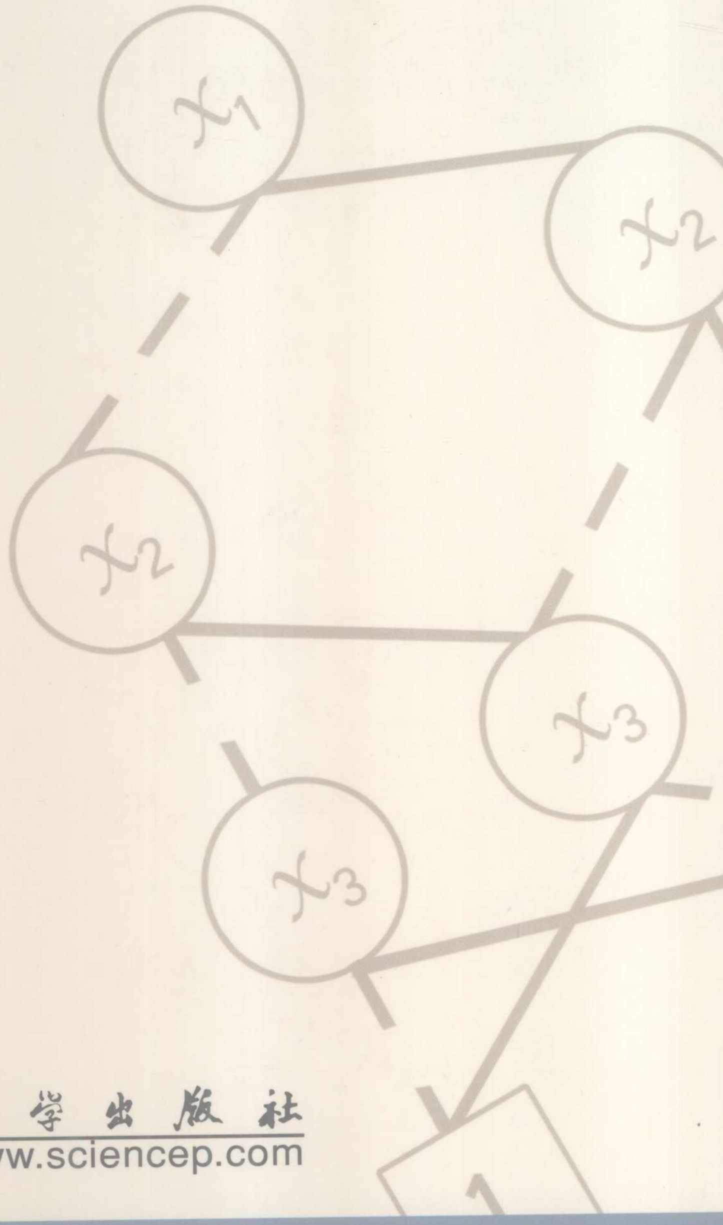
有序二叉决策图及应用

ORDERED BINARY DECISION DIAGRAM AND ITS APPLICATION

古天龙　徐周波◎著



科学出版社
www.sciencep.com

有序二叉决策图及应用

古天龙　徐周波　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

有序二叉决策图是布尔函数的一种规范表达形式、一种新型数据结构。基于 OBDD 可以完成布尔函数的有效表述和操作运算，OBDD 在 VLSI 逻辑综合和验证方面的成功应用引起了学术界和工业应用界的极大关注。本书对 OBDD 相关技术问题、OBDD 扩展形式、OBDD 应用等方面进行了介绍和讨论，主要内容包括布尔表达式及其描述、有序二叉决策图、零压缩二叉决策图、代数决策图、边值二叉决策图、二叉矩量图、时间变量决策图、应用专题等。

本书可供高等院校计算机、电子工程、自动化等专业的高年级本科生、研究生以及相关领域的科研和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

有序二叉决策图及应用 / 古天龙，徐周波著．—北京：科学出版社，2009
ISBN 978-7-03-025032-2

Ⅰ．有…　Ⅱ．①古…②徐…　Ⅲ．数据结构　Ⅳ．TP311.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 121195 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2009 年 7 月第 一 版　开本：787×1092 1/16
2009 年 7 月第一次印刷　印张：18
印数：1—2 500　字数：388 000

定价：45.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

布尔代数是计算机科学和逻辑系统设计的重要基石。VLSI 系统 CAD、软件测试和验证、AI 规划与调度等领域中的诸多问题都归结为逻辑函数及其序列的操作和运算。毫无疑问，布尔函数的表述及其操作对这些领域中问题的合理有效解决起着尤为关键的作用。不幸的是，布尔函数的可满足性和等价性等问题的 NP 完备性所导致的状态组合爆炸问题严重地制约了大规模、甚至工业小规模问题的解决。然而，在实际问题的处理中，对布尔函数采取恰当的描述并建立相应描述下的操作算法，可以有效地减缓甚至避免问题处理过程中的状态组合复杂性。有序二叉决策图(ordered binary decision diagram, OBDD)则是该方面的有益探索和结果。

OBDD 是一种新型数据结构，是迄今为止布尔函数表述和操作中最为有效的技术之一。人们对它的研究最早可追溯到 20 世纪 50 年代 Lee 的二叉决策程序和 20 世纪 70 年代 Akers 的二叉决策图(binary decision diagram, BDD)概念。20 世纪 80 年代 Bryant 对 BDD 附加了变量序和简化约束，使之成为布尔表达式表述的一种规范型，即 OBDD。OBDD 不同于 BDD 之处在于，OBDD 中任一从根节点到叶节点的路径上变量出现的顺序保持一致。这一变量序的限制，使得 OBDD 成为表述布尔函数的规范式。Bryant 关于 OBDD 构造和操作的图形算法，极大地推进了 OBDD 的广泛深入研究。为了满足能够表述非0-1数值函数的应用需求，建立了多端二叉决策图(multi-terminal binary decision diagram, MTBDD)、代数决策图(algebraic decision diagram, ADD)、边值二叉决策图(edge-valued binary decision diagram, EVBDD)、二叉矩量图(binary moment diagram, BMD)等。除 BMD 之外，OBDD 及上述这些扩展形式都是依据布尔函数的香农(Shannon)分解而构造的。Kebschull 等基于正 Davio 分解提出了有序函数决策图(ordered functional decision diagram, OFDD)；Drechsler 等将 OBDD 和正 Davio 分解及负 Davio 分解复合，建立了有序 Kronecker 函数决策图(ordered Kronecker functional decision diagram, OKFDD)。在 OFDD 的基础上，Bryant 和 Chen 提出了基于正 Davio 分解规则的二叉矩量图。此外，Minato 通过采取不同的简化策略给出了适合于组合问题有效处理的零压缩二叉决策图(zero-suppressed binary decision diagram, ZBDD)。OBDD 中的变量顺序的选择也是研究人员关注的重要问题，研究人员已开展了动态变量序、最优变量序、启发式变量序、无变量序限制的自由 BDD 等的研究。

Burch 等所开展的 OBDD 及其电路验证的应用工作，极大地推动了 OBDD 技术及其应用的研究。时至今日，OBDD 已成为符号模型检验的技术核心，而符号模型检验不仅是硬件电路验证，而且是软件系统、软/硬件混杂系统、工业控制系统等验证的一种有效技术。同时，OBDD 在符号组合优化、整数规划、智能调度、离散事件控制器综合、Petri 网分析等领域也得到了应用。

硬件电路综合与验证　硬件电路的验证是最早和最为成熟应用 OBDD 的领域。

Bryant 等首先将 OBDD 应用于 MOS 电路的编译仿真器。Maliket 和 Fujita 等讨论了如何从电路描述中获得一个便于等价性验证的变量序问题。目前，OBDD 作为硬件电路验证中的一种流行数据结构，已被集成到许多商用工具中。尽管如此，OBDD 还不能完全解决硬件电路验证中的所有问题。OBDD 和结构化方法结合是克服存储容量限制的一个有效措施。对于受指数规模复杂性制约的乘法函数，OBDD 往往显得无能为力。Bryant 和 Chen 利用 * BMD 完成了 256 位乘法器的验证。对于单纯采用 OBDD 或 * BMD 不能处理的问题，可以采用混合数据结构，如 K * BMD。对于时序电路，基于符号模型检验的验证已得到初步应用。

Coudert 等将 OBDD 应用于两级逻辑优化，极大地改善了算法的性能。OBDD 可以方便地表示 FPGA 设计中的函数分解，研究人员已开展了该方面的算法研究。Becker 的研究结果表明：基于 OBDD 的直接映射综合，可以获得具有简单结构以及优良可测试性的硬件电路。此外，OBDD 可用来处理硬件电路测试中的测试模式生成、故障模拟、故障率计算等问题。

符号优化与规划调度　组合优化、整数规划以及调度领域中的许多问题的求解均受到了组合爆炸复杂性的制约，传统的求解算法难免要涉及状态空间或者变量组合的显式枚举。基于 OBDD 及其扩展形式可以实现状态空间或者变量组合的隐式表示和搜索，从而改善这类问题的求解效率。Minato 讨论了八皇后问题和 8×8 棋子问题的 ZBDD 表述和求解，仿真计算结果表明：对于这类组合优化问题，ZBDD 具有较之于 OBDD 更高的时空效率。Coudert 研究了硬件电路综合中逻辑优化、约束编码、多层路由等相对应的一类图加色问题的 OBDD 和 ZBDD 符号求解。Hachtel 和 Somenzi 给出了 0-1 网络最大流问题的符号 OBDD 求解算法。Bahar 等将 ADD 应用于最短路径问题的求解。这些符号算法都可以处理常规显式算法无法解决的相应大规模优化问题。

Lai 等给出了 0-1 整数线性规划求解的 EVBDD 算法 FGILP。该算法中，对线性规划中的每一个线性约束构造与之对应的 EVBDD，所有约束所对应的 EVBDD 通过“与”逻辑操作得到问题可行解的 EVBDD。最后，通过对目标函数和可行解的 EVBDD 进行综合，便可得到那些既能满足所有约束关系，又能使目标函数最优的变量的赋值。FGILP 与常规算法的商用软件包比较，其求解速度明显提高，但对存储空间方面的要求更高。Radivojevic 和 Brewer 给出了硬件电路综合中的一类资源约束调度问题的 OBDD 描述和求解算法。所考虑的调度问题是在资源和时间约束下，确定和指派时间步上的操作。

Edelkamp 和 Reffel 给出了智能规划问题求解中 A* 搜索算法的符号 OBDD 形式，即 BDDA* 算法。BDDA* 算法不仅应用于规划工具 MIPS，而且还应用于符号模型检验中的状态搜索。Jensen 等给出了更为有效的基于 OBDD 的 SetA* 算法，SetA* 算法较之于 BDDA* 算法的搜索效率有成倍的提高。Bouquet 和 Jégou 将 OBDD 应用于约束满足问题(constraint satisfactory problem, CSP)的求解。

符号模型检验　基于 OBDD 及其扩展形式的符号模型检验已成为系统验证的一种流行技术。进程网络是分布式系统规格和综合中的模型，Strehl 等给出了适合于进程网络模型符号验证的区间决策图(interval decision diagram，IDD)技术和算法。Møller 等讨论了赋时自动机和赋时 Petri 网等实时系统模型的符号差分决策图(difference decision diagram,DDD)分析和验证问题。Campos 等研究了基于符号模型检验的实时系统的时间性能分析,并给出了在医疗监护系统、飞机控制器中应用的简例。Okawa 和 Yoneda 给出了时间 Petri 网的符号模型检验技术。同时,符号模型检验也在协议、铁路互锁系统、大型软件系统规格 TCAS II、嵌入式系统等方面得到了成功的应用。

离散事件控制器综合　离散事件系统是计算机集成制造、通信、计算机网络等复杂过程中的一类系统问题。离散事件系统的逻辑层次监控理论涉及离散事件活动之间逻辑关系的描述、达到期望运行特性的监控器的综合等。离散事件系统监控器的综合技术受系统中事件和状态的组合复杂性影响,在实际实施过程中对于工业规模问题显得无能为力。Hoffmann 和 Balemi 给出了离散事件系统监控器综合的符号 OBDD 技术,并将其应用于半导体制造过程的逻辑监控器综合,所综合监控器的状态数目高达 10^6 个。Vahidi 等给出了资源共享竞争问题监控器综合的符号 OBDD 工具,该工具可完成具有 10^{16} 个可达状态的系统监控器综合。

Petri 网的符号分析　Petri 网是异步、并发系统规格、分析和设计的一种图形数学工具。Pastor 等将 Petri 网的结构和行为用布尔函数表述,从而将状态空间转化为 OBDD 表示,有效地减缓了有界 Petri 网分析中的状态组合复杂性。基于符号 OBDD 的技术可以完成有界 Petri 网的活性、安全性、死锁、并发等诸多性能的高效分析。仿真结果表明,10^{18} 的 Petri 网可达状态空间可由仅有 10^3 个结点的 OBDD 表示。Yoneda 等给出了 Petri 网分析的符号 ZBDD 算法。ZBDD 算法较之于 OBDD 算法在计算的时空效率上都有明显的提高,计算时间可以减少为原来的 $\frac{1}{30}$ 左右。

OBDD 技术的发展始终受到应用问题的牵引,业已建立了不少适用于不同特征问题描述和处理的扩展形式。尽管如此,研究出具有更强描述机制和计算功能的扩展 OBDD,使之能够更有效地解决领域应用问题,仍是 OBDD 未来研究的一个热点。这方面值得进行的研究包括:处理算术电路的字级决策图(word-level decision diagram,WLDD)、具有时间描述机制的赋时二叉决策图(timed binary decision diagram,TBDD)、适合于实时系统符号模型检验的约束描述决策图等。该方面研究中值得注意的是,问题描述的效率、操作实施的计算以及描述的规范性的协调和统一。

OBDD 的变量序问题一直是影响其应用实施的关键因素。一方面,开发出有效变量序技术仍将是未来研究的重要问题之一;同时,针对应用领域特征建立相应的专门变量序技术以及专门应用领域变量序的知识库,可能会成为处理应用问题的有效方式。OBDD 被提出至今,已涌现出了许多 OBDD 的扩展形式。探讨不同函数之间、不同 OBDD 描述形式之间的变换关系及其算法将是一个有意义的研究课题。一方面,可以进一步揭示不同 OBDD 之间的联系,拓展 OBDD 的基础理论研究;另一方面,可以对应用实施过程带来便利,如重用性等。

OBDD 作为一种描述布尔函数、伪布尔函数的新型数据结构,其已有的主要应用领域涉及:硬件电路的验证、综合和测试,符号优化与调度,符号模型检验,离散事件控制器综合,Petri 网的符号分析等。知识的表示和处理、软件测试、软/硬件系统的协同综合及验证、其他形式化规格模型(如 Statechart, CFSM 等)下系统的符号分析和检验等,可能会

成为 OBDD 应用的新领域。这些领域都将是 OBDD 应用进一步研究的课题。

本书旨在对有序二叉决策图技术及其应用进行介绍和讨论。全书内容共有 8 章。第 1 章对布尔表达式及其描述进行初步介绍，包括布尔函数、命题公式、逻辑电路、布尔表达式的其他描述形式等。第 2 章讨论有序二叉决策图，包括 OBDD 及其规范型、OBDD 的简化算法、OBDD 的构造及操作、OBDD 的变量序等。第 3 章对零压缩二叉决策图进行介绍，包括 ZBDD 及其性质、ZBDD 的构造及基本操作、一元 Cube 集合代数、二元 Cube 集合代数、多项式的隐式表示等。第 4 章介绍代数决策图，包括 ADD 及其性质、ADD 的基本操作、矩阵乘法计算等。第 5 章对边值二叉决策图进行介绍，包括 EVBDD 及其性质、操作及其算法、整数线性规划求解、函数分解等。第 6 章介绍二叉矩量图，包括 BMD 定义及性质、* BMD 的操作算法、算术电路验证等。第 7 章对时间变量决策图进行介绍，包括差分约束表达式、差分决策图的构造及操作、赋时二叉决策图等。第 8 章讨论应用专题，包括符号模型检验、网络优化、装配序列规划、Petri 网分析等。

本书包含了作者和课题组成员多年来的研究成果。在本书写作过程中，作者的研究生赵岭忠、李凤英、刘华东、杨志飞以及课题组成员董荣胜、钟艳如、蔡国永、钱俊彦等提出了许多宝贵的建议并参与了部分书稿的整理，在此一并表示感谢。

由于作者水平有限，书中错漏和不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

作　者

2009 年 6 月

目　录

前言
第 1 章　布尔表达式及其描述 …… 1
1.1　布尔函数 …… 1
1.1.1　布尔代数 …… 1
1.1.2　布尔表达式 …… 3
1.1.3　布尔函数 …… 4
1.1.4　布尔函数的范式 …… 6
1.2　命题公式 …… 8
1.2.1　命题与联结词 …… 8
1.2.2　合式公式 …… 10
1.2.3　命题公式的范式 …… 12
1.2.4　命题公式与布尔函数 …… 13
1.3　逻辑电路 …… 14
1.3.1　基本逻辑门 …… 14
1.3.2　逻辑电路的布尔函数 …… 15
1.4　布尔表达式的其他描述形式 …… 16
1.4.1　真值表 …… 16
1.4.2　决策树 …… 17
1.4.3　二叉决策图 …… 19
参考文献 …… 21
第 2 章　有序二叉决策图 …… 22
2.1　OBDD 及其规范型 …… 22
2.1.1　OBDD 的定义 …… 22
2.1.2　OBDD 的性质 …… 23
2.2　OBDD 的简化算法 …… 24
2.2.1　OBDD 的简化 …… 24
2.2.2　简化算法 …… 27
2.3　OBDD 的构造及操作 …… 30
2.3.1　OBDD 的构造 …… 30
2.3.2　OBDD 的操作 …… 31
2.3.3　补边 OBDD …… 46
2.4　OBDD 的变量序 …… 47
2.4.1　OBDD 的最小化 …… 47

2.4.2 OBDD 的重排序 …… 49
2.4.3 OBDD 的变量序算法 …… 51
参考文献 …… 56
第 3 章 零压缩二叉决策图 …… 58
3.1 ZBDD 及其性质 …… 58
3.1.1 组合集合及其表示 …… 58
3.1.2 ZBDD 的定义 …… 59
3.1.3 ZBDD 的性质 …… 60
3.2 ZBDD 的构造及基本操作 …… 61
3.2.1 ZBDD 的操作 …… 61
3.2.2 ZBDD 的构造 …… 68
3.2.3 补边 ZBDD …… 70
3.3 一元 Cube 集合代数 …… 70
3.3.1 基本概念 …… 70
3.3.2 基本运算 …… 71
3.3.3 算法实现 …… 73
3.3.4 皇后问题的求解 …… 77
3.4 二元 Cube 集合代数 …… 78
3.4.1 二元 Cube 集的表示 …… 78
3.4.2 基本操作及算法 …… 78
3.4.3 数字电路设计 …… 83
3.5 多项式的隐式表示 …… 85
3.5.1 变量次数的表示 …… 85
3.5.2 多项式系数的表示 …… 86
3.5.3 算术操作的算法实现 …… 87
参考文献 …… 91
第 4 章 代数决策图 …… 93
4.1 ADD 及其性质 …… 93
4.1.1 ADD 的定义 …… 93
4.1.2 ADD 的矩阵表示 …… 95
4.2 ADD 基本操作 …… 96
4.2.1 布尔操作 …… 96
4.2.2 算术操作 …… 98
4.2.3 提取操作 …… 100
4.3 矩阵乘法计算 …… 104
4.3.1 准环和半环 …… 104
4.3.2 半环上的矩阵乘算法 …… 105
4.3.3 准环上的矩阵乘算法 …… 108

参考文献 …… 111
第 5 章　边值二叉决策图 …… 112
5.1　EVBDD 及其性质 …… 112
5.1.1　EVBDD 的定义 …… 112
5.1.2　EVBDD 的规范性 …… 114
5.2　操作及其算法 …… 118
5.2.1　Apply 操作 …… 118
5.2.2　操作的性质 …… 122
5.3　整数线性规划求解 …… 126
5.3.1　0-1 整数规划求解算法 …… 126
5.3.2　改进算法 …… 127
5.3.3　minimize 函数 …… 132
5.4　函数分解 …… 135
5.4.1　函数分解的定义 …… 136
5.4.2　无交集函数分解 …… 136
参考文献 …… 138
第 6 章　二叉矩量图 …… 139
6.1　BMD 定义及性质 …… 139
6.1.1　函数分解规则 …… 139
6.1.2　BMD 的定义 …… 141
6.1.3　BMD 的规范性 …… 142
6.1.4　* BMD 的定义 …… 143
6.1.5　* BMD 的构造算法 …… 147
6.2　* BMD 的操作算法 …… 150
6.2.1　整数函数的表示 …… 150
6.2.2　* BMD 的加法操作 …… 151
6.2.3　* BMD 的乘法和幂操作 …… 154
6.2.4　布尔函数的表示及操作 …… 157
6.2.5　仿射置换 …… 158
6.3　算术电路验证 …… 160
参考文献 …… 162
第 7 章　时间变量决策图 …… 163
7.1　差分约束 …… 163
7.1.1　差分约束表达式 …… 163
7.1.2　差分约束系统 …… 166
7.2　差分决策图 …… 169
7.2.1　有序差分决策图 …… 169
7.2.2　局部简化 DDD …… 171

7.2.3　路径简化 DDD …… 172
7.2.4　完全简化 DDD …… 177
7.3　DDD 的构造及操作 …… 179
7.3.1　DDD 的构造 …… 179
7.3.2　R_LDDD 上的操作 …… 182
7.4　赋时二叉决策图 …… 194
7.4.1　赋时布尔函数 …… 194
7.4.2　赋时布尔函数 BDD …… 197
7.4.3　赋时二叉决策图 …… 201
参考文献 …… 202
第 8 章　应用专题 …… 203
8.1　符号模型检验 …… 203
8.1.1　计算树逻辑 …… 203
8.1.2　CTL 的模型检验 …… 207
8.1.3　CTL 的符号模型检验 …… 212
8.2　网络优化 …… 215
8.2.1　网络最大流问题 …… 215
8.2.2　0-1 网络最大流问题的符号算法 …… 217
8.2.3　最大流问题的符号算法 …… 222
8.3　装配序列规划 …… 228
8.3.1　装配序列的符号表示 …… 228
8.3.2　装配序列的符号生成 …… 232
8.3.3　基于 MIPS 的装配序列生成 …… 238
8.4　Petri 网分析 …… 247
8.4.1　基于 OBDD 的符号分析 …… 247
8.4.2　Petri 网调度的符号算法 …… 258
参考文献 …… 264

第1章　布尔表达式及其描述

布尔表达式是布尔代数上按照一定规则形成的符号串。它是逻辑演算、逻辑电路综合等的有效形式化符号描述。本章对布尔表达式相关的布尔代数、布尔函数以及布尔函数的规范式进行讨论；同时，讨论了命题公式、逻辑电路和布尔表达式之间的联系，以及描述布尔表达式的真值表、决策树和二叉决策图。

1.1　布尔函数

布尔代数是英国数学家 George Boole（乔治·布尔）19 世纪提出来的将古典逻辑推理转化为抽象符号代数计算的技术。布尔代数是计算技术和自动化技术中逻辑设计的数学基础，因此布尔代数也称为逻辑代数。布尔函数是定义在布尔代数上的一类函数。

1.1.1　布尔代数

定义 1.1.1　对于非空集合 B（B 中至少包含两个不同元素），以及集合 B 上的二元运算“·”、“＋”、一元运算“′”，集合 B 中的元素 $a,b,c\in B$，称满足下述条件的多元组 $(B,+,\cdot,')$ 为一个布尔代数：

交换律　对任意 $a,b\in B$，有：

① $a\cdot b=b\cdot a$

② $a+b=b+a$

分配律　对任意 $a,b,c\in B$，有：

③ $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$

④ $a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c)$

同一律

⑤ 二元运算“＋”存在单位元，称为布尔代数的零元，即存在 $0\in B$，使得任意 $a\in B$，有 $a+0=a$；

⑥ 二元运算“·”存在单位元，称为布尔代数的单位元，即存在 $1\in B$，使得任意 $a\in B$，有 $a\cdot 1=a$。

互补律　对任意 $a\in B$，存在 $a'\in B$，满足：

⑦ $a\cdot a'=0$

⑧ $a+a'=1$

在上述定义中，元素 $a\in B$ 所对应的 $a'\in B$ 称为元素 a 的补元。为简便起见，布尔代数 $(B,+,\cdot,')$ 可简称为布尔代数 B。在布尔代数 B 中，用来表示 B 中任意元素的符号称为布尔变量或者变元，而 B 中确定的元素称为布尔常量或者常元。

定理 1.1.1　布尔代数 B 中的零元唯一。

证明 设 θ 也是布尔代数 B 中的零元，即对任意 $a\in B$，有 $a+\theta=a$，因此

$$\begin{aligned} 0 &= 0+\theta && \text{（因 } \theta \text{ 为单位元）} \\ &= \theta+0 && \text{（定义 1.1.1 ②）} \\ &= \theta && \text{（因 0 为单位元）} \end{aligned}$$

定理 1.1.2 布尔代数 B 中的单位元唯一。

证明 与定理 1.1.1 的证明类似。

定理 1.1.3 在布尔代数 B 中，任一元素的补元唯一。也就是说，对于任意 $a\in B$，如果元素 $b\in B$，满足：

① $a\cdot b=0$

② $a+b=1$

则 $b=a'$。

证明

$$\begin{aligned} b &= b+0 && \text{（定义 1.1.1 ⑤）} \\ &= b+a\cdot a' && \text{（定义 1.1.1 ⑦）} \\ &= (b+a)\cdot(b+a') && \text{（定义 1.1.1 ④）} \\ &= (a+b)\cdot(b+a') && \text{（定义 1.1.1 ②）} \\ &= 1\cdot(b+a') && \text{（定理 1.1.3 ②）} \\ &= (a+a')\cdot(b+a') && \text{（定义 1.1.1 ⑧）} \\ &= (a'+a)\cdot(a'+b) && \text{（定义 1.1.1 ②）} \\ &= a'+a\cdot b && \text{（定义 1.1.1 ④）} \\ &= a'+0 && \text{（定理 1.1.3 ①）} \\ &= a' && \text{（定义 1.1.1 ⑤）} \end{aligned}$$

最简单的二元素布尔代数 B，也就是大家所熟知的二值逻辑系统，是在 $B=\{0,1\}$ 上定义如下二元运算“·”、“+”以及一元运算“′”的布尔代数 $(B,+,\cdot,')$，如表 1.1～表 1.3所示。

表 1.1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

表 1.2

+	0	1
0	0	1
1	1	1

表 1.3

x	x'
0	1
1	0

该布尔代数 B 也称为(二值)开关代数。

在 n 重笛卡儿积 $B^n(B=\{0,1\})$ 上，对于任何 $(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in B^n$，这里 $a_i,b_i\in\{0,1\}(i=1,2,\cdots,n)$，定义如下运算：

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\cdot(b_1,b_2,\cdots,b_n)=(a_1\cdot b_1,a_2\cdot b_2,\cdots,a_n\cdot b_n)$$

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)+(b_1,b_2,\cdots,b_n)=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)'=(a'_1,a'_2,\cdots,a'_n)$$

不难证明：$(B^n,+,\cdot,')$ 是布尔代数，零元为 $(0,0,\cdots,0)$，单位元为 $(1,1,\cdots,1)$，此布尔代数也称为(n 维)矢量开关代数。

对于布尔代数 $(B,+,\cdot,')$，设任意 $a,b,c\in B$，依据布尔代数的定义，可导出如下布

尔代数的一系列基本性质：

①（交换律）　$a\cdot b=b\cdot a$，　$a+b=b+a$

②（结合律）　$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$，　$a+(b+c)=(a+b)+c$

③（分配律）　$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$，　$a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c)$

④（重叠律）　$a\cdot a\cdot\cdots\cdot a=a$，　$a+a+\cdots+a=a$

⑤（狄摩根律）　$(a\cdot b)'=a'+b'$，　$(a+b)'=a'\cdot b'$

⑥（吸收律）　$a\cdot(a+b)=a$，　$a+(a\cdot b)=a$

$a\cdot(a'+b)=a\cdot b$，　$a+(a'\cdot b)=a+b$

⑦（互补律）　$a\cdot a'=0$，　$a+a'=1$

⑧（0-1 律）　$a\cdot 0=0$，　$a+1=1$

布尔代数的上述基本性质证明可参考相关资料。

1.1.2　布尔表达式

设布尔代数$(B,+,\cdot,')$，令 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 个变量，用“$\cdot$”、“$+$”、“$'$”把 B 的元素和变量连接起来的表达式就是布尔表达式。

定义 1.1.2　对于布尔代数$(B,+,\cdot,')$，布尔表达式定义为由如下规则构成的有限字符串：

① B 中任意一个元素是一个布尔表达式；

② B 上的任意一个变量是一个布尔表达式；

③ 若 x 和 y 是布尔表达式，则 $x\cdot y$，$x+y$ 和 x' 也是布尔表达式；

④ 只有有限次运用①～③所产生的符号串是布尔表达式。

约定一元运算“$'$”的优先级最高，其次是“$\cdot$”，最低的是“$+$”，这样布尔表达式中可以省去一些括号。

例如，对于布尔代数$(\{1,2,3,6\},+,\cdot,')$，那么 $1+x$，$x\cdot 1+y$，$((2+6)'\cdot(y'+x))\cdot(x\cdot z)'$都是该布尔代数上的布尔表达式，并且分别为含有单个变量 x 的布尔表达式，含有两个变量 x 和 y 的布尔表达式，含有三个变量 x、y 和 z 的布尔表达式。

定义 1.1.3　对于布尔代数$(B,+,\cdot,')$，一个含有 n 个互异变量的布尔表达式，称为含有 n 元的布尔表达式，简称为 n 元布尔表达式，记为 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 为变量。

定义 1.1.4　对于布尔代数$(B,+,\cdot,')$上的 n 元布尔表达式 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，对变量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$在 B 中取值，并代入布尔表达式 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，即对变量赋值，所计算出的结果，称为 n 元布尔表达式 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的值。

例如，对于布尔代数$(\{0,1\},+,\cdot,')$上的布尔表达式

$$P(x,y,z)=(x+y)\cdot(x'+y')\cdot(y+z)'$$

如果变量的一组赋值为 $x=1,y=0,z=1$，那么便可求得

$$P(1,0,1)=(1+0)\cdot(1'+0')\cdot(0+1)'=1\cdot 1\cdot 0=0$$

定义 1.1.5　对于布尔代数$(B,+,\cdot,')$上的 n 元布尔表达式 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，如果对于 n 个变量的任意赋值，这两个表达式的值都相同，则称这两个

布尔表达式等价，记为 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)=Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。

容易验证布尔代数$(\{0,1\},+,\cdot,')$上的布尔表达式

$$P(x,y,z)=(x\cdot y)+(x\cdot z') \text{和} Q(x,y,z)=x\cdot(y+z')$$

是等价的。可以进行如下验证：

$$P(0,1,1)=(0\cdot 1)+(0\cdot 1')=0+0=0$$
$$Q(0,1,1)=0\cdot(1+1')=0\cdot 1=0$$
$$P(1,1,1)=(1\cdot 1)+(1\cdot 1')=1+0=1$$
$$Q(1,1,1)=1\cdot(1+1')=1\cdot 1=1$$
$$\vdots$$

事实上，可以利用布尔代数的一些恒等式，将一个布尔表达式简化成为另外一个简单的等价形式。

例如，对于布尔代数$(B,+,\cdot,')$上的布尔表达式

$$P(x,y,z)=x'\cdot y'\cdot(z'\cdot x+y')$$

可进行如下简化：

$$\begin{aligned}P(x,y,z)&=x'\cdot y'\cdot(z'\cdot x+y')\\&=x'\cdot y'\cdot z'\cdot x+x'\cdot y'\cdot y'\\&=(x'\cdot x)\cdot y'\cdot z'+x'\cdot(y'\cdot y')\\&=0+x'\cdot y'\\&=x'\cdot y'\end{aligned}$$

即布尔表达式 $x'\cdot y'\cdot(z'\cdot x+y')$和布尔表达式 $x'\cdot y'$等价。

1.1.3　布尔函数

对于布尔代数$(B,+,\cdot,')$上的任何一个布尔表达式 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，由于运算“$\cdot$”、“$+$”和“$'$”在 B 上的封闭性，所以对于任何 n 元组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$x_i\in B(i=1,2,\cdots,n)$的一组赋值就可以得到布尔表达式 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$对应的一个值，这个值必属于 B。由此可见，我们可以说布尔表达式 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$确定了一个由 B^n 到 B 的函数。

定义 1.1.6　对于布尔代数$(B,+,\cdot,')$，如果一个从 B^n 到 B 的映射能够用$(B,+,\cdot,')$上的 n 元布尔表达式来表示，那么这个映射称为布尔函数。

表 1.4

x	y	z	f	x	y	z	f
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1

对于布尔代数$(\{0,1\},+,\cdot,')$，表 1.4 所给出的映射 $f:B^n\to B$，可以用 B 上的布尔表达式 $f(x,y,z)=x\cdot(y+z')$表示，所以 f 是布尔函数。

对于布尔代数 B，从 $B^n\to B$ 的映射不一定都能用 B 上的布尔表达式来表示。换言之，任意映射 $f:B^n\to B$ 不一定都是布尔函数。但是，对于布尔代数$(\{0,1\},+,\cdot,')$，从$\{0,1\}^n$ 到$\{0,1\}$的任一映射都可用$(\{0,1\},+,\cdot,')$上的布尔表达式来表示，反之亦然。

定理 1.1.4　对于布尔代数$(\{0,1\},+,\cdot,')$，任何一个从$\{0,1\}^n$ 到$\{0,1\}$的映射都是布尔函数。

证明　对于任一个从$\{0,1\}^n$到$\{0,1\}$的映射，先对那些取值为 1 的有序 n 元组分别构造布尔表达式$\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \cdots \cdot \mu_n$，其中 μ_i 为 x_i(若 n 元组中第 i 个分量为 1)或者 x_i'(若 n 元组中第 i 个分量为 0)。然后，将所得到的布尔表达式用运算符"＋"列写在一起，得到的字符串便是原来映射所对应的布尔表达式。由此，任一个从$\{0,1\}^n$到$\{0,1\}$的映射都是布尔函数。

定理 1.1.5(狄摩根定理)　在布尔代数$(\{0,1\},+,\cdot,')$上，n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的布尔函数满足：

① $(x_1+x_2+\cdots+x_n)'=x_1'\cdot x_2'\cdot\cdots\cdot x_n'$

② $(x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n)'=x_1'+x_2'+\cdots+x_n'$

证明　① 对 n 作数学归纳法。

当 $n=1,2$ 时，①显然成立；假定 $n=k$ 时，①成立，即

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)'=x_1'\cdot x_2'\cdot\cdots\cdot x_k'$$

证明 $n=k+1$ 时，①也成立。

$$\begin{aligned}&(x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})'\\=&((x_1+x_2+\cdots+x_k)+x_{k+1})'\\=&(x_1+x_2+\cdots+x_k)'\cdot x_{k+1}'\\=&(x_1'\cdot x_2'\cdot\cdots\cdot x_k')\cdot x_{k+1}'\\=&x_1'\cdot x_2'\cdot\cdots\cdot x_k'\cdot x_{k+1}'\end{aligned}$$

因此，①必然成立。

类似地，可证明②。

定理 1.1.6　在布尔代数$(\{0,1\},+,\cdot,')$上，n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的布尔函数可对其中任意变量进行如下展开：

① $f(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)$
$=x_i\cdot f(x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,x_n)+x_i'\cdot f(x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_n)$

② $f(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)$
$=(x_i+f(x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_n))\cdot(x_i'+f(x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,x_n))$

证明　① 当 $x_i=1$ 时，

$$\begin{aligned}&x_i\cdot f(x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,x_n)+x_i'\cdot f(x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_n)\\=&f(x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,x_n)\end{aligned}$$

当 $x_i=0$ 时，

$$\begin{aligned}&x_i\cdot f(x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,x_n)+x_i'\cdot f(x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_n)\\=&f(x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_n)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&x_i\cdot f(x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,x_n)+x_i'\cdot f(x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_n)\\=&f(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)\end{aligned}$$

类似地，可证明②。

定理 1.1.6 中①称为布尔函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$关于变量 x_i 的香农(Shannon)展开或分解。布尔函数 $f(x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_n)$或 $f(x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,x_n)$分别称

为布尔函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 关于变量 x_i 的香农展开的 0-分量和 1-分量。

例如,布尔代数 $(\{0,1\},+,\cdot,')$ 上的布尔函数 $f(x_1,x_2,x_3)=((x_1+x_2)'+x'_1\cdot x_3)'$ 相对于 x_1 的展开为

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1\cdot f(1,x_2,x_3)+x'_1\cdot f(0,x_2,x_3)\\&=x_1\cdot((1+x_2)'+1'\cdot x_3)'+x'_1\cdot((0+x_2)'+0'\cdot x_3)'\\&=x_1+x'_1\cdot x_2\cdot x'_3\\&=x_1+x_2\cdot x'_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1+f(0,x_2,x_3))\cdot(x'_1+f(1,x_2,x_3))\\&=(x_1+x_2\cdot x'_3)\cdot(x'_1+1)\\&=x_1+x_2\cdot x'_3\end{aligned}$$

推论 1.1.1 在布尔代数 $(\{0,1\},+,\cdot,')$ 上,n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的布尔函数满足下列等式:

① $x_i\cdot f(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)=x_i\cdot f(x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,x_n)$

$x'_i\cdot f(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)=x'_i\cdot f(x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_n)$

② $x_i+f(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)=x_i+f(x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_n)$

$x'_i+f(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)=x'_i+f(x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,x_n)$

证明 只要把当 $x_i=0,x'_i=1$ 与 $x_i=1,x'_i=0$ 分别代入即可验证。

1.1.4 布尔函数的范式

在布尔代数 $(\{0,1\},+,\cdot,')$ 上,n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的布尔表达式中,变量或者它的补元统称为文字。用二元运算"·"把有关文字联结起来构成的表达式称为乘积项;用二元运算"+"把有关文字联结起来构成的表达式称为和项。没有同时出现相同的变量或变量与它的补元的乘积项称为基本乘积项;没有同时出现相同的变量或变量与它的补元的和项称为基本和项。例如,$x\cdot y\cdot z,x\cdot y',y'$ 都是基本乘积项,而 $x\cdot y\cdot x',x\cdot y\cdot z\cdot y$ 不是基本乘积项。

对于一个 n 元布尔函数,可以由多种公式来表示。例如,$B=\{0,1\}$ 上的布尔表达式 $x_1\cdot x'_2,x_1\cdot(x'_1+x'_2),(x_1+x_2)\cdot x'_2,(x_1\cdot x'_2+x_2\cdot x'_2)\cdot(x_1+x'_1)$ 等都代表同一个布尔函数,所以有必要讨论一些规范的表达式。

定义 1.1.7 在布尔代数 $(\{0,1\},+,\cdot,')$ 上,如果 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的乘积项(和项)中所有变量都以 x_i 或 x'_i 形式出现一次,也仅出现一次,这样的乘积项(和项)称为 n 元小项(大项)。

布尔代数 $(\{0,1\},+,\cdot,')$ 上的布尔函数 $\{0,1\}^3\rightarrow\{0,1\}$ 的所有小项为 $x'_1\cdot x'_2\cdot x'_3$, $x'_1\cdot x'_2\cdot x_3,x'_1\cdot x_2\cdot x'_3,x'_1\cdot x_2\cdot x_3,x_1\cdot x'_2\cdot x'_3,x_1\cdot x'_2\cdot x_3,x_1\cdot x_2\cdot x'_3,x_1\cdot x_2\cdot x_3$;所有大项为 $x'_1+x'_2+x'_3,x'_1+x'_2+x_3,x'_1+x_2+x'_3,x'_1+x_2+x_3,x_1+x'_2+x'_3,x_1+x'_2+x_3$, $x_1+x_2+x'_3,x_1+x_2+x_3$。

不难看出,一个 n 元布尔函数具有 2^n 个 n 元小项和 2^n 个 n 元大项。

定理 1.1.7 在布尔代数 $(\{0,1\},+,\cdot,')$ 上,任何 n 元函数 $f:B^n\rightarrow B$ 能够表示为唯