

高等学校交流讲义

高等代数

GAODENG DAISHU

南京大学数学系編

人民教育出版社

高等学校交流讲义



高等代数

GAODENG DAISHU

南京大学数学系編

人民教育出版社

本书是南京大学数学系编写的。全书内容有行列式、线性方程组的理论和数值解法、线性规划、一元多项式的可除性理论和实根的数值解法、线性空间和线性变换、矩阵的若当法式和 λ -矩阵、特征值的数值解法、特征值解法以及二次齐式、欧氏空间和酉空间等。

本书可作综合大学、高等师范学校数学各专业高等代数课程的教材，也可供高等工业学校相关专业选用。

高 等 代 数

南京大学数学系编

北京市书刊出版业营业许可出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号K13010·943 开本 850×1168 $\frac{1}{32}$ 印张 9 $\frac{1}{16}$

字数 225,000 印数 23,000—58,000 定价(8) 0.90

1961年6月第1版 1962年4月北京第3次印刷

序 言

高等代数是綜合性大学与高等师范学校数学专业的一門基础課程。学生在学习了这門課程以后，一方面應該有足够的代数知識来学习有关的数学課程以及某些專門化課程，另一方面也應該掌握足够的代数方法来解决在工农业生产中遇到的实际問題。本书就是为了滿足高等学校教材上的需要，并适应上述两方面的要求而編写的。

这本书大体上可以分为两个部分，第一部分是第一、二、三章，内容是以解方程及其应用为中心。在这三章中，我們先从綫性方程組的理論开始，然后，作为綫性方程中的应用，討論了綫性规划。由于我們是从綫性方程的角度来討論綫性规划的，所以沒有罗列三年来国内数学工作者所发现的許多解綫性规划的方法。事实上，限于篇幅，我們不但不可能这样作，而且也不必要这样作，因为学生有了这些理論知識以后，他們已經可以有足够的能力来研究綫性规划的許多方法了。

第三章是以解高次方程为中心的，在这里，我們不但注意了一元高次方程，也相应地注意了多元高次方程的解法。

后面的三章基本上是以矩陣論为中心来討論綫性方程的内容的。在第四章討論了綫性空間与綫性变換的理論以后，接下去第五章就討論若当法式的理論及其求法。二次齐式的理論也是很重要的，因此在第六章中着重討論了实二次式在滿秩变換以及正交变換下的标准式。

在本书中除了对高等代数的基本理論予以相当重視外，还介紹了一些在解决实际問題中常用的数值解法。

这本书基本上是去年短期内集体編成的，經過試用后做了一些修改。最近一次修改时，承北京大学段学复同志、聶灵召同志，吉林大学王湘浩同志、謝邦杰同志，四川大学柯召同志，北京师范大学王世强同志等提供了不少有益的意見。編者在此謹致謝意。

限于我們的水平，书中謬誤之处在所难免。此外，在內容取舍及編排上，也会有考慮欠周之处。因此，非常希望同志們多提批評和建議，使我們能够通过大家的帮助，来把这本教材修改得更加完善。

南京大学数学系

目 录

序 言

第一章 行列式与綫性方程組

§ 1. 行列式	1
1.1 行列式的定义(3)	
1.2 行列式的子式·代数余子式(8)	
1.3 行列式的性质(11)	
1.4 克萊滿法則(23)	
1.5 行列式的保值变换与两条有关的定理(26)	
§ 2. 向量和矩陣	31
2.1 向量及其基本运算(31)	
2.2 綫性相关与綫性組合(32)	
2.3 向量空間与子空間(36)	
2.4 矩陣和它的秩(43)	
2.5 矩陣的初等变换(46)	
2.6 矩陣代数(51)	
2.7 方陣的乘法和逆方陣(53)	
§ 3. 綫性方陣組	59
3.1 非齐次方程組(59)	
3.2 消去法(62)	
3.3 齐次方程組(68)	
§ 4. 綫性方程組的数值解法	72
4.1 高斯主元素法(73)	
4.2 高斯紧凑方案(77)	
4.3 逆矩陣的求法(81)	
4.4 若当方案(82)	

第二章 綫性规划

§ 1. 問題的提出	85
§ 2. 表上作业法	89
2.1 閉迴路的理論(91)	
2.2 檢驗数(95)	
2.3 独立与非独立未知数的互換(99)	
2.4 表上作业法的具体步驟(101)	
2.5 产銷不平衡的情形(107)	
§ 3. 图上作业法	108
§ 4. 一般綫性规划問題	115
4.1 一般綫性规划問題的标准化的(115)	
4.2 凸集法(117)	
4.3 迭代法(121)	

第三章 方程式論

§ 1. 多項式的因式与倍式	128
1.1 数域与数环(128)	
1.2 多項式的概念(129)	
1.3 多項式的运算及	

其性質(130)	1.4 最高公因式(132)	1.5 多項式分解为不可約因式的积(136)	
§2. 方程的一般性質			138
2.1 方程的根(多項式的零点)(138)	2.2 重根及其求法(139)	2.3 方程的变形(140)	2.4 根与系数的关系(142)
§3. 实数域上的多項式			143
3.1 实系数多項式(143)	3.2 实根計算的預备知識(144)	3.3 实根的界(147)	3.4 实根的近似計算(155)
	3.5 林士錫-赵訪熊法(162)	3.6 罗伯契夫斯基法(165)	
§4. 高次联立方程組			171
4.1 結式(171)	4.2 用消去法解联立方程組(176)	4.3 解高次方程組的牛頓法(178)	

第四章 綫性空間与綫性变换

§1. 綫性空間			182
1.1 綫性空間的概念(182)	1.2 維数与底(185)	1.3 子空間(188)	1.4 子空間的交与和(189)
	1.5 綫性空間的同构(193)		
§2. 綫性变换及其矩陣			195
2.1 綫性变换及其运算(195)	2.2 綫性变换的矩陣表示式(198)	2.3 群的概念(203)	2.4 相似矩陣(205)
	2.5 不变子空間(209)		
§3. 特征多項式与最小多項式			211
3.1 綫性变换的多項式与最小多項式(211)	3.2 特征多項式及特征向量(214)	3.3 哈密頓-凱萊定理(218)	

第五章 若当法式

§1. 多項式矩陣			222
1.1 多項式矩陣及其初等变换(222)	1.2 初等因式与不变因式(224)		
§2. 若当法式及其求法			230
2.1 矩陣多項式的除法(231)	2.2 矩陣的若当法式(234)		
§3. 特征根的近似計算			237
3.1 但尼列夫斯基(238)	3.2 絕對值最大的特征根的求法(244)	3.3 克雷洛夫法(247)	

第六章 二次齐式与欧几里德空間

§1. 实二次齐式在滿秩綫性变换下的标准式			252
1.1 二次齐式及其矩陣表达式(252)	1.2 化二次齐式为标准式(254)	1.3 慣性定理(257)	1.4 有定二次齐式(259)

§ 2. 欧几里德空間与酉空間.....	262
2.1 欧氏空間的定义和例子(263)	
2.2 向量的模和夹角(264)	
2.3 正交性(268)	
2.4 正交补空間与綫性方程組可解的几何意义(272)	
2.5 欧氏空間的同构(275)	
2.6 酉空間(276)	
§ 3. 正交变换群和酉变换群.....	278
3.1 正交变换的概念(278)	
3.2 正交变换的特性(279)	
3.3 正交方陣(280)	
3.4 正交变换的几何意义(281)	
3.5 酉变换与酉矩陣(282)	
§ 4. 实二次齐式在正交变换下的标准式.....	284
4.1 化二次齐式为标准式的正交变换的存在性(284)	
4.2 正交变换的实际求法(288)	
4.3 二次曲面在正交变换下的标准式(292)	
4.4 同时化簡一对二次齐式(294)	
4.5 額尔密特二次齐式(296)	

第一章 行列式与綫性方程組

§ 1. 行列式

我們在中学里已經知道怎样解两个未知数的一次方程組(今后改称綫性方程組, 因为每一个一次方程在平面上代表一条直綫):

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \quad (1)$$

例如可以用消去法消去变数 y 或 x 而得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

如果 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 則(1)的解可以写成

$$x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad y = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad (2)$$

而且这組解是唯一的。

再看由具有三个未知数的三个綫性方程所組成的方程組:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3; \end{cases} \quad (3)$$

在后面两个方程中, 暂时把 x_1 看成常数, 利用公式(2), 从它們解出未知数 x_2 与 x_3 , 再代入前面一个方程, 即得一个仅含未知数 x_1 的方程。解这个方程便得到 x_1 的表达式:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}. \quad (4)$$

容易看出这个表达式的結構。只要将分母中属于所要确定的

未知数 x_1 的所有系数 a_{i1} ($i=1, 2, 3$) 分别换为常数项 b_i , 便得分子。这样, 只要研究分母的组成规律便可以了。

假定 a_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) 是任意的九个数, 把这九个数排成一个正方形, 规定 a_{ij} 放在第 i 行第 j 列的位置, 再用两条直线段括起来, 就得到一个三阶行列式, 这九个数 a_{ij} 叫做行列式的元素。我们规定这个行列式的值为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \quad (5)$$

那末在上式右边不等于零的情况, (4)就可写成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

同理可得:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

本节的目的是要引伸三阶行列式的概念, 使得上面所述的规律不但能用于解三个未知数的线性方程组, 而且也能用于解任意 n 个未知数的线性方程组。

1.1 行列式的定义 现在研究三阶行列式的表达式 (5) 的结构。首先看出 (5) 中每一项是从每行每列 (横排叫行, 纵排叫列) 各取出一个元素所组成的乘积, 但任何一行和任何一列不会有二个元素出现在同一项内。换言之, 每一个乘积都有下面的形式:

$$a_{1s_1}a_{2s_2}a_{3s_3}, \quad (6)$$

其中 s_1, s_2, s_3 是 1, 2, 3 的某种排列。(5) 式的右边总共有六项, 而 s_1, s_2, s_3 把 1, 2, 3 的一切可能的排列 (共有以下 $3! = 6$ 种):

$$1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2; \quad (7_1)$$

$$1, 3, 2; 2, 1, 3; 3, 2, 1. \quad (7_2)$$

全都取到了。我们又发现, 乘积 (6) 的第二行附标形成排列 (7₁) 之一时, 相应的项带正号; 而那些乘积的第二个附标形成排列 (7₂) 之一时, 相应的项带负号。

我们来说明排列 (7₁) 与 (7₂) 的区别。假定 s_1, s_2, s_3 是 1, 2, 3 这些数的任一种排列 (因此, 在 $i \neq j$ 时 $s_i \neq s_j$), 如果当 $i < j$ 时 $s_i > s_j$, 就说 s_i, s_j 构成一个反序。再用 $[s_1, s_2, s_3]$ 表示此排列中总共的反序数, 其定义为

$$[s_1, s_2, s_3] = (s_1 \text{ 后面小于 } s_1 \text{ 的数码的个数}) + \\ + (s_2 \text{ 后面小于 } s_2 \text{ 的数码的个数}),$$

容易看出, (7₁) 中的排列各有偶数个反序 (0 算作偶数!), 而 (7₂) 中的排列各有奇数个反序, 于是 (5) 可缩写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(s_1, s_2, s_3)} (-1)^{[s_1, s_2, s_3]} a_{1s_1} a_{2s_2} a_{3s_3},$$

这里 s_1, s_2, s_3 表示数码 1, 2, 3 的一种排列, $\sum_{(s_1, s_2, s_3)}$ 表示对 1,

2, 3 的一切可能的排列求和。

发现这些规律后, 便很容易将三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式。仿照上面的办法, 假定 $s_1, s_2, \dots, s_n$ 是 1, 2, $\dots$, n 这 n 个数的任一种排列, 它的反序个数定义为

$$\begin{aligned} [s_1, s_2, \dots, s_n] = & (s_1 \text{ 后面比 } s_1 \text{ 小的数码的个数}) \\ & + (s_2 \text{ 后面比 } s_2 \text{ 小的数码的个数}) \\ & + \dots \dots \dots \\ & + (s_{n-1} \text{ 后面比 } s_{n-1} \text{ 小的数码的个数}). \end{aligned}$$

定义 1 若排列 $s_1, \dots, s_n$ 总共有奇数个反序, 则它叫做一个奇排列, 否则叫偶排列。

定理 1 在 n 个数码 1, 2, $\dots$, n 的 $n!$ 个排列中, 有一半是偶排列, 另一半是奇排列。

証 设在 1, 2, $\dots$, n 的 $n!$ 个排列中, 有 a 个奇排列, b 个偶排列, 当然, $a+b=n!$, 若 $s_1, s_2, \dots, s_n$ 是一个奇排列, 把最前面两个数码 s_1, s_2 的位置交换一下, 则当 $s_1 > s_2$ 时

$$[s_2, s_1, s_3, \dots, s_n] = [s_1, s_2, s_3, \dots, s_n] - 1.$$

而于 $s_1 < s_2$ 时

$$[s_2, s_1, s_3, \dots, s_n] = [s_1, s_2, s_3, \dots, s_n] + 1.$$

按这样的方式从 a 个奇排列便可得到 a 个偶排列, 并且由两个不同的奇排列所得到的两个偶排列也不相同, 于是 $a \leq b$ 。同法可以证明 $b \leq a$, 所以 $a=b$ 。

现在可以给行列式下定义了:

定义 2 假定 a_{ij} ($i, j=1, 2, 3, \dots, n$) 是任意 n^2 个数, 把这 n^2 个数排成一个正方形, 规定 a_{ij} 放在第 i 行第 j 列的位置, 再用两条直线段括起来就得到一个 n 阶行列式, 它的值定义为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(s_1, s_2, \dots, s_n)} (-1)^{[s_1, \dots, s_n]} a_{1s_1} a_{2s_2} \cdots a_{ns_n}, \quad (8)$$

这里 $s_1, s_2, \dots, s_n$ 是数码 $1, 2, \dots, n$ 的一种排列, $\sum_{(s_1, \dots, s_n)}$ 表示对 $1, 2, \dots, n$ 的一切可能的排列求和。

式(8)的右边称为 D 的展开式, 根据定理 1, 此展开式内有 $\frac{n!}{2}$ 项前面取正号, 另 $\frac{n!}{2}$ 项前面取负号。行列式 D 中的 a_{ij} 称为 D 的元素(或简称元), 有时为简便计, 我们用符号 $|a_{ij}|$ 来表示这个行列式, 但读者应该特别注意, 不要与绝对值的符号弄混了。

根据行列式的定义, 可以证明, 将行列式 D 的行与列依次互换, 所得的新行列式 D' 与 D 具有相同的展式, 因而 $D' = D$ 。这个 D' 称为 D 的转置行列式。我们有

定理 2

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D.$$

証 由定义

$$D = \sum_{(s_1, \dots, s_n)} (-1)^{[s_1, \dots, s_n]} a_{1s_1} a_{2s_2} \cdots a_{ns_n}; \quad (8)$$

$$D' = \sum_{(t_1, \dots, t_n)} (-1)^{[t_1, \dots, t_n]} a_{t_1 1} a_{t_2 2} \cdots a_{t_n n}. \quad (9)$$

现在把(9)式右边的一般项 $a_{t_1 1} a_{t_2 2} \cdots a_{t_n n}$ 改写成 $a_{1r_1} a_{2r_2} \cdots a_{nr_n}$, 这只要改变其中各因子的顺序就够了。如果 $t_i = 1$, 我们就把 $a_{i i}$ 依次移到最前面, 使成为 a_{1r_1} (于是 $r_1 = i$)。这时, 第一行附标的反序个数由

$$[t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots, t_n]$$

变为 $[t_i, t_1, \dots, t_{i-2}, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n],$

因而反序减少了 $i-1$ 个, 同时第二个附标的排列由

$1, 2, \dots, i-1, i, i+1, \dots, n$ 变为 $i, 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n,$

于是反序增加了 $i-1$ 个, 恰好等于刚才第一个附标所减少的个数。再把

$$a_{1r_1} \cdots a_{t_n n}$$

内的 a_{2r_1} 移到第二位, a_{3r_1} 移到第三位, $\dots$, 也有同样的结果; 因此, 把 $a_{t_{11}} a_{t_{12}} \cdots a_{t_{nn}}$ 重排为 $a_{1r_1} a_{2r_2} \cdots a_{nr_n}$ 时, 第二个附标排列的反序个数增加的值等于第一个附标排列的反序个数减少的值, 但第一个附标是由排列 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 改排成 $1, 2, \dots, n$; 而第二个附标是由排列 $1, 2, \dots, n$ 改排成 $r_1, r_2, \dots, r_n$; 所以

$$[t_1, t_2, \dots, t_n] = [r_1, r_2, \dots, r_n].$$

当然 $r_1, r_2, \dots, r_n$ 也是 $1, 2, \dots, n$ 的一种排列。容易看出式 (9) 右方的两个不同的项 $a_{t_{11}} \cdots a_{t_{nn}}$ 和 $a_{t'_{11}} \cdots a_{t'_{nn}}$ 不会变成同一个 $a_{1r_1} \cdots a_{nr_n}$ 。因此当 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 取 $1, 2, \dots, n$ 的一切可能的排列时, 相应地也就使 $r_1, r_2, \dots, r_n$ 取 n 个数码的一切可能排列, 于是

$$\begin{aligned} D' &= \sum_{(t_1, \dots, t_n)} (-1)^{[t_1, \dots, t_n]} a_{t_{11}} \cdots a_{t_{nn}} = \\ &= \sum_{(r_1, \dots, r_n)} (-1)^{[r_1, \dots, r_n]} a_{1r_1} \cdots a_{nr_n} = D. \end{aligned}$$

有了这条定理, 就一个行列式的值而言, 行和列处在同等的地位, 对行成立的定理, 对列也同样成立, 因此在下面证明行列式的基本性质时, 只要证明它对行成立就够了。

定理 3 行列式的任意两行 (列) 互相交换后, 行列式只改变符号, 而绝对值不变。

証 先证相邻两行互换后行列式只改变符号, 把行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的第 i 行和第 $i+1$ 行互换后, 得到行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{则 } D_1 &= \sum_{(s_1, \dots, s_n)} (-1)^{[s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, s_{i+2}, \dots, s_n]} a_{1s_1} \cdots \\ &\quad \cdots a_{i+1s_i} a_{is_{i+1}} \cdots a_{ns_n} = \\ &= \sum_{(s_1, \dots, s_n)} (-1)^{[s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, s_i, s_{i+2}, \dots, s_n]} a_{1s_1} \cdots \\ &\quad \cdots a_{is_i} a_{i+1s_{i+1}} \cdots a_{ns_n}. \end{aligned}$$

由于

$$[s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, s_i, \dots, s_n] = [s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n] \pm 1.$$

所以

$$D_1 = - \sum_{(s_1, \dots, s_n)} (-1)^{[s_1, \dots, s_n]} a_{1s_1} \cdots a_{ns_n} = -D.$$

现在再考虑不相邻的两行互换的情况。假定交换第 i 行与第 $i+k$ 行, 这种交换的结果也可以通过 $2k-1$ 次交换相邻的行来达到

到。即，先让第 i 行与第 $i+1$ 行交换，然后让第 $i+1$ 行与 $i+2$ 行交换，……，第 $i+k-1$ 行与第 $i+k$ 行交换。这时，原来的第 i 行已经换到第 $i+k$ 行上了。现在再让第 $i+k-1$ 行与第 $i+k-2$ 行交换，然后让第 $i+k-2$ 行与 $i+k-3$ 行交换，……，第 $i+1$ 行与第 i 行交换。于是，原来的第 $i+k$ 行换到第 i 行上。所述的 $2k-1$ 次相邻两行交换的结果，事实上就是把第 i 行与第 $i+k$ 行交换，而夹在它们之间的各行保持不动。每交换一次就改一次号，交换 $2k-1$ 次应该改 $2k-1$ 次号，因为 $2k-1$ 是奇数，所以实际上只改了一次号。

1.2 行列式的子式·代数余子式 为了计算行列式之值，还须引入行列式的子式和代数余子式的概念。自 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中任意划去 k 行和 k 列后，剩下的元素按原来的次序排列成为一个 $n-k$ 阶的行列式 M 。另一方面，位于划去的行列相交之点的元素全体则成一 k 阶行列式 N 。我们称 M 是 N 的余子式，而 M ， N 分别称为 D 的 $n-k$ 阶和 k 阶子式。显然可见， N 也是 M 的余子式。设划去的 k 行是 D 的第 $i_1, i_2, \dots, i_k$ 行，划去的 k 列是 D 的 $j_1, j_2, \dots, j_k$ 列，则

$$(-1)^{i_1 + \cdots + i_k + j_1 + \cdots + j_k} M = (-1)^m M$$

称为 N 在 D 中的代数余子式，显然可见， $(-1)^m N$ 是 M 在 D 中的代数余子式。特别，当划去元素 a_{ij} 所在的行和列以后，我们得到 a_{ij} 的余子式是 $n-1$ 阶行列式，以后记成 M_{ij} ，而 a_{ij} 的代数余子式是

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

例 在

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中划去二行, 三行, 二列, 四列, 便得二阶子式

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix},$$

而 M 的余子式是

$$N = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix},$$

M 的代数余子式是

$$(-1)^{2+3+2+4} N = -N.$$

现在来证明一个很重要的定理, 即

定理 4 在行列式 D 的展开式中含有元素 a_{ij} 的一切项之和等于 $a_{ij}A_{ij}$ 。

証 先考虑 $i=j=1$ 的情况, 在 D 的展开式 (8) 中含有 a_{11} 的一切项之和可写成

$$a_{11} \cdot \sum_{(s_2, \dots, s_n)} (-1)^{[1, s_2, \dots, s_n]} a_{2s_2} \cdots a_{ns_n},$$

这里 $s_2, \dots, s_n$ 是数码 $2, 3, \dots, n$ 的一种排列, $\sum_{(s_2, \dots, s_n)}$ 表示对所有这样的排列求和。显然

$$[1, s_2, \dots, s_n] = [s_2, \dots, s_n].$$

于是 a_{11} 的系数为

$$\sum_{(s_2, \dots, s_n)} (-1)^{[s_2, \dots, s_n]} a_{2s_2} \cdots a_{ns_n} = M_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = A_{11}.$$