图论与网络最优化算法

TULUN YU WANGLUO ZUIYOUHUA SUANFA

■ 龚 劬 编

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

图论与网络最优化算法

龚 劬 编

重庆大学出版社

内容提要

本书共分9章:图与网络的基本概念、树及其算法、连通性、路径算法、匹配、行遍性问题、平面图、图的着色及网络流问题。其中包含较丰富的实际应用案例与算例,每章末均附有较多难易程度不同的习题,另外还附有少量涉及网络建模与计算的大型综合应用题。

本书是一本理论与应用相结合的基础教材,可作为高等工科院校系统工程、管理工程、自动控制、通信与计算机科学、城市规划等专业高年级本科生或研究生的教材和教学参考书,也可供有关专业的科研人员自学。

图书在版编目(CIP)数据

图论与网络最优化算法/龚劬编. —重庆:重庆大学出版社,2009.10

ISBN 978-7-5624-5079-5

Ⅰ.图… Ⅱ.龚… Ⅲ.①图论②网络流—最优化算法 Ⅳ.0157.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第147365号

图论与网络最优化算法

龚 劬 编

责任编辑:谭 敏 李定群 版式设计:谭 敏

责任校对:张洪梅 责任印制:赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:张鸽盛

社址:重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)内

邮编:400030

电话:(023) 65102378 65105781

传真:(023) 65103686 65105565

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆升光电力印务有限公司印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:14 字数:349千

2009年10月第1版 2009年10月第1次印刷

印数:1—3 000

ISBN 978-7-5624-5079-5 定价:25.00元

前言

图论与网络最优化算法是一门提供离散数学模型的应用数学学科。随着计算机在社会中作用的变大,其应用日益广泛,应用遍及系统工程、电工学、交通运输、城市规划、生产管理、经济、通信、计算机等各个领域,人工智能、模式识别、计算机操作系统、数据结构等都涉及图论。

本教材的学习主要有以下4个方面的作用:

1. 思维的体操。其中含有广泛的数学思想和数学方法,诸如优化、分类、数形结合、转化的思想、分解的思想、归纳、演绎和逆推等。这是其他工科数学所无法比拟的,对培养我们的数学机敏性与成熟性大有益处。

2. 算法设计者的翅膀。图论算法是算法设计与分析中的重要组成部分,其中包含常用的算法设计基本方法,如搜索技术、分支定界法、回溯法、贪婪法及各种启发式算法,算法的时间复杂性分析,近似算法的近似程度分析也融入其中。

3. 综合应用能力形成的催化剂。书中几乎每章末都有关于图论理论和算法在实际中的各种应用,也含有一些具有一定灵活性和创造性的应用案例,配有大量颇具启发性和趣味性的习题。图论与代数、运筹学密切相关,概率统计与网络交叉有活动网络,这些都有助于我们综合运用数学能力的提高。图论中的图具有最复杂的非线性数据结构,如果将其中的算法编程实现,编程能力可上一个新的台阶。

4. 描述和解决离散问题的有利工具。在工农业生产、交通运输、通信和电力领域经常能看到许多网络,如河道网、灌溉网、管道网、公路网、铁路网、电话线网、计算机通信网及输电线网等。还有许多看不见的网络,各种关系网,如状态转移关系、事物的相互冲突关系、工序的时间先后次序关系等,这些网络都可归结为图论的研究对象——图。其中存在大量问题,如生产计划、投资计划和设备更新等问题也可以转化为网络优化的问题,这些都可借助于图论这个工具来加以解决。

近年来,图论是国内外许多大学普遍开设的一门重要基础课。我国在图论领域的研究起步较晚,在20世纪80年代出版了许多国外专著的译作。到目前为止,国内也出版了一些各具

特色的图论书籍，本书的编写力求突出下述特点：

1. 理论与算法并重。去掉经典专著中那些冗长而晦涩的论证，保留那些简洁、有特色、能体现典型数学思想和方法的论证；强调算法的基本思想和计算机实现。

2. 突出理论与算法的应用，反映本学科的最新应用成果。

本书承段虞荣教授细心审阅，并提出了许多重要建议，在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，错误、缺陷在所难免，恳请读者指正。

编　者

2009 年 6 月

教师信息反馈表

为了更好地为教师服务，提高教学质量，我社将为您的教学提供电子和网络支持。请您填好以下表格并经系主任签字盖章后寄回，我社将免费向您提供相关的电子教案、网络交流平台或网络化课程资源。

书名:		版次	
书号:			
所需要的教学资料:			
您的姓名:			
您所在的校(院)、系:	校(院)　　　　系		
您所讲授的课程名称:			
学生人数:	______人 ______年级	学时:	
您的联系地址:			
邮政编码:		联系电话	(家) (手机)
E-mail:(必填)			
您对本书的建议:		系主任签字 盖章	

请寄:重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)
重庆大学出版社教材推广部

邮编:400030
电话:023-65112084
023-65112085
网址:http://www.cqup.com.cn
E-mail:fxk@cqup.com.cn

目录

第 1 章

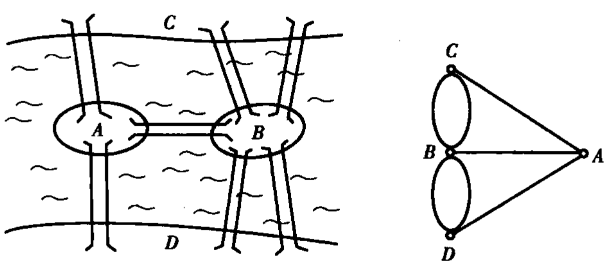
图与网络的基本概念

1.1 绪 论

自然界与人类社会有许多问题,如果用图形的方式来描述和分析,不仅形象直观,而且清晰,效果很好。图论通过由点和边组成的图形来描述具有某种二元关系的系统,并根据图的性质进行分析,提供研究各种系统的巧妙方法。例如,事物关系、物质结构、电气网络、通信网络、城市规划、交通运输、信息传递及工作调配等都可用点和边连接起来的图,即图论中的图来模拟。图论中的图有别于解析几何与微积分中的图,在那里,点的位置、边的长度和斜率是它的重要部分,而在图论中,这些都不重要,重要的是点与点之间的连接关系。下面举几个用图论方法建模的典型例子。

例 1.1 七桥问题。

18 世纪东普鲁士歌尼斯堡被普列格尔河分为 4 块,它们通过 7 座桥相互连接起来(见图 1.1(a)),问能否从某块陆地出发,经每座桥一次而且仅一次,回到出发点?



(a) (b)

图 1.1

1736 年,Euler 研究这一问题,发表了图论的首篇论文。他把 A,B,C,D 4 块陆地抽象成 4 个点,而每座桥用连接相应两点的一条线表示,于是得到图 1.1(b),A,B,C,D 任何一个点作为出发点都必然先"出"后"回",最后以"出"告终,才能行遍与该点相连的桥,所以不可能回到原来的出发点。此问题用图 1.1(b)来表达更简捷、更清晰,更利于问题的解决。

例 1.2 人、狼、羊、菜渡河问题。

一个摆渡人 F 希望用一条小船把一只狼 W、一头羊 G 和一篮白菜 C 从一条河的南岸渡到北岸去，而船小只能容纳 F,W,G,C 中的两个，决不能在无人看守的情况下，留下狼和羊在一起或羊和白菜在一起，应怎样渡河才能将狼、羊、白菜都运过去？

首先考虑在人狼羊菜渡河的过程中河南岸状态的变化情况，最初的状态是人、狼、羊、菜，最终的状态成空状态，中间的状态为人、狼、羊、菜的不同组合。可用小圆圈(顶点)表示河南岸的各个状态，两顶点连线当且仅当两状态经一次摆渡相互转移。

人、狼、羊、菜的任意不同的组合共有：$C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=16$，其中狼、羊、菜，狼、羊，羊、菜不允许，从而人，人、狼，人、菜 3 种情况也不会出现。余下共有 10 个允许状态，其状态转移关系如图 1.2 所示。O 表示空状态。

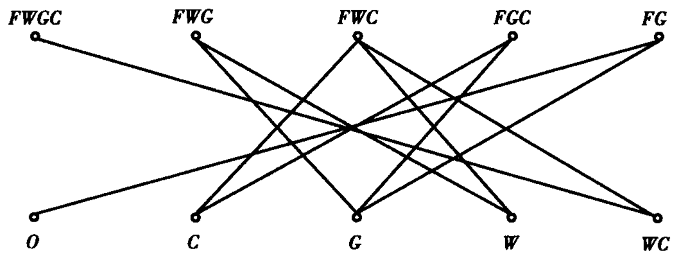


图 1.2

问题归结为在图中，寻求从顶点“$FWGC$”到顶点“O”的路线，将图改画为图 1.3。

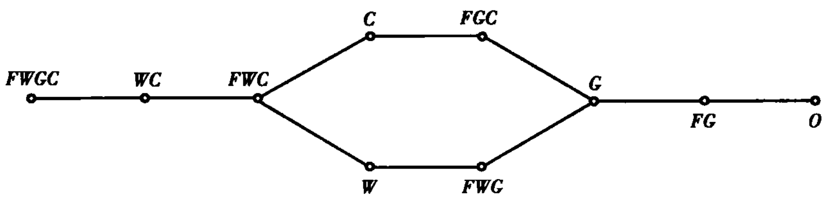


图 1.3

易见，共有两种过河方案，它们等优。

这一问题用图形来描述，不仅形象直观，而且每一步都非常严密，所有可能的摆渡情况都在图中表现出来，符合逻辑思维和分析的规律。问题怎样解，有多少种解法，解法是否最优都清楚地呈现出来，使人们对这一问题的解，有了清晰完整的概念。

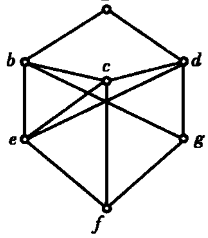


图 1.4

例 1.3 化学药品存放问题。

某公司生产几种化学药品 a,b,c,d,e,f,g，其中某些化学药品不相容，为了安全，公司要把不相容的药品放在不同格中，问至少应将仓库划分为多少格？

可用顶点表示各个化学药品，两顶点连线当且仅当两种药品不相容，便可得一个图 G，如图 1.4 所示。

问题转化为图的正常点着色，图 G 的点色数便是所求的最少格数。图的正常点着色即是为每个顶点赋一色，使凡有连线的两顶点异色，点色数即是使图得到正常点着色的最少色数。因此，可把具有相同颜色的顶点代表的药品放在

同一格,这样便能使不相容的药品分格放。

上面的例子,只是用几个具体问题说明如何用图来描述和分析问题,当然不能勾勒出图论研究问题的全貌,但从中可以看到,这些问题可看做一些事物以及它们之间存在的某种关系,图论就是研究事物以及它们之间联系的一门学科。在许多实例中,事物可用图的顶点表示,它们之间的相互联系可用顶点间的连线,即边表示,这种方法形象直观。任何一个能用二元关系描述的系统,不管它们是数学的、物理的或社会学的等等都可用图论提供数学模型。因此图论模型具有广泛的适用性,如计算机科学、运筹学、通信科学、电网络分析、量子物理、结构化学、建筑学、经济学、语言学、生物学、社会学、遗传学、法律学、人类学及定理证明等。

1.2　一些基本概念

1.2.1　图的概念

定义 1.1　有序三元组 $G=(V,E,\psi)$ 称为一个图,其中:

①$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 是有穷非空集,称为顶点集。

②E 称为边集,其中的元素叫做边。

③ψ 是从边集 E,到 V 中的有序的或无序的元素偶对的集合的映射,称为关联函数。

为了直观,可如下画一个图的图解,把 V 的元素用不重合的几何点表示,位置随意选择。当 $\psi(e)=uv$(或(u,v))时,u 与 v 之间连线,连线可直可曲,表示边 e,若是有序偶对(u,v),则还须在上述线上画上箭头指向 v。

例 1.4　设 $G=(V,E,\psi)$,其 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$,$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$,$\psi(e_1)=v_1v_2$;$\psi(e_2)=v_1v_3$;$\psi(e_3)=v_1v_3$;$\psi(e_4)=v_1v_4$;$\psi(e_5)=v_3v_3$。G 的图解如图 1.5 所示。应该指出,通常把图 G 写成(V,E)或简写成 G。图与其图解不是一回事,但它们是同构的。下面可把图解看成就是原来那个图。

定义 1.2　在图 $G=(V,E)$中,与 V 中的有序偶对应的边 $e(\psi(e)=(v_1,v_2))$,称为图 G 的有向边(或弧),而与 V 中的顶点的无序偶 v_iv_j 相对应的边 e,称为图 G 的无向边。每一条边都是无向边的图,称为无向图;每一条边都是有向边的图称为有向图;一些边是无向边,一些边是有向边的图称为混合图。

图 1.5 是一个无向图,图 1.6 是一个有向图。通常把满足 $\psi(e)=uv$ 的边 e 写成 $e=uv$。

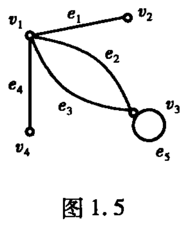


图 1.5

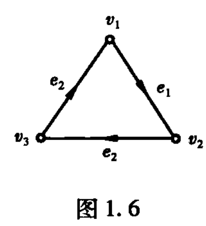


图 1.6

下面列出一些术语:

①若 $\psi(e)=uv$,称 e 与顶点 u,v 相关联。

②若 $\psi(e)=uv$,称 u 与 v 相邻。

③与同一顶点相关联的两边称为相邻边。

④两端点重合的边称为环。

⑤端点完全相同的两边称为重边。

⑥既无环又无重边的图，称为简单图。

⑦任二顶点相邻的简单图，称为完备图，记为 K_n，其中 n 为顶点的数目。

⑧若 $V=X\cup Y, X\cap Y=\varnothing$，$X$ 中任二顶点不相邻，Y 中任二顶点不相邻，称 G 为二部图；若 X 中的每一顶点皆与 Y 中一切顶点相邻时，G 称为完备二部图，记为 $K_{m,n}$。其中 m,n 分别为 X 与 Y 的顶点数目。

定义 1.3 设图 $G=(V,E,\psi)$ 和 $G_1=(V_1,E_1,\psi_1)$，若 $V_1\subseteq V, E_1\subseteq E$，且当 $e\in E_1$ 时，$\psi_1(e)=\psi(e)$，则称 G_1 是 G 的子图。特别地，若 $V_1=V$，则称 G_1 为 G 的生成子图。

定义 1.4 设 $V_1\subseteq V$，且 $V_1\neq\varnothing$，以 V_1 为顶点集，两个端点都在 V_1 中的边为边集的 G 的子图，称为 G 的由顶点集 V_1 导出的子图，记为 $G[V_1]$。

定义 1.5 设 $E_1\subseteq E$，且 E_1 为边集，E_1 的端点集为顶点集的图 G 的子图，称为 G 的由 E_1 边集导出的子图，记为 $G[E_1]$。

图 1.7 中绘出了这些子图。

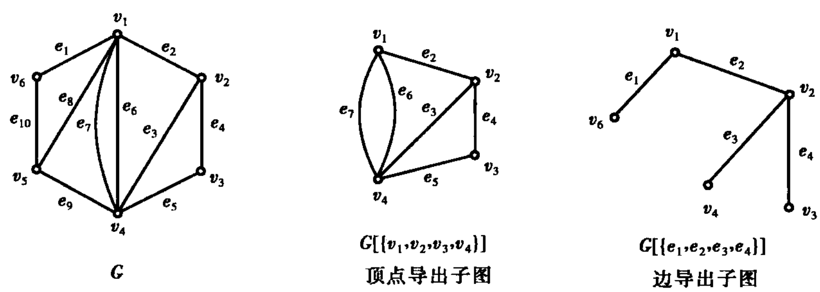


图 1.7

1.2.2 顶点的次数

在无向图中，与顶点 v 关联的边的数目（环算两次）称为 v 的次数，记为 $d(v)$。在有向图中，从 v 引出的边的数目称为 v 的出次，记为 $d^+(v)$；从 v 引入的边的数目称为 v 的入次，记为 $d^-(v)$；$d^-(v)+d^+(v)=d(v)$ 称为 v 的次数。分别用 $\delta(G)$，$\Delta(G)$ 表示无向图 G 的最小次数和最大次数，即

$$\delta(G)=\min\{d(v)\mid v\in V(G)\}$$
$$\Delta(G)=\max\{d(v)\mid v\in V(G)\}$$

类似地，用 $\delta^+(D)$，$\delta^-(D)$，$\Delta^+(D)$ 与 $\Delta^-(D)$ 依次表示有向图 D 的最小出次、最小入次、最大出次和最大入次。

例如，在图 1.8 的有向图中，$d^+(v_1)=3, d^-(v_1)=0, d^+(v_2)=1, d^-(v_1)=2, d^+(v_3)=2, d^-(v_3)=1, d^+(v_4)=0, d^-(v_4)=3, \delta^+(D)=0, \delta^-(D)=0, \Delta^+(D)=3, \Delta^-(D)=3$。

规定用记号 $\nu(G)$ 和 $\varepsilon(G)$ 分别表示图的顶点的数目和边的数目。

定理 1.1

$$\sum_{v\in V(G)} d(v)=2\varepsilon(G)$$

证　因每条边都与两个顶点相关联,每出现一条边,总次数就增加 2。所以总次数为

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2\varepsilon(G)$$

证毕。

推论 1.1　任何图中,奇次顶点的总数必为偶数。

证　设 V_1 和 V_2 分别表示图 G 中奇次顶点和偶次顶点的集合,则

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = \sum_{v \in V_1} d_G(v) + \sum_{v \in V_2} d_G(v) = 2\varepsilon$$

即为偶数。

又 $\sum_{v \in V_2} d_G(v)$ 为偶数,因此 $\sum_{v \in V_1} d_G(v)$ 也是偶数,从而奇次顶点的总数 $|V_1|$ 是偶数。证毕。

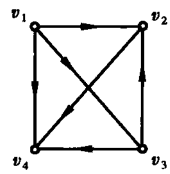


图 1.8

例 1.5　在一个晚会上,大家握手问好,试证。与奇数个人握过手的人数必为偶数。

证　构作一个图 G,以人为顶点,两顶点连边当且仅当顶点所代表的两人握过手,于是每人握过手的人数即为相应的顶点的次数,由推论 1.1,奇次顶点的个数是偶数,因此,与奇数个人握过手的人数必为偶数。

例 1.6　空间中不可能有这样的多面体存在,它们有奇数个面,而每个面又有奇数条边。

证　以此多面体的面集合为顶点集 $V(G)$。当且仅当两个面有公共棱时,在相应两顶点间连一边,得到图 G。依题意,$|V(G)|$ 是奇数,而且 $d(v)$ 是奇数,从而 $\sum_{v \in V(G)} d_G(v)$ 也是奇数,与定理 1.1 矛盾,故这种多面体不存在。

以后称 $d(v) \equiv k$ 的图为 k 正则图或 k 齐次图。

1.2.3　同构

在 1.1 节所举的例子都是把实际问题用一个图来描述,在这样的图中顶点可以代表任意客体,两顶点间的连线表示这两客体具有某种关系。图中顶点的位置,点对之间连线的形状都无关紧要,重要的是连接关系。

在图 1.9 中,图的变换的主要特点是保持连通性。原来相连的顶点不会因变换而断开,原来不相连的顶点不会因变换而相连,这种变换称为拓扑变换。两个图形能经拓扑变换变成同一形状,称为拓扑等价。

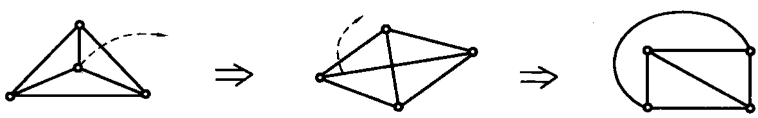


图 1.9

图的拓扑变换,可以设想连接顶点的边是由橡皮筋做的,当移动顶点的位置时,可以任意拉长、缩短和扭曲,但却不能扯断或接合起来。

图 1.9 中的 3 个拓扑等价图,虽然几何形状各异但实质上是同一个图,其连接关系完全一样。

定义 1.6　设有两个无向图 G 和 H,若顶点集之间存在一一对应关系,且对应顶点之间的

边也有一一对应的关系，则称图 G 与 H 同构，记为 $G \cong H$，对于有向图的同构，对应边的方向要求相同。

图 1.10 中的 3 个图 G_1, G_2, G_3，虽然形状各异，但如将 G_2 中 $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ 都相应换成 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$，且顶点的位置与 G_1 的一样；则不难看出它们是同一个图，即满足定义 1.6 的条件，因此，G_1 与 G_2 同构。同理，可说明 G_2 与 G_3 同构。

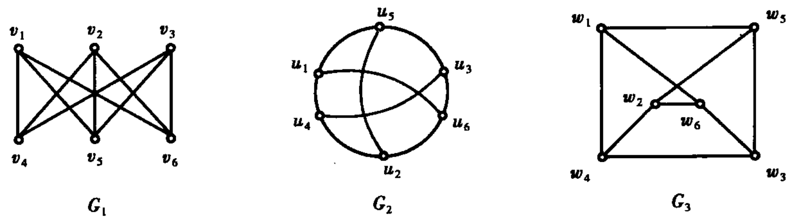


图 1.10

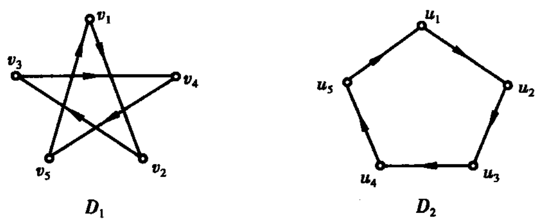


图 1.11

图 1.11 中的两有向图的顶点集之间可建立一一对应关系，v_1, v_2, v_3, v_4, v_5，依次对应 u_1, u_2, u_3, u_4, u_5，对应顶点间的边也一一对应，且方向一致，因此，D_1 与 D_2 同构。

两个同构的图，除了顶点与边的标号不同之外，其结构完全相同，它们具有完全相同的性质，对一个图的任何命题，也适用于它的同构图。

根据图同构的定义来判断图的同构不容易，至今也未曾有简单有效的法则来判定，这仍是图论中尚待解决的问题，图的同构有如下必要条件：

①两图的顶点数、边数相等。

②次数相同的顶点数也相等。

若某个必要条件不满足，则两图不同构；反之，则不一定。显然图 1.12 中的 G_1, G_2 满足上述两必要条件，但 G_1, G_2 却不同构。

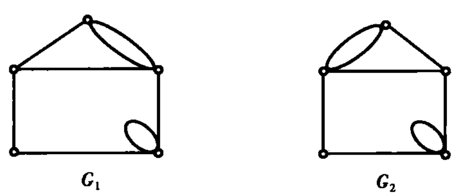


图 1.12

1.3　图的矩阵表示

为了便于利用计算机进行计算和处理，常要将图数字化，用矩阵来表示图。图的矩阵表示形式很多，本节只介绍邻接矩阵与关联矩阵。

1.3.1　邻接矩阵

定义 1.7(无向图的邻接矩阵)　设 $G=(V,E)$ 是一个无向图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，则 G 的邻接矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中：

$$a_{ij}=\begin{cases} m,\text{若 } v_i \text{ 与 } v_j \text{ 有 } m \text{ 条边连接;} \\ 0, v_i \text{ 与 } v_j \text{ 不相邻} \end{cases}$$

环算两次。

例 1.7　图 1.13 的邻接矩阵为

$$A=\begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} & \end{array}$$

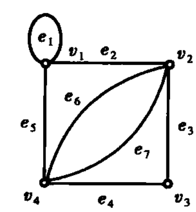


图 1.13

显然无向图的邻接矩阵是一个对称方阵，若 G 是无向图，则 A 每一行或每一列的元素之和是对应顶点的次数。若 G 是一个简单图，则 A 是一个对称(0,1)矩阵，且对角线元素全为 0。

定义 1.8(有向图的邻接矩阵)　设 $D=(V,E)$ 是一个有向图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，则 D 的邻接矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中 $a_{ij}=m$(若 v_i 指向 v_j 的孤有 m 条，m 可为 0)。

有向图的邻接矩阵不一定对称，第 i 行的元素之和为 v_i 的出次，第 j 列的元素之和为 v_j 的入次。

例 1.8　图 1.14 中的有向图的邻接矩阵为

$$A=\begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} & \end{array}$$

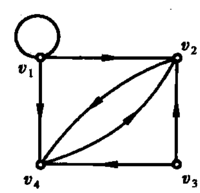


图 1.14

显然图与其邻接矩阵一一对应，有了图可写出其邻接矩阵；反之，有了邻接矩阵可作出相应的图。

定义 1.9(加权有向图的带权邻接矩阵)　若为有向图 $D=(V,E)$ 的每条边赋予一个数，则称 D 为加权有向图；设 $D=(V,E)$ 是一简单加权有向图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，则 D 的邻接矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}w_{ij},若(v_i,v_j)\in E 且 w_{ij}是它的权;\\0,若 i=j;\\\infty,若(v_i,v_j)\notin E\end{cases}$$

简单有向图是指无环、无同向重边的有向图。

如图 1.15 所示的加权有向图的邻接矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&2&\infty&\infty\\1&0&3&8\\5&\infty&0&4\\7&\infty&\infty&0\end{bmatrix}$$

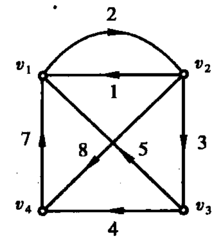


图 1.15

加权无向图的带权邻接矩阵类似,但为对称阵。

1.3.2 关联矩阵

定义 1.10(无向图的关联矩阵) 设 $G=(V,E)$ 是一个无向图,$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$,则 G 的关联矩阵 $M=(m_{ij})_{n\times m}$,其中:

$$m_{ij}=\begin{cases}1,若 v_i 与 e_j 相关联;\\2,若 e_j 是 v_i 上的环;\\0,若 v_i 与 e_j 不相关联\end{cases}$$

例 1.9 如图 1.13 所示的无向图的关联矩阵为

$$M=\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}e_1&e_2&e_3&e_4&e_5&e_6&e_7\end{array}\\ \begin{bmatrix}2&1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&1&1\\0&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&1&1\end{bmatrix}\end{array}$$

从定义不难看出,无向图的关联矩阵每一列的元素之和均为 2,且第 i 行的元素之和是 v_i 次数。简单图的关联矩阵是(0,1)矩阵。

定义 1.11(有向图的关联矩阵) 设 $D=(V,E)$ 是一有向无环图,$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$,则 D 的关联矩阵 $M=(m_{ij})_{n\times m}$,其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1,若 v_i 是 e_j 的起点;\\-1,若 v_i 是 e_j 的终点;\\0,其他\end{cases}$$

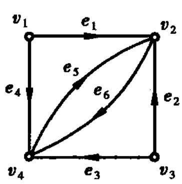


图 1.16

如图 1.16 所示的有向图的关联矩阵为

$$M=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\-1&-1&0&0&-1&1\\0&1&1&0&0&0\\0&0&-1&-1&1&-1\end{bmatrix}$$

有向图的关联矩阵每一列之和为零,每一行“1”的数目是对应顶点的出次,“-1”的数目是对应顶点的入次,完全为“0”的行对应的顶点是孤立点。