高等学校教材

高等数学

（基础部分）

上 册

清华大学数学教研組编

人 民 教 育 出 版 社

高等学校教材

高　等　数　学

（基础部分）

上　册

清华大学数学教研組編

人民教育出版社

本书是在清华大学数学教研組1958年所編高等数学讲义的基础上修訂而成的。1963年清华大学数学教研組程紫明等同志将书稿作了进一步整理修改后，由高等数学課程教材編审委員会委托浙江大学周茂清同志与西安交通大学陆庆乐同志进行初审，并經高等数学課程教材編审委員会复审，推荐作为高等工业学校高等数学試用教科书出版。

本书深度比較适合对工科学生所要求的水平，內容的讲解在詳略程度上比較恰当，除作为教学用书外，也可作为有关工程技术人員的自学用书或参考书。

本书分上下两册出版，上册內容是平面解析几何与一元函数的微积分学。

高 等 数 学

（基础部分）

上 册

清华大学数学教研組編

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

人 民 教 育 印 刷 厂 印 装

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 經 售

統一书号K13010·1136 开本 850×1168 1/32 印张 15

字数 333,000 印数 0,001—18,000 定价（5）¥1.40

1964年8月第1版 1964年8月北京第1次印刷

前　言

这本高等数学（基础部分）是我校高等数学課程的教材，由我校高等数学教研組集体編写．初稿完成于1958年，經过几年試用后，在1962年初根据教师們的意見作过一次修改．

这次出版前，又参照高等工业学校高等数学課程教材編审委員会的审閱意見，作了一次修改，但由于时間匆促，除了个別章节經过删減或改写外，主要只是作了些文字上、技术上的修訂．原稿中，有一部分內容超出“高等工业学校本科五年制高等数学（基础部分）教学大綱（試行草案）”，这次出版时，将这部分內容用小号字排印，供各专业按照需要选用．

近来各校在进一步貫徹执行“少而精”的原則，在精选內容方面取得不少成績．这本教材由于編写較早，与目前教学要求尚有一定距离，在采用这本教材时，希望根据“少而精”的原則和各校教学实踐的經驗，进一步精选教材内容，作出相应的調整与改动．

限于我們的水平，这本教材还存在許多缺点，我們殷切期望使用这本教材的教师同志們及讀者們提出意見，以便改进．

本书經高等工业学校高等数学課程教材編审委員会委托浙江大学周茂清先生及西安交通大学陆庆乐先生审查，他們提出了許多宝貴意見．人民教育出版社在准备出版方面給了我們大力的支持与帮助．我們在此深致謝意．

清华大学高等数学教研組

1964年5月

上册目录

預备知識

§1. 实数与数軸

数，最初产生于点算物件的个数，最基本的数是自然数：1, 2, 3, ….

数的运算中，最簡单的是加法运算．事实上，点算物件的个数也体現着一个一个地累加．

由于生产的逐漸发展，人們对客观事物的认識逐漸深入，数的运算扩充为四則运算，数的范圍亦由自然数扩充到整数：0, ±1, ±2, …，再扩充到有理数．所謂有理数，是指$\frac{q}{p}$这种形式的数，其中 p，q 都是整数，且 $p\neq 0$．有理数当然包括了所有整数，这是因为，当 $p=1$ 时，有理数就簡化为整数．

有理数可以用十进位小数来表示，这些小数或者是有尽的，或者是循环的．例如：

$$\frac{1}{4}=0.25,\quad \frac{5}{6}=0.8\dot{3},\quad \frac{22}{7}=3.\dot{1}4285\dot{7}.$$

反过来，任何一个有尽小数或循环小数也都可以化为有理数．

在实际生活中，常要測量一些物理量，如长度、面积、时間、溫度、重量等，取了一定的单位以后，这些量都可以被測量，測量的結果用数来表示．但有些量不能用有理数来表示，例如，对于两直角边皆为单位长度的直角三角形，其斜边的长度为$\sqrt{2}$个单位长度，$\sqrt{2}$不是一个有理数，又如半徑为单位长度的圓，它的面积是π个单位面积(单位长度的平方)，π 也不是一个有理数．像$\sqrt{2}$, π这样的数，如果用十进位小数来表示，都是不循环的无尽小数：

$$\sqrt{2}=1.4142435\cdots,\quad \pi=3.1415926\cdots,$$

这种不循环的无尽小数叫做无理数.

有理数与无理数統称为实数. 在实数范圍內, 可以进行更多种的运算, 如对于正的实数可以进行开方, 取对数, 对于任何实数可以取三角函数等. 在高等数学这一門課程中, 除了个别情况外, 所遇到的都是实数.

大家都知道, 在数学中經常采取数与形相結合的方法来研究問題, 例如, 三角函数这种数量关系与直角三角形紧密联系着, 又如, 数量間的比例关系与相似形有直接的联系. 通过图形我們不仅能直观地认識数量的抽象性质, 并且还可以利用图形解决一些数量的問題(如第六章中将要讲到的方程的图解法); 通过数量关系的研究也能解决一些重要的几何問題(如第五章中将要讲到如何利用数量关系来精密地作出曲綫的切綫). 現在我們研究实数, 也要設法将数与形結合起来.

設有一条无穷长的直綫, 习惯上都把它放在水平的位置, 在这直綫上任取一点 O, 称为原点, 在这直綫上規定好一个正方向 (习惯上規定向右的方向为正方向), 在这直綫上再規定好一个长度的单位. 这种具有原点、正方向与长度单位的直綫叫做数軸.

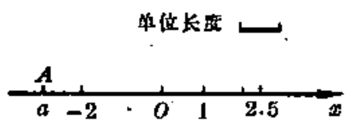

图 0.1

对于每一个实数 a, 我們可以在数軸上規定一个点 A 与它对应. 規定的方法是: 若 $a=0$, 則点 A 就是原点; 若 $a>0$, 則点 A 在原点之右, 且点 A 与原点間的距离等于 a 个单位长度; 若 $a<0$, 則点 A 在原点之左, 且点 A 与原点間的距离等于 $-a(-a>0)$ 个单位长度.

反过来說, 对于数軸上每一个点 A, 我們可以規定一个实数 a 与它对应. 規定的方法是: 若点 A 是原点, 則 $a=0$; 若点 A 在原点 O 之右, 則 $a=|OA|$ ($|OA|$ 表示点 A 与原点 O 之間的距离); 若点 A 在原点 O 之左, 則 $a=-|OA|$.

这样一来，所有实数与数轴上所有的点形成了一种一一对应的关系，从而实数的性质与数轴上的点的性质就发生了紧密的联系.

总起来說：有理数与无理数統称为实数．每一个实数可用十进位小数来表示，有理数可用有尽小数或循环小数来表示，无理数可用不循环的无尽小数来表示．在所有实数与数軸上所有点之間存在着一一对应的关系，也就是說，对于每一个实数 a，在数軸上有一个点 A 与它对应，对于数軸上每一个点 A，有一个实数 a 与它对应．这种对应关系可以用下面的数学式子来表示：

$$a=\begin{cases}|OA|, & \text{当点 } A \text{ 在原点 } O \text{ 之右},\\ 0, & \text{当点 } A \text{ 与原点 } O \text{ 重合},\\ -|OA|, & \text{当点 } A \text{ 在原点 } O \text{ 之左},\end{cases}$$

其中 $|OA|$ 表示点 A 与原点 O 之間的距离，也就是綫段 $\overline{OA}$ 的长度.

数軸也称为实数軸，也簡称为軸．与点 A 相对应的实数 a 称为点 A 在数軸上的坐标.

为了簡单計，我們时常不去区分一实数和它的对应点，而用同一符号来表示它們，我們有时說实数 a，也有时說点 a.

数軸上与有理数相对应的点叫做有理点，与无理数相对应的点叫做无理点.

显然，如实数 a 小于实数 b，則点 a 在点 b 的左方，且 $b-a$ 就是点 a 与点 b 間的距离.

现在我們进而提出实数的两个重要性质：

第一，有理数的稠密性．任給两个有理数 $a, b(a<b)$，則在 a, b 之間至少可以找到一个有理数．例如，a, b 的算术平均数 $c=\dfrac{a+b}{2}$ 就是 a，b 之間的一个有理数．同样，在 a, c 之間也至少可找到一个有理数．依次类推，可知 a, b 之間可以找到无穷多个有理数．所謂有理数的稠密性就是指：不論有理数 a, b 相差多么小，在 a, b 之間总可以找到无穷多

个有理数，也就是說，有理点在数軸上是到处稠密的.

用同样的方法可以論证，实数也具有稠密性.

第二，实数的連續性. 旣然实数与数軸上的点一一对应，可見实数充满数軸而沒有"空隙"，这就叫做实数的連續性. 有理数虽然稠密，但并不連續，例如$\sqrt{2}$，π 这些无理数就是有理数中的"空隙"，有理点之間有无穷多这种"空隙".

实数的連續性是实数的一个最根本的性质. 在以后的学习中常要用到这个性质.

§2. 絕对值

当我們对一个物理量进行直接测量时，常常是测不准的，有时偏大，有时偏小. 評定测量的准确度时，經常注意到的是偏离的大小，而不計較偏大了还是偏小了，处理这类問題时，常要用到实数的絕对值. 現在我們来介紹一下絕对值的定义及关于絕对值的一些性质.

定义. 对于实数 a，定义 a 的絕对值 $|a|$ 为

$$|a|=\begin{cases} a, & 若\ a>0, \\ 0, & 若\ a=0, \\ -a, & 若\ a<0. \end{cases}$$

例. $|2|=2$. $|-3.1|=3.1$. $|0|=0$.

容易看出，不論点 a 在原点的右方或左方，实数 a 的絕对值 $|a|$ 表示点 a 与原点間的距离.

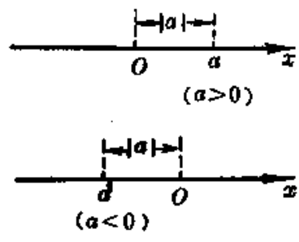

图 0.2

I. 关于絕对值的性质

以下关于絕对值的一些性质都是明显的.

(i) $|a|\geqslant 0$.

这个不等式表示 $|a|>0$ 或者 $|a|=0$.

(ii) $|-a|=|a|$.

这个等式表示 $-a$ 和 a 的絕对值相同.

(iii) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$.

$a>0$ 时，右边是等号，左边是不等号；$a<0$ 时，右边是不等号，左边是等号；$a=0$ 时，左边右边都是等号.

(iv) **对于实数** a, **如有一正数** ε, **使**

(1) $$|a|<\varepsilon,$$

则必然有

(2) $$-\varepsilon<a<\varepsilon.$$

其逆亦眞.

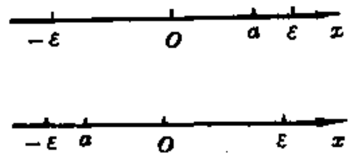

图 0.3

从几何上来看，(1) 表示点 a 与原点間的距离小于 ε，(2) 表示点 a 在点 $-\varepsilon$ 与点 ε 之間，所以，它們表示相同的意义.

(v) **对于实数** a, **如有一正数** N, **使**

(3) $$|a|>N,$$

则必然有

(4) $$a>N \text{ 或 } a<-N.$$

其逆亦眞.

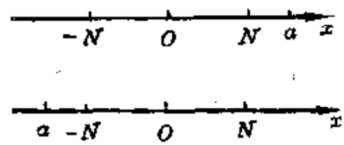

图 0.4

从几何上来看，(3) 表示点 a 与原点間的距离大于 N，(4) 表示点 a 在点 N 之右或在点 $-N$ 之左，它們也表示相同的意义.

II. 有关絕对值的四則运算

(i) **对于任意两个实数** a, b, **恒有**

(5) $$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

证明：根据性质(iii)，有

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|,$$
$$-|b|\leqslant b\leqslant|b|.$$

二式相加，得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|.$$

根据性质(iv)，即知

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

证毕.

例. 当 a,b 同号时，(5) 式中等号成立，如：

$$|3+5|=|3|+|5|,$$

$$|(-3)+(-5)|=|-3|+|-5|.$$

当 a,b 异号时，(5) 式中不等号成立，如：

$$|3+(-5)|<|3|+|-5|,$$

$$|(-3)+5|<|-3|+|5|.$$

(ii) **对于任意两个实数 a,b，恒有**

(6) $$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$

证明：因为

$$|a|=|a-b+b|\leqslant|a-b|+|b|,$$

故得

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$ 证毕.

(iii) **对于任意两个实数 a,b，恒有**

(7) $$|ab|=|a|\cdot|b|,\quad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|},\quad (b\neq 0).$$

根据絕对值的定义，这两个公式显然是正确的.

§3. 变量及变量的变化范圍

我們考察各种自然現象与技术过程时，常会遇到各种各样的量，如水庫中水的深度、丰产田的面积、汽車行駛时汽油的消耗量、机床安全运轉的时間、高炉的溫度、工厂內工人的名額等等. 这些量都有共同的特征，即采取了一定的单位以后，这些量都可以通过度量用数来表示. 这些数就叫做这些量所取的值.

在一定的运动过程中，有的量变化，即取不同的值，有的量则保持一个固定的值而不变，前者叫做变量，后者叫做常量. 例如人造卫星与地球間的距离是一个变量；在一定时期内，車間里的車床台数是一个常量. 若一个量在所討論的过程中变化很小，以至对某个实用目的来讲可以忽略不計时，我們也把它算作是常量. 例如，在不同的地点，落体

的重力加速度是不同的，因而它是个变量，但在較小地区中研究落体运动时，通常将重力加速度看成常量．因此，一个量是常量还是变量，要根据具体情况来决定．

为了控制技术过程，使它满足生产实践中所提出的种种要求，就必须把問題中所涉及的各个变量的变化情况弄清楚．例如，为了把电压控制在 220 伏左右，或把設备利用率提高到接近 100%，就必須弄清楚电压或設备利用率的变化情况，只有这样，才能拟定出适当的措施以达到上述目的．所以研究变量是数学中重要的課題．

变量的性质与类型是多种多样的，可以从各个不同的角度来加以考察．钟摆与鉛垂綫間的夹角是个連續变化着的变量，它的值是有界限的，譬如說总是介于$-\frac{\pi}{6}$与$\frac{\pi}{6}$之間．但多边形的边数这个变量则只能取 3, 4, 5…这些正整数值，它不是連續变化的，它的值可以无限增大，它不是有界的．由此可見，仅就变量的变化状态和变量所能取得的值的范圍来說，就有連續、不連續与有界、无界之分．若就变量的变化趋势来說，也有种种不同，例如，火車从出发站开出后与出发站的距离，一般是个不断增大的变量，某个工厂产品中的次品率也許是个不断减小的变量，而地球与太阳間的距离则是时而变大、时而变小的变量．再如就变量变化的速度来讲，也有快慢之别．系統地研究变量的这些特点，找出它們相互联系的規律，以便利用这些規律去解決生产中的問題，这就是我們学习这門課程的目的．

在今后的討論中，为了叙述的簡便起見，經常采用 x, y, z, θ, t 等字母来代表变量，a, b, c 等字母来代表常量．当然，这也不是一成不变的．

变量所能取得的值的范圍常可用不等式来表示．例如，若以 θ 代表钟摆与鉛垂綫間的夹角，則按上面一段所述的情况，θ 的变化范圍可以用不等式

$$-\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}$$

来表示.

为了看起来更加清楚，我們还常采用下述的几何表示法．把变量 x 所能取的每一个值都用数軸上的一个点来表示．于是变量就可用变点即通常所說的动点来表示，而常量就相当于数軸上的一个定点了．这时，变量的变化范圍也可在数軸上以图形表示出来．例如，若变量 x 的变化范圍在 a,b 二数之間，即 $a<x<b$，那么，相应的动点就在数軸上的点 a 与点 b 之間变化，这些点构成一个不包括端点在內的綫段，我們称之为开区間，并以記号 (a,b) 来記它．正像我們常把数 a 叫做点 a 一样，我們也常把不等式

$$a<x<b$$

叫做开区間．若变量 x 的变化范圍在 a,b 二数之間，且能取 a 与 b 二值，即 $a\leqslant x\leqslant b$，相应的动点就在数軸上构成一个包括端点在內的綫段，我們称之为閉区間 $[a,b]$．

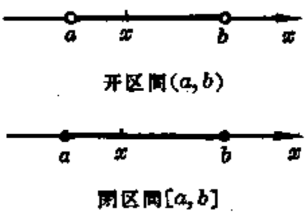

图 0.5

我們也常把不等式

$$a\leqslant x\leqslant b$$

叫做閉区間．

变量 x 的变化范圍也可以是半开区間

$$a<x\leqslant b,$$

記作 $(a,b]$（見图 0.6 上图），或半开区間

$$a\leqslant x<b,$$

記作 $[a,b)$（見图 0.6 下图）．

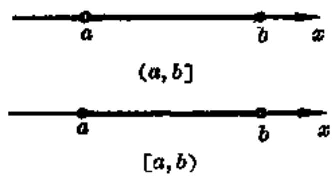

图 0.6

变量 x 的变化范圍也可以是无穷区間

$$x>a,\quad x\geqslant a,\quad x<a\ 或\ x\leqslant a,$$

分別記作 $(a,+\infty)$，$[a,+\infty)$，$(-\infty,a)$ 或

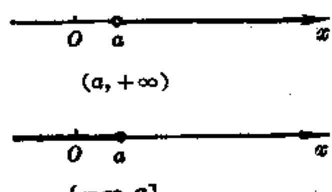

图 0.7

$(-\infty, a]$.

变量 x 也可能取得任何实数值，在这种情况下，我們将变量 x 的变化范圍記作

$$-\infty<x<+\infty,$$

亦可記作无穷区間$(-\infty, +\infty)$.

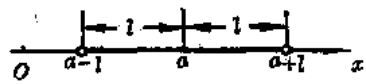

图 0.8

以点 a 为中点且长度为 $2l$ 的开区間叫做点 a 的 l 邻域. 这是以后經常要討論到的一种区間. 这种区間的端点是 $a-l$ 与 $a+l$，因此，这种区間可用不等式

$$a-l<x<a+l \tag{1}$$

来表示. 这种区間还有一种常見的表示法：将(1) 式改写为

$$-l<x-a<l, \tag{2}$$

根据絕对值的性质(iv)，(2)式相当于

$$|x-a|<l. \tag{3}$$

所以，点 a 的 l 邻域也可用不等式(3)来表示.

不等式(3)本身也有明显的几何意义. 容易看出，不論 x 和 a 取什么值，$|x-a|$ 总是表示点 a 与点 x 間的距离. 由此可知，不等式(3)表示动点 x 与定点 a 之間的距离小于 l(参看图 0.8).

例一. 点 2 的 l 邻域$\left(l=\frac{5}{2}\right)$，可表示为

$$2-\frac{5}{2}<x<2+\frac{5}{2} \text{ 即 } -\frac{1}{2}<x<\frac{9}{2},$$

这个区間也可表示为

$$|x-2|<\frac{5}{2}.$$

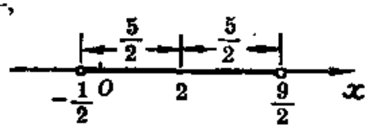

图 0.9

在图 0.9 中画出了这个区間，动点 x 位于这区間内时，动点 x 与定点 2 的距离小于$\frac{5}{2}$，也就是$|x-2|<\frac{5}{2}$.

对于任何开区間(a,b)，它的长度为$b-a$，它的半长为$\frac{1}{2}(b-a)$，它的中点的坐标是

$$a+\frac{1}{2}(b-a)=\frac{1}{2}(a+b),$$

故开区間(a,b)是点$\frac{1}{2}(a+b)$的l邻域$\left(l=\frac{b-a}{2}\right)$. 由此可知，开区間$(a,b)$即不等式

(4)　　$$a<x<b$$

可以表示为

(5)　　$$\left|x-\frac{a+b}{2}\right|<\frac{b-a}{2}.$$

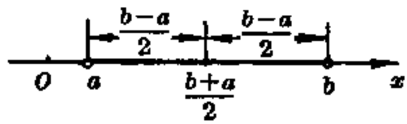

图　0.10

例二. 对于区間$(-4,2)$，它的长度为6，它的半长为3，它的中点的坐标为$-4+3=-1$，故这区間是点-1的l邻域$(l=3)$. 这个区間可以表示为不等式

$$-4<x<2,$$

也可以表示为不等式

$$|x-(-1)|<3 \text{ 即 } |x+1|<3.$$

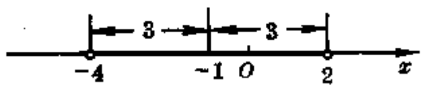

图　0.11

在图 0.11 中画出了这个区間，动点x位于这区間内时，动点x与定点-1的距离小于3，也就是$|x+1|<3$.

§4. 充分条件与必要条件

在初等数学与高等数学中，經常要討論两个数学判断之間的相互联系（所謂数学判断就是具有某种数学內容的一句話，这句話可能成立也可能不成立）. 例如，“某两角是对頂角”是一个数学判断，“某两角相等”也是一个数学判断，平面几何中有一条定理說：“如果某两角是对頂角，则此两角相等”. 这条定理闡明了这两个数学判断之間的联系，即由前一判断的成立能推断出后一判断的成立. 所謂充分条件与必要

条件无非是一种数学上的术語，用来簡单而明确地描述两个数学判断之間的邏輯关系。

我們来分析一下上面所举的平面几何定理：“如果某两角是对頂角，則此两角相等”。

这一定理表明：从“某两角是对頂角”的成立，能够推断“某两角相等”的成立。这就是說，“某两角是对頂角”构成了“某两角相等”的充分理由，有了“某两角是对頂角”这个充分理由，就足以說明“某两角相等”。因此，我們称“某两角是对頂角”成立是“某两角相等”成立的充分条件。

这一定理也表明：在“某两角是对頂角”成立的前提下，必然会产生“某两角相等”也成立的結論。这就是說，“某两角相等”是“某两角是对頂角”所必須具备的条件，缺少了“某两角相等”这个必須具备的条件，某两角就不可能是对頂角了。因此，我們称“某两角相等”成立是“某两角是对頂角”成立的必要条件。

定义. 如果从判断 A 成立能够推断判断 B 成立，我們称判断 A 成立是判断 B 成立的充分条件，判断 B 成立是判断 A 成立的必要条件。

若用字母 A 表示“判断 A 成立”这件事，用字母 B 表示“判断 B 成立”这件事，用“$A\Rightarrow B$”表示“从判断 A 成立能够推断判断 B 成立”，則上述定义就可簡述为：

定义. 如果 $A\Rightarrow B$，則称 A 是 B 的充分条件，B 是 A 的必要条件。

例一. 如果一个四边形为矩形，則此四边形的对角綫等长。由此可見，“四边形为矩形”是“四边形的对角綫等长”的充分条件，“四边形的对角綫等长”是“四边形为矩形”的必要条件。

例二. 如果一自然数的末位数字为 0，則此自然数能被 5 整除。由此可見，“自然数的末位数字为 0”是“自然数能被 5 整除”的充分条件，“自然数能被 5 整除”是“自然数的末位数为 0”的必要条件。

例三. 如果一个圓的两弦等长，則此两弦与圓心等远。由此可見，