教育部推荐教材 ● 21世纪高职高专系列规划教材

线性代数

主 编 高克权

21SHIJI GAOZHI GAOZHUAN XILIE GUIHUA JIAOCAI

XIANXING DAISHU

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

教育部推荐教材

21世纪高职高专系列规划教材

线性代数

主　编　高克权

参　编　李小申　封平华

胡正波　许丽萍

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数／高克权主编.—北京：北京师范大学出版社，2009.8

ISBN 978-7-303-10061-3

Ⅰ.线… Ⅱ.高… Ⅲ.线性代数－高等学校－教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第123948号

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875

印　刷：北京京师印务有限公司
装　订：三河万利装订厂
经　销：全国新华书店
开　本：170 mm × 230 mm
印　张：8.5
字　数：132千字
版　次：2009年8月第1版
印　次：2009年8月第1次印刷
定　价：14.00元

策划编辑：周光明　　责任编辑：周光明
美术编辑：李葆芬　　装帧设计：李葆芬
责任校对：李　菡　　责任印制：马鸿麟

出版说明

随着我国经济建设的发展，社会对技术型应用人才的需求日趋紧迫，这也促进了我国职业教育的迅猛发展，我国职业教育已经进入了平稳、持续、有序的发展阶段。为了适应社会对技术型应用人才的需求和职业教育的发展，教育部对职业教育进行了卓有成效的改革，职业教育与成人教育司、高等教育司分别颁布了调整后的中等职业教育、高等职业教育专业设置目录，为职业院校专业设置提供了依据。教育部连同其他五部委共同确定数控技术应用、计算机应用与软件技术、汽车运用与维修、护理为紧缺人才培养专业，选择了上千家高职、中职学校和企业作为示范培养单位，拨出专款进行扶持，力争培养一批具有较高实践能力的紧缺人才。

职业教育的快速发展，也为职业教材的出版发行迎来了新的春天和新的挑战。教材出版发行为职业教育的发展服务，必须体现新的理念、新的要求，进行必要的改革。为此，在教育部高等教育司、职业教育与成人教育司、北京师范大学等的大力支持下，北京师范大学出版社在全国范围内筹建了“全国职业教育教材改革与出版领导小组”，集全国各地上百位专家、教授于一体，对中等高等职业院校的文化基础课、专业基础课、专业课教材的改革与出版工作进行深入的研究与指导。2004 年 8 月，“全国职业教育教材改革与出版领导小组”召开了“全国有特色高职教材改革研讨会”，来自全国 20 多个省、市、区的近百位高职院校的院校长、系主任、教研室主任和一线骨干教师参加了此次会议。围绕如何编写出版好适应新形势发展的高等职业教育教材，与会代表进行了热烈的研讨，为新一轮教材的出版献计献策。这次会议共组织高职教材 50 余种，包括文化基础课、电工电子、数控、计算机教材。2005 年～2006 年期间，“全国职业教育教材改革与出版领导小组”先后在昆明、

哈尔滨、天津召开高职高专教材研讨会，对当前高职高专教材的改革与发展、高职院校教学、师资培养等进行了深入的探讨，同时推出了一批公共素质教育、商贸、财会、旅游类高职教材。这些教材的特点如下。

1. 紧紧围绕教育改革，适应新的教学要求。过渡时期具有新的教学要求，这批教材是在教育部的指导下，针对过渡时期教学的特点，以3年制为基础，兼顾2年制，以“实用、够用”为度，淡化理论，注重实践，消减过时、用不上的知识，内容体系更趋合理。

2. 教材配套齐全。将逐步完善各类专业课、专业基础课、文化基础课教材，所出版的教材都配有电子教案，部分教材配有电子课件和实验、习题指导。

3. 教材编写力求语言通俗简练，讲解深入浅出，使学生在理解的基础上学习，不囫囵吞枣，死记硬背。

4. 教材配有大量的例题、习题、实训，通过例题讲解、习题练习、实验实训，加强学生对理论的理解以及动手能力的培养。

5. 反映行业新的发展，教材编写注重吸收新知识、新技术、新工艺。

北京师范大学出版社是教育部职业教育教材出版基地之一，有着近20年的职业教材出版历史，具有丰富的编辑出版经验。这批高职教材的编写得到了教育部相关部门的大力支持，部分教材通过教育部审核，被列入职业教育与成人教育司高职推荐教材，并有25种教材列为“十一五”国家级规划教材。我们还将开发电子信息类的通信、机电、电气、计算机、工商管理等专业教材，希望广大师生积极选用。

教材建设是一项任重道远的工作，需要教师、专家、学校、出版社、教育行政部门的共同努力才能逐步获得发展。我们衷心希望更多的学校、更多的专家加入到我们的教材改革出版工作中来，北京师范大学出版社职业教育与教师教育分社全体人员也将备加努力，为职业教育的改革与发展服务。

全国职业教育教材改革与出版领导小组
北京师范大学出版社

参加教材编写的单位名单

（排名不分先后）

沈阳工程学院
山东劳动职业技术学院
济宁职业技术学院
辽宁省交通高等专科学校
浙江机电职业技术学院
杭州职业技术学院
西安科技大学电子信息学院
西安科技大学通信学院
西安科技大学机械学院
天津渤海职业技术学院
天津渤海集团公司教育中心
连云港职业技术学院
景德镇高等专科学校
徐州工业职业技术学院
广州科技贸易职业学院
江西信息应用职业技术学院
浙江商业职业技术学院
内蒙古电子信息职业技术学院
济源职业技术学院
河南科技学院
苏州经贸职业技术学院
苏州技师学院
苏州工业园区职业技术学院
苏州江南赛特数控设备有限公司
苏州机械技工学院
浙江工商职业技术学院
温州大学
四川工商职业技术学院
常州轻工职业技术学院
河北工业职业技术学院
陕西纺织服装职业技术学院
唐山学院
江西现代职业技术学院
江西生物科技职业学院
黄冈高级技工学校
深圳高级技工学校
徐州技师学院
天津理工大学中环信息学院
天津机械职工技术学院
西安工程大学
青岛船舶学院
河北中信联信息技术有限公司
张家港职教中心
太原理工大学轻纺学院
浙江交通职业技术学院
保定职业技术学院
绵阳职业技术学院
北岳职业技术学院
天津职业大学
石家庄信息工程职业学院
襄樊职业技术学院
九江职业技术学院

青岛远洋船员学院
无锡科技职业学院
广东白云职业技术学院
三峡大学职业技术学院
西安欧亚学院实验中心
天津机电职业技术学院
中华女子学院山东分院
漯河职业技术学院
济南市高级技工学校
沈阳职业技术学院
江西新余高等专科学校
赣南师范学院
江西交通职业技术学院
河北农业大学城建学院
华北电力大学
北京工业职业技术学院
湖北职业技术学院
河北化工医药职业技术学院
天津电子信息职业技术学院
广东松山职业技术学院
北京师范大学
山西大学工程学院
平顶山工学院
黄石理工学院
广东岭南职业技术学院
青岛港湾职业技术学院
郑州铁路职业技术学院
北京电子科技职业学院
北京农业职业技术学院
宁波职业技术学院
宁波工程学院
北京化工大学成教学院
天津交通职业技术学院
济南电子机械工程学院
山东职业技术学院
济南职业技术学院
山东省经济管理干部学院
鲁东大学
山东财政学院
山东省农业管理干部学院
浙江工贸职业技术学院
天津中德职业技术学院
天津现代职业技术学院
天津青年职业技术学院
无锡南洋学院
北京城市学院
北京经济技术职业学院
北京联合大学
北京信息职业技术学院
北京财贸职业学院
华北科技学院
青岛科技大学技术专修学院
山东大王职业学院
大红鹰职业技术学院
广东华立学院
广西工贸职业技术学院
贵州商业高等专科学院
桂林旅游职业技术学院
河北司法警官职业学院
黑龙江省教科院
湖北财经高等专科学院
华东师范大学职成教所
淮南职业技术学院
淮阴工学院

黄河水利职业技术学院
南京工业职业技术学院
南京铁道职业技术学院
黔南民族职业技术学院
青岛职业技术学院
陕西财经职业技术学院
陕西职业技术学院
深圳信息职业技术学院
深圳职业技术学院
石家庄职业技术学院
四川建筑职业技术学院
四川职业技术学院
太原旅游职业技术学院
泰山职业技术学院
温州职业技术学院
无锡商业职业技术学院
武汉商业服务学院
杨凌职业技术学院
浙江工贸职业技术学院
郑州旅游职业技术学院
淄博职业技术学院
云南机电职业技术学院
山东省贸易职工大学
聊城职业技术学院
山东司法警官职业学院
河南质量工程职业学院
山东科技大学职业技术学院
云南林业职业技术学院
云南国防工业职业技术学院
云南文化艺术职业学院
云南农业职业技术学院
云南能源职业技术学院
云南交通职业技术学院
云南司法警官职业学院
云南热带作物职业技术学院
西双版纳职业技术学院
玉溪农业职业技术学院
云南科技信息职业学院
昆明艺术职业学院
云南经济管理职业学院
云南爱因森软件职业学院
云南农业大学
云南师范大学
昆明大学
陕西安康师范学院
云南水利水电学校
昆明工业职业技术学院
云南财税学院
云南大学高职学院
山西综合职业技术学院
温州科技职业技术学院
昆明广播电视大学
天津职教中心
天津工程职业技术学院
天狮职业技术学院
天津师范大学
天津管理干部学院
天津滨海职业技术学院
天津铁道职业技术学院
天津音乐学院
天津石油职业技术学院
渤海石油职业技术学院
天津冶金职业技术学院
天津城市职业学院

常州机电职业技术学院
天津公安警官职业技术学院
武警昆明指挥学院
天津工业大学
天津开发区职业技术学院
黑龙江大兴安岭职业学院
黑龙江农业经济职业技术学院
黑龙江农业工程职业技术学院
黑龙江农业职业技术学院
黑龙江生物科技职业技术学院
黑龙江旅游职业技术学院
中国民航飞行学院
四川信息职业技术学院
四川航天职业技术学院
四川成都纺织高等专科学校
四川科技职业学院
四川乐山职业技术学院
四川泸州职业技术学院
成都农业科技职业技术学院
四川宜宾职业技术学院
江西省委党校

齐齐哈尔职业学院
深圳安泰信电子有限公司
潍坊教育学院
德州科技职业技术学院
天一学院
成都烹饪高等专科学校
河南质量工程职业技术学院
河南商业高等专科学校
天津大学
北京政法干部管理学院
北京理工大学珠海学院
中山火炬职业技术学院
周口职业技术学院
永城职业技术学院
河北工程技术高等专科学校
武汉铁路职业技术学院
四川教育学院
四川师范大学
四川工程职业技术学院
河南教育学院
华豫学院

前　言

作为大学数学基础课程的线性代数，是中学代数的继续和提高，要注意到它与中学代数有着很大的不同，这种不同不仅表现在内容的深度上，更重要的是表现在观点和方法上，在学习这门课程时，要熟悉其基本概念、基本理论和基本方法，并在抽象思维、逻辑推理等方面得到一些训练，这一点读者在学习过程中要逐渐体会.

本书主要介绍线性代数的一些基本知识，共分六章．第一章介绍行列式的概念、性质与计算方法，注意到了与中学教学内容的衔接，简单介绍了二阶和三阶行列式，需要一提的是，本书将克莱姆（Cramer）法则放在了第二章与矩阵的逆一起做了简单介绍．第二章首先给出了少量关于矩阵及其运算的实际背景的内容，引入矩阵这一十分有用的工具，介绍了矩阵的概念与运算，并在讨论矩阵的逆时轻而易举地得出克莱姆法则，提高矩阵运算能力和利用矩阵方法解决实际问题的能力在本章和后面各章中得到充分体现．第三章引入了矩阵的初等变换和秩的概念，借此进一步解决计算矩阵的逆和确定矩阵的秩的问题．第四章以矩阵为工具，用读者容易理解的方法得出线性方程组有解的充分必要条件并解决了线性方程组求解的问题．第五章借助于矩阵和线性方程组的理论，主要讨论向量组的线性相关性这一抽象的不易理解的内容，并进一步讨论了线性方程组解的结构．第六章内容是相似矩阵与二次型，简要介绍了矩阵特征值理论与实二次型的理论．读者只要有初等数学的基础知识就可阅读本书，学习完本书内容，可为读者学习后继课程及进一步扩大知识面奠定必要的数学基础.

我们曾在各类专业和班级中不止一次地使用过这本书的原稿，这次在内容的编写上，我们力求做到由浅入深，深入浅出，化难为易，前后呼应，对一些比较困难的概念，表述尽可能通俗，尽量多举例子，并且体现了适用性，以基本够用为度控制篇幅内容，对一些复杂的证明不作高的要求，读者只需记住结论、弄清含义、会用就可以了．各章都配有不少习题可供选用，书末附有习题答案，读者在练习时要注意先自己独立思考，让这些题型在大脑中不断的加工、体会，形成自己对这类题型的理解，如果遇到困难，再参看答案.

本书第一章由李小申老师编写，第二、五章由河南教育学院封平华老师

编写，第三章由华豫学院胡正波老师编写，第四章由许丽萍老师编写，第六章由高克权编写，李小申编写了全部习题解答，全书由高克权统稿. 本书在编写过程中参考了一些相关的教材并从中选用了部分例题和习题，在教学过程中得到了各位老师们的关心和支持，在此一并表示感谢!

希望得到同行与读者对本书的建议和指正.

编　者

2008 年 12 月

目录

Contents

第一章　行列式

行列式是许多学科和生产实践中有广泛应用的一个有力工具，本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法.

§1　行列式的定义

一、二阶行列式和三阶行列式

由 4 个数 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 构成两行两列，并在左右两边各加一条竖线，规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

我们称之为二阶行列式，其中 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 称为这个二阶行列式的元素，横排称为行，竖排称为列，从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线，从右上角到左下角的对角线称为行列式的次对角线.

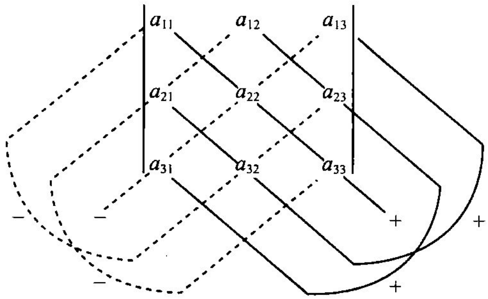
也就是说，二阶行列式由两行两列共 4 个元素构成，其右端为二阶行列式的展开式，是由左端主对角线元素相乘取正、次对角线元素相乘取负构成的表示式，或者说，二阶行列式是由这样的对角线方法确定的一个数.

类似的，引入记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，也用对角线方法，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

我们称之为三阶行列式.

三阶行列式是由三行三列共 9 个元素构成的，它的展开式中有 6 个乘积项，每个乘积项由来自不同行、不同列的三个元素相乘得到，且带正号和负号的项各一半，可用下图表示：



例 1 计算下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

解：(1) $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (-3)\times 2 - 4\times(-2) = 2$；

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 6 + 0 - 4 - 0 - 45 = -37$.

二、*n* 阶行列式

由 n^2 个数组成 n 行 n 列，并在左右两边各加一竖线，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称之为 n 阶行列式.

我们知道，二阶行列式、三阶行列式可用对角线方法来进行，但是，对于四阶行列式及四阶以上行列式，对角线法不适用，需要采用另外的方法给出定义.

为此，我们先引入余子式和代数余子式的概念：

定义 1 在 D 中把元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列划去后留下的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}，并称 $(-1)^{i+j}M_{ij} = A_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式.

例如，在以下四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1 & -2 & 4\\ 3 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 5 & 1\end{vmatrix}$$

中，元素 $a_{32}=-1$ 的余子式为

$$M_{32}=\begin{vmatrix}2 & -2 & 4\\ 3 & 1 & 1\\ 2 & 5 & 1\end{vmatrix}=2-4+60-8+6-10=46$$

代数余子式为

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & -2 & 4\\ 3 & 1 & 1\\ 2 & 5 & 1\end{vmatrix}=-46.$$

为了统一起见，我们从一阶行列式开始探讨：

当 $n=1$ 时，规定一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$，注意等号左端不是绝对值符号，而是行列式符号.

当 $n=2$ 时，定义二阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}$$

其中 A_{11},A_{12} 为元素 a_{11},a_{12} 的代数余子式.

当 $n=3$ 时，定义三阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

其中 A_{11},A_{12},A_{13} 为元素 a_{11},a_{12},a_{13} 的代数余子式.

可见，现在的定义与前面所述对角线法得到的结果完全相同.

在此基础上可以用此展开法定义四阶行列式，以此类推，假设已定义了 $n-1$ 阶行列式，则将 D 按第一行展开，我们定义 n 阶行列式为

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

其中，A_{1j} 为 a_{1j} $(j=1,2,\cdots,n)$ 的代数余子式 .

例 2 计算下列四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&1&-2&4\\3&0&1&1\\0&-1&2&3\\2&0&5&1\end{vmatrix}$$

解：由以上所述定义，将 D 按第一行展开，有

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}$$

$$=2\cdot\begin{vmatrix}0&1&1\\-1&2&3\\0&5&1\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&1&1\\0&2&3\\2&5&1\end{vmatrix}+(-2)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&0&1\\0&-1&3\\2&0&1\end{vmatrix}+$$

$$4\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}3&0&1\\0&-1&2\\2&0&5\end{vmatrix}$$

$$=-8+37+2+52=83.$$

实际上，行列式可以按任一行展开，即可用任一行的展开式来定义 n 阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},(i=1,2,\cdots,n)$$

下面我们还可以看到，行列式可以用任一列展开.

§2　行列式的性质与计算

先介绍转置行列式的概念：

把行列式 D 中的行与列依次互换后，得到的新行列式，我们称之为 D 的转置行列式，记为 D^{T}（或 D'），即

设 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$，则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$.

显然 D 也是 D^{T} 的转置行列式.

性质 1　行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 的值相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 1 表明，在行列式中，行和列的地位是对称的，也就是说，凡是对行成立的性质，对列也同样成立.

我们也可以用任一列的展开式来定义 n 阶行列式，即有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},(j=1,2,\cdots,n)$$

这样一来，在利用定义计算行列式时，如果该行列式的某一行(或列)元素中零元素较多，可以按该行(或列)展开，计算会简单些.

例 1　计算下列四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

解：第二列零元素较多，我们按第二列展开，有

$$\begin{aligned} D&=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}+a_{42}A_{42} \\ &=1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}+0+(-1)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}+0 \\ &=37+46=83. \end{aligned}$$

有时会遇到某些特殊的行列式，而当阶数较高时，利用性质把阶数较高的行列式化为阶数较低的行列式再求值的方法，即所谓的“降阶法”，也是一种常用的方法.

例 2　计算下列各 n 阶行列式：

(1)对角形行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

(2)上三角形行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

(3)下三角形行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$