全概率公式

$$P(B) = P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A}).$$

代入数据计算得

$$P(B) = 0.6 \times 0.8 + 0.4 \times 0.1 = 0.52.$$

不难看出,全概率公式为我们提供了解决概率问题的一种思维方法.这就是把复杂事件 $B$ 分解为一些互斥事件的和事件,而这些互斥事件是一些简单事件,然后综合运用加法公式和乘法公式,计算出复杂事件 $B$ 的概率.

问题(2) 是由结果求原因.已知结果 $B$,求它是原因 $A$ 引起的可能性有多大,即求 $P(A \mid B)$.使用贝叶斯公式,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A})} = \frac{0.48}{0.52} = \frac{12}{13}.$$

由于该结果的发生只可能由两种原因引起,且它们是互逆的,故

$$P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B) = 1 - \frac{12}{13} = \frac{1}{13}.$$

可见,当收报台收到信号"•"时,发报台发出的信号是"•"的可能性比发报台发出的信号是"—"的可能性要大得多.

贝叶斯公式在实际中有很多应用,它可以帮助人们确定某结果(事件 $B$)发生的最可能原因.

## 三、古典概型中的概率计算

古典概型中的概率计算问题大致可分为四类:摸球问题,分球入箱问题,随机取数问题,分组分配问题.

(一) 摸球问题举例

**【例 4】**　袋中有 $a$ 个红球,$b$ 个黑球.每次从袋中任取一个球,取出的球不再放回去.接连取 $k(k \leqslant a+b)$ 个球,求第 $k$ 次取到红球的概率.

这是一古典概型,由于考虑到取球的顺序,试验所有可能的结果数等于从 $a+b$ 个球中任取 $k$ 个球的全排列数

$$\mathrm{P}_{a+b}^{k} = \frac{(a+b)!}{(a+b-k)!}.$$

设事件 $A$ 表示"第 $k$ 次取得红球",事件 $A$ 包含的结果数为

$$\mathrm{C}_a^1 \mathrm{P}_{a+b-1}^{k-1} = a \cdot \frac{(a+b-1)!}{(a+b-k)!},$$

于是

$$P(A) = \frac{\mathrm{C}_a^1 \mathrm{P}_{a+b-1}^{k-1}}{\mathrm{P}_{a+b}^{k}} = \frac{a}{a+b}.$$

或者更简单地,不妨想象把 $a+b$ 个球一个一个都取出来,按顺序排列,所求的就是第 $k$ 个球是红球的概率. 同样可以得到

$$P(A) = \frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b}.$$

注意,这里的球可以换成产品,"红球"、"黑球"可以换成"合格品"、"不合格品";或者,把球换成物品,"红球"、"黑球"换成"甲物"、"乙物"等.这就是摸球问题的典型意义.

摸球问题还有其他类型,如取出的球不考虑顺序,球取出后放回再取下一个等等,这里不再赘述.

分球入箱问题中的"球"和"箱"也是将实际问题中的研究对象抽象而成的一种简单对象.在研究旅馆住宿安排的概率问题中,球代表人,箱子代表旅馆的房间;在研究 $n$ 个人的生日的概率问题中,球代表人,箱子代表一年中的某一天.如果把分球入箱问题中的有关概率计算搞清楚了,实际中各种类似问题的概率计算也就迎刃而解.

(二) 随机取数问题举例

**【例 5】**　从 1,2, …,10 共 10 个数字中任取一个,假定每个数字都以 1/10 的概率被取中,取后还原.先后取出 7 个数字,求下列各事件的概率:

(1) $A_1 = \{$7 个数字全不相同$\}$;　　(2) $A_2 = \{$不含 10 与 1$\}$;

(3) $A_3 = \{$10 恰好出现 2 次$\}$;　　(4) $A_4 = \{$10 至少出现 2 次$\}$.

**解**　从 10 个数字中随机取 7 个数字(有放回),共有 $10^7$ 种可能取法,也即样本空间的样