北大燕园

2010年 李永乐·李正元

考研数学 1

数学复习全书

数学一

【理工类】

● 主编 北京大学 李正元
清华大学 李永乐
中国人民大学 袁荫棠

赠送《全书习题全解》
特殊防伪 盗版书将丢失重要信息

国家行政学院出版社

北大燕园
2010年李永乐·李正元考研数学①

数学复习全书

【理工类·数学一】

主编 北 京 大 学 李正元
清 华 大 学 李永乐
中国人民大学 袁荫棠
编者 (按姓氏笔画)
北 京 大 学 李正元
清 华 大 学 李永乐
北 京 大 学 刘西垣
中 国 人 民 大 学 严 颖
北 京 大 学 范培华
中 国 人 民 大 学 袁荫棠

国家行政学院出版社
·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

2000年全国硕士研究生入学考试数学复习全书:理工类/李正元等主编.
-北京:国家行政学院出版社,1999.4
ISBN 978-7-80140-053-6

Ⅰ.20...　Ⅱ.李...　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-学习参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第09620号

书　　名　数学复习全书【理工类·数学一】
作　　者　李正元　李永乐　袁荫棠
责任编辑　李锦慧
出版发行　国家行政学院出版社
　　　　　(北京市海淀区长春桥路6号　100089)
电　　话　(010)88517082
经　　销　新华书店
印　　刷　北京市朝阳印刷厂
版　　次　2009年2月北京第11版
印　　次　2009年2月北京第1次印刷
开　　本　787毫米×1092毫米　16开
印　　张　38.5
字　　数　1030千字
书　　号　ISBN 978-7-80140-053-6/O·1
定　　价　49.80元

再版前言

本书出版、修订多年来，深受全国广大考生的好评和厚爱，受到专家同行的肯定，认为本书在编写体例上有“特色”，在内容讲解、试题分析与解答上详尽、透彻、易懂，较“适合考生的需要”。我们从反馈的信息中获悉，除报考硕士研究生的考生将本书用作应试复习参考书外，工科类在读大学生也将本书作为数学的学习辅导资料，而教师则作为主要的教学参考用书之一。这既是对我们工作的肯定和鼓励，也是一种鞭策，促使我们对本书进行一次全面修订，以便及时反映当前研究生最新考试信息，更好地适应和满足广大考生和读者考试复习的需要。2010 年《数学复习全书》将以更高的质量和新的面貌呈现在广大学生的面前。

本书 2010 年版是在 2009 年版的基础上进行修订的，更加完善，更具有针对性和适用性。

高等数学部分：按考试大纲的要求及绝大多数考生系统复习的需要，本书进行了调整，宗旨是重点内容重点讲解，如：求极限的方法，求积分（一元、多元函数）的方法，牛顿-莱布尼兹公式及其应用，二重积分的计算与应用，泰勒公式及其应用，求幂级数的收敛域或收敛区间，幂级数的求和，求函数的幂级数展开式等单独分离出来进行举例讲解，同时调换并增加了若干典型例题，并修改了部分例题的解法，使之更简捷，更易掌握。

线性代数部分：主要是针对一些重点概念和公式的运用，调换并增加了若干例题进行讲解，使考生对这些重点概念和公式能彻底理解、吃透，对一些常考题型，如：抽象行列式的计算，有关伴随矩阵的命题，n 阶矩阵的特征值和特征向量以及线性相关与无关的证明、基础解系的证明等题型的解题方法和技巧进一步作了较详尽的归纳总结，并给典型例题进行讲解，消除考生对这些重要概念和公式的运用和常考题型解题方法的疑惑，以便考生在考试中应对自如，提高应试水平。

概率统计部分：与高等数学部分一样也进行了调整，调整后更适合考生进行系统复习，同时对重点概念、公式和常考题型从多角度命制典型例题进行讲解，以提高考生运用概念、公式综合分析能力，从而取得好成绩。

特别需要强调的是，本书题型训练试题均给出了详细解答（见赠书）。

本书高等数学部分由**北京大学李正元**修改完成，线性代数部分由**清华大学李永乐**修改完成，概率论与数理统计部分由**中国人民大学袁荫棠**修改完成。

编者

2009 年 2 月

前　言

为了使考研同学能在较短时间内全面复习数学，达到硕士学习阶段应具备的数学能力，提高考研应试水平，以合格的数学成绩任国家挑选，作者根据教育部制订的《数学考试大纲》的要求和最新精神，深入研究了近年来考研命题的特点及动态，并结合作者多年来数学阅卷以及全国大部分城市“考研班”辅导的经验，编写了这本《考研数学复习全书》及其姊妹篇《考研数学全真模拟经典400题》。在编写时，作者特别注重与学生的实际相结合，注重与考研的要求相结合。

本书每章均由以下四个部分构成：

一、内容概要与重难点提示——编写该部分的目的主要使考生能明确本章的重点、难点及常考点，让考生弄清各知识点之间的相互联系，以便对本章内容有一个全局性的认识和把握。

二、考核知识要点讲解——本部分对大纲所要求的知识点进行了全面地阐述，并对考试重点、难点以及常考点进行了剖析，指出了历届考生在运用基本概念、公式、定理等知识解题时普遍存在的问题及常犯的错误，同时给出了相应的注意事项，以加深考生对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确应用。

三、常考题型及其解题方法与技巧——本部分对历年统考中常见题型进行了归纳分类，归纳总结了各种题型的解题方法，注重一题多解，以期开阔考生的解题思路，使所学知识融会贯通，并能综合、灵活地解决问题。

四、题型训练及参考答案——本部分精选了适量的自测题，并附有参考答案和解题提示。只有适量的练习才能巩固所学知识，复习数学必须做题。为了让考生更好地巩固所学知识，提高实际解题能力，作者特优化设计了与真题相仿的实战训练题编写在《考研数学全真模拟经典400题》一书中，以供考生选用。

特别需要强调的是，在’98北大百年校庆之际，我们北大数学系63届校友聚会于北大燕园，畅谈中得知我们当中许多同学都在从事本科及研究生数学教学与数学研究工作，并有多年考研辅导的经验以及参加研究生入学考试阅卷的经历，对各类院校的考生有广泛的接触与了解，深知考生在考研数学备考中所面临的困惑。为了帮助考生全面系统并有针对性地复习，在大家的一致建议下，由我们执笔编写了这本《考研数学复习全书》及其姊妹篇《考研数学全真模拟经典400题》，期望对广大考生备考能有所裨益。

本书是考研应试者的良师益友，也是各类院校的学生自学数学、提高数学水平和教师进行教学辅导的一本极有价值的参考书。

由于时间仓促，书中疏漏之处在所难免，诚请专家和读者指正。

编　者

1999年4月于北大燕园

目　录

第一篇　高等数学

第二篇 线性代数

第三篇 概率论与数理统计

第一篇　高等数学

第一章　极限、连续与求极限的方法

内容概要与重难点提示

1. 微积分中研究的对象是函数．函数概念的实质是变量之间确定的对应关系．变量之间是否有函数关系，就看是否存在一种对应规则，使得其中一个量或几个量定了，另一个量也就被唯一确定，前者是一元函数，后者是多元函数．

函数这部分的重点是：复合函数、反函数和分段函数及函数记号的运算．（这部分内容贯穿全书，不另行复习．）

2. 极限是微积分的理论基础．研究函数的性质实质上是研究各种类型的极限，如连续、导数、定积分、级数等等．由此可见极限的重要性．本章的重点内容是极限．既要准确理解极限的概念、性质和极限存在的条件，又要能准确地求出各种极限．求极限的方法很多，综合起来主要有：

① 利用极限的四则运算与幂指数运算法则；　② 利用函数的连续性；

③ 利用变量替换与两个重要极限；　④ 利用等价无穷小因子替换；

⑤ 利用洛必达法则；　⑥ 分别求左、右极限；

⑦ 数列极限转化为函数极限；　⑧ 利用适当放大缩小法；

⑨ 对递归数列先证明极限存在（常用到"单调有界数列有极限"的准则），再利用递归关系求出极限；

⑩ 利用定积分求 n 项和式的极限；　⑪ 利用泰勒公式；　⑫ 利用导数的定义求极限．

3. 无穷小就是极限为零的变量．极限问题可归结为无穷小问题．极限方法的重要部分是无穷小分析，或说无穷小阶的估计与分析．要理解无穷小及其阶的概念，学会比较无穷小的阶及确定无穷小阶的方法，会用等价无穷小因子替换求极限．

4. 我们研究的对象是连续函数或除若干点外是连续的函数．由于函数的连续性是通过极限定义的，所以判断函数是否连续及函数间断点的类型等问题本质上仍是求极限．因此这部分也是本章的重点．要掌握判断函数连续性及间断点类型的方法，特别是分段函数在连接点处的连续性．

函数的其他许多性质都与连续性有关，因此我们要了解连续函数的重要性质——有界闭区间上连续函数的有界性定理，最大值、最小值定理和中间值（介值）定理，并会应用这些性质．

考核知识要点讲解

一、极限的概念与性质

（一）极限的定义

【定义 1.1】　$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \varepsilon$．

若 x_n 存在极限（有限数），又称 $\{x_n\}$ 收敛，否则称 $\{x_n\}$ 发散．

【定义 1.2】 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$： $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 正数 X，当 $|x| > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

类似可定义： $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$， $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

【定义 1.3】 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$： $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 正数 δ，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

类似可定义 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时右极限与左极限：

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A,\quad f(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = A.$$

（二）极限的基本性质与两个重要极限

▶1. 数列极限的基本性质

【定理 1.1】（极限的不等式性质） 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$， $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$，

若 $a > b$，则 $\exists N$，当 $n > N$ 时，$x_n > y_n$； 若 $n > N$ 时，$x_n \geqslant y_n$，则 $a \geqslant b$.

【定理 1.2】（收敛数列的有界性） 设 x_n 收敛，则 x_n 有界（即 $\exists$ 常数 $M > 0$，$|x_n| \leqslant M$，$n = 1,2,\cdots$）.

▶2. 函数极限的基本性质

【定理 1.3】（极限的不等式性质） 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$，

若 $A > B$，则 $\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$f(x) > g(x)$；

若 $f(x) \geqslant g(x)$ $(0 < |x - x_0| < \delta)$，则 $A \geqslant B$.

【推论】（极限的保号性） 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，若 $A > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$f(x) > 0$；若 $f(x) \geqslant 0$ $(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow A \geqslant 0$.

【定理 1.4】（存在极限的函数局部有界性） 设存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域 $U_0(x_0,\delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 内有界，即 $\exists \delta > 0, M > 0$，使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x)| \leqslant M$.

【注】 其他极限过程如 $x \to x_0 + 0, x \to x_0 - 0, x \to +\infty, x \to -\infty$ 等等也有类似的结论.

▶3. 两个重要极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \quad \left(\lim_{x\to0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e},\quad \lim_{x\to0}\frac{\ln(1 + x)}{x} = 1\right) \tag{1.1}$$

【例 1.1】 判断下列结论是否正确，并证明你的判断.

（Ⅰ）若 $x_n < y_n (n > N)$，又存在极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$， $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = B$，则 $A < B$；

（Ⅱ）设 $f(x)$ 定义在 (a,b)，又 $c \in (a,b)$，并存在极限 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 有界；

（Ⅲ）若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$，则 $\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - a| < \delta$ 时 $\dfrac{1}{f(x)}$ 有界.

【解】 （Ⅰ）不正确. 在题设下只能保证 $A \leqslant B$，不能保证 $A < B$. 例如，$x_n = \dfrac{1}{n}$，$y_n = \dfrac{2}{n}$，则 $x_n < y_n$，而 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.

评注 对不等式 $x_n < y_n (n > N)$ 两边取极限时（以极限存在为前提），除保持不等号外还要带上等号，即 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

（Ⅱ）不正确. 这时只能保证：$\exists c$ 的一个空心邻域 $U_0(c,\delta) = \{x \mid 0 < |x - c| < \delta\}$，$f(x)$ 在 $U_0(c,$

$\delta)$ 有界,不能保证 $f(x)$ 在 (a,b) 有界. 例如: $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $(a,b)=(0,1)$,取 $c\in(0,1)$,则 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\dfrac{1}{c}$,但 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 无界.

(Ⅲ) 正确. 因为 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$,由存在极限的函数的局部有界性 $\Rightarrow\exists\delta>0$,当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $\dfrac{1}{f(x)}$ 有界.

二、极限存在性的判别(极限存在的两个准则)

(一) 夹逼定理

【定理 1.5】(数列情形) 若 $\exists N$,当 $n>N$ 时,$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,且有 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=a$,则

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=a.$$

【定理 1.6】(函数情形) 设 $\exists\delta>0$,$0<|x-x_0|<\delta$ 时,$h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,又 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

【注】 其他极限过程也有类似的结论.

(二) 单调有界数列必收敛定理

【定理 1.7】 若数列 $\{x_n\}$ 单调上升有上界,即 $x_{n+1}\geqslant x_n$ $(n=1,2,\cdots)$,并存在一个数 M,使得对一切的 n 有 $x_n\leqslant M$,则 $\{x_n\}$ 收敛. 即存在一个数 a,使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$,且有 $x_n\leqslant a$ $(n=1,2,\cdots)$.

若数列 $\{x_n\}$ 单调下降有下界,即 $x_{n+1}\leqslant x_n(n=1,2,\cdots)$,并存在一个数 m,使得对一切的 n 有 $x_n\geqslant m$,则 $\{x_n\}$ 收敛. 即存在一个数 a,使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$,且有 $x_n\geqslant a$ $(n=1,2,\cdots)$.

(三) 单侧极限与双侧极限的关系

【定理 1.8】 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=A$.

对于分段函数 $f(x)=\begin{cases}g(x), & x_0-\delta<x<x_0,\\ h(x), & x_0<x<x_0+\delta,\end{cases}$ 考察 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是否存在就要分别求

$$\lim_{x\to x_0+}f(x)=\lim_{x\to x_0+}h(x)\quad 与\quad \lim_{x\to x_0-}f(x)=\lim_{x\to x_0-}g(x).$$

【例 1.2】 设 $f(x)=\begin{cases}2(x+1)\arctan\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{\ln(1+ax^2)}{x\sin x}, & x<0,\end{cases}$ 问 a 为何值时 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在.

【分析】 分别求右、左极限 $f(0+0)$ 与 $f(0-0)$,由 $f(0+0)=f(0-0)$ 定出 a 值.

【解】 $f(0+0)=\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}2(x+1)\arctan\dfrac{1}{x}=2\lim\limits_{x\to0+}\arctan\dfrac{1}{x}=\pi$,

$$f(0-0)=\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+ax^2)}{ax^2}\cdot\frac{ax^2}{x\sin x}\right]=1\cdot a\cdot1=a(a\neq0),$$

$f(0-0)=0 \quad (a=0)$.

由 $f(0+0)=f(0-0)$，得 $a=\pi$. 因此，仅当 $a=\pi$ 时，存在 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\pi$.

【例 1.3】 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 e^{\frac{1}{x-1}}$ 是

(A) 0.　　(B) $-\infty$.　　(C) $+\infty$.　　(D) 不存在但不是 ∞.

【分析】 因 $\lim\limits_{t\to+\infty}e^t=+\infty$，$\lim\limits_{t\to-\infty}e^t=0$，故要分别考察左、右极限. 由于

$$\lim_{x\to 1+0}(x-1)^2 e^{\frac{1}{x-1}} \xlongequal{t=\frac{1}{x-1}} \lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to 1-0}(x-1)^2 e^{\frac{1}{x-1}} \xlongequal{t=\frac{1}{x-1}} \lim_{t\to-\infty}\frac{e^t}{t^2}=0,$$

因此选(D).

(四) 证明一元函数 $f(x)$ 的极限不存在常用的两种方法

方法 1°　若 $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在. 当 $x\to\infty$ 时的极限式中含有 $a^x(a>0, a\neq 1)$，或 $\arctan x$，$\operatorname{arccot}x$，一定要分别求出 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 的极限值，若两者相等，则 $x\to\infty$ 时的极限存在，否则不存在.

方法 2°　若 $\exists x_n\to x_0, x_n\neq x_0$，$\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)$ 不存在或 $\exists x_n\to x_0(x_n\neq x_0)$，$y_n\to x_0(y_n\neq x_0)$，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to+\infty}f(y_n)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

【例 1.4】 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

【证明】 取 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$，$y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，则均有 $x_n\to 0, y_n\to 0\ (n\to+\infty)$，但

$$\lim_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{x_n}=0,\quad \lim_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{y_n}=1,\text{因此}\quad \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\text{不存在}.$$

评注　类似可证：$\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在.

三、求极限的方法

(一) 利用极限的四则运算与幂指数运算法则求极限

【定理 1.9】

(1)　设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$，则

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,\quad \lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0),\qquad \lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=A^B(A>0).$$

(2)　设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $g(x)$ 有界，则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]=0$.

(3)　设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty(+\infty)$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty(+\infty)$ 或 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\neq 0\ (A>0)$，则

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\infty\quad(+\infty).$$

(4) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty(+\infty)$,当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $g(x)$ 有界,则

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty\ (+\infty).$$

(5) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A,\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$,则

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\begin{cases}0, & 0<A<1,\\ +\infty, & A>1;\end{cases}\quad \lim_{x\to a}g(x)^{f(x)}=\begin{cases}+\infty, & A>0,\\ 0, & A<0.\end{cases}$$

(6) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0,f(x)>0(0<|x-a|<\delta),\lim\limits_{x\to a}g(x)=B\neq 0$,则

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\begin{cases}0, & B>0,\\ +\infty, & B<0.\end{cases}$$

【注】 ① 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A,\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 不存在也不为 ∞,则$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]$ 不存在也不为 ∞;若又有 $A\neq 0$,则$\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x),\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 均不存在也不为 ∞. 但是,当$\lim\limits_{x\to a}f(x),\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 都不存在且不为 ∞ 时,$f(x)\pm g(x),f(x)g(x),\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 的极限均不能确定,要作具体分析.

② 对$\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^\infty,\infty^0$ 等各类未定式不能直接用上述运算法则. 在未定式中,最基本的是$\dfrac{0}{0}$与$\dfrac{\infty}{\infty}$型,其他类型应经恒等变形转化为基本类型之一.

求$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限的方法有多种(参看题型三),其中一种技巧是设法消去分子、分母中的极限为零或 ∞ 因子,于是转化为可以直接用四则运算法则的情形(后面还介绍其他方法).

【例 1.5】 求 $w=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^x(2e^x+1)}{[1+(e^x+1)^2](1+e^x)}$.

【解】 这是求$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限,用相消法,分子、分母同除以$(e^x)^2$得

$$w=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x+1}\cdot\frac{2+e^{-x}}{e^{-2x}+(1+e^{-x})^2}=0\times 2=0,$$

其中 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x+1}=0$(用洛必达法则).

(二)利用函数的连续性求极限

(1) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续,按定义则有 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$. 因此若不用定义可判断函数连续时,那么对连续函数求极限就是用代入法求函数值.

(2) 一切初等函数在其定义域区间上连续. 因此,若 $f(x)$ 是初等函数,a 属于其定义域区间,则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

(3) 设$\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$,若补充定义 $g(a)=A$,则 $g(x)$ 在 $x=a$ 连续. 若又有 $y=f(u)$ 在 $u=A$ 处连续,则由复合函数的连续性得$\lim\limits_{x\to a}f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to a}g(x))=f(A)$.

（三）利用变量替换法与两个重要极限求极限

通过变量替换，把求某个极限转化为求另一个极限，若后者是已知的，则问题就解决了.

(1) 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$，$\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=A$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(\varphi(x))\xlongequal{u=\varphi(x)}\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=A$.

（若把 $x\to+\infty$ 改为 $x\to-\infty$ 或 $x\to x_0$，上述结论仍成立.）

(2) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，$f(u)$ 在 u_0 连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))\xlongequal[x\to x_0\text{ 时 } u\to u_0]{u=\varphi(x)}\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$.

重要极限与变量替换法相结合可求下列极限：

(1) 诸如：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1,\quad \lim_{x\to x_0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e},\quad \lim_{x\to x_0}(1+\varphi(x))^{\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}^A,$$

其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=A$. 极限过程 $x\to x_0$ 改为其他情形也有类似结论.

(2) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，则求 1^∞ 型极限

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[1+(f(x)-1)\right]^{\frac{1}{f(x)-1}\cdot g(x)(f(x)-1)}=\mathrm{e}^A,$$

转化为求 $0\cdot\infty$ 型极限 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)(f(x)-1)=A$.

【例 1.6】 求 $w=\lim\limits_{x\to\infty}x^2(3^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x+1}})$.

【解】 先改写成

$$w=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x+1)}\cdot 3^{\frac{1}{x+1}}(3^{\frac{1}{x(x+1)}}-1)x(x+1).$$

作变量替换，令 $t=3^{\frac{1}{x(x+1)}}-1$，则 $x\to\infty$ 时 $t\to0$ 且 $x(x+1)=\dfrac{\ln3}{\ln(1+t)}$，于是

$$w=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x+1)}\cdot\lim_{x\to\infty}3^{\frac{1}{x+1}}\cdot\lim_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\ln3=\ln3.$$

【例 1.7】 求 $w=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}\right)^x$.

【解】 这是 1^∞ 型极限，改写成 $w=\lim\limits_{x\to\infty}2\left[\left(1+\dfrac{1}{x}2^{-\frac{1}{x}}\right)^{x\cdot2^{\frac{1}{x}}}\right]^{2^{-\frac{1}{x}}}=2(\mathrm{e})^{2^0}=2\mathrm{e}$.

（四）利用等价无穷小因子替换求极限

若 $x\to a$ 时，无穷小 $\alpha(x)\sim\alpha^*(x)$，$\beta(x)\sim\beta^*(x)$，（即 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha^*(x)}=1$，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\beta^*(x)}=1$），则

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)u(x)}{\beta(x)v(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha^*(x)u(x)}{\beta^*(x)v(x)}.\text{（等式两边其中之一极限存在或为 }\infty\text{，则另一也是且相等）}\tag{1.2}$$

该结论表明：在求极限过程中等价无穷小因子可以替换.

利用等价无穷小因子替换求极限，可大大减少计算量. 但利用等价无穷小因子替换求极限应注意下面两点：

(1) 只要求在求极限的乘除运算中使用等价无穷小因子替换，不要在求极限的加减运算中使用，在加减法中等价无穷小的替换是有条件的，我们不去讨论.

(2) 要熟练应用后面(1.3)所列重要等价无穷小.

【例 1.8】 求下列极限：

（Ⅰ） $w=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^4}-1}{1-\cos(x\sqrt{1-\cos x})}$； （Ⅱ） $w=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1}{\ln(1+2x^3)}$.

【解】（Ⅰ）注意 $x\to0$ 时，$1-\cos(x\sqrt{1-\cos x})\sim\dfrac{1}{2}x^2(1-\cos x)\sim\dfrac{1}{4}x^4$，$e^{x^4}-1\sim x^4$，$\Rightarrow$

$$w=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{\frac{1}{4}x^4}=4.$$

评注 设 $x\to a$ 时，$\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma\Rightarrow\alpha\sim\gamma(x\to a)$.

（Ⅱ）因为 $\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1\sim\ln\left[\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1+1\right]=2x\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{2}\right)\sim2x\cdot\dfrac{\cos x-1}{2}\sim x\cdot\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)=-\dfrac{1}{2}x^3(x\to0)$，$\ln(1+2x^3)\sim2x^3(x\to0)$，所以

$$w=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1}{\ln(1+2x^3)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^3}{2x^3}=-\frac{1}{4}.$$

（五）利用洛必达法则求未定式的极限

求 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式更常用的方法是用洛必达法则．具体方法如下：

【定理 1.10】 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0\ (\infty)$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0\ (\infty)$；$f(x)$，$g(x)$ 在 $x=a$ 的空心邻域可导，$g'(x)\neq0$；$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$，其中 A 可以是有限数也可以是 ∞.

【注】 将 $x\to a$ 改为 $x\to a+$ 或 $x\to a-$，或 $x\to\infty$ 等也有相应的洛必达法则．

应用上述法则时应注意：

① 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在也不为 ∞，不能说明 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在．

例如，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=1$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{x'}$ 即 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\cos x)$ 不存在．

② 要验证应用法则的条件．例如，以下运算是错误的：

$$\lim_{x\to0}\frac{x+\cos x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(x+\cos x)'}{x'}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sin x}{1}=1.$$

事实上 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\cos x}{x}=\infty$，这里 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\cos x}{x}$ 不是 $\dfrac{0}{0}$ 型也不是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型．

③ 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 还是 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，则可连续用洛必达法则，只要符合条件，一直可用到求出极限为止．

④ 其他类型的未定式（$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，0^0，1^∞，∞^0 等）先化成 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，再用洛必达法则．

⑤ 使用洛必达法则也要用到一些技巧．如结合应用变量替换、等价无穷小因子替换、极限的四则运算法则、有确定非零极限的因子应先求出等．

【例 1.9】 求 $w=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2x)}{x\sin^3x}$.

【解】 先作恒等变形

$$w = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x})}{x\sin^3 x}.$$

然后用等价无穷小因子替换:$x\to 0$ 时

$$\sin^3 x \sim x^3,\quad \ln(1+\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}) \sim \frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x} \sim x^2-\sin^2 x,$$

于是 $$w = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}.$$

最后用洛必达法则得

$$w = 2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

【例 1.10】 求 $w = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

【解】 属 $\infty-\infty$ 型. 先通分化成$\frac{0}{0}$型,则有 $w = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ln(1+x)}$.

如直接用洛必达法则比较麻烦,若注意到

$$(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad 则\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1.$$

即 $\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \sim x\ (x\to 0)$,又 $\ln(1+x) \sim x\ (x\to 0)$,因此对分母先作等价无穷小因子替换后再用洛必达法则得

$$w = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-(1+x)}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1) = -\frac{1}{2}.$$

【例 1.11】 求 $w = \lim_{x\to 0}(\frac{\arctan x}{x})^{1/x^2}$.

【分析】 属 1^∞ 型. 对于指数型未定式,总可先用公式 $u^v = e^{v\ln u}$,然后再用洛必达法则,并注意 $\arctan x \sim x(x\to 0)$.

【解】 由于 $(\frac{\arctan x}{x})^{1/x^2} = e^{\frac{1}{x^2}\cdot\ln(\frac{\arctan x}{x})}$,而

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\frac{\arctan x}{x}) \xlongequal{\frac{0}{0}} \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\ln|\arctan x|-\ln|x|) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}(\frac{1}{\arctan x}\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x})$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x^2)}\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x^2)\arctan x}{x^3} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-2x\arctan x}{3x\cdot x} = -\frac{1}{3}.$$

或者 $\ln(\frac{\arctan x}{x}) = \ln(\frac{\arctan x}{x}-1+1) \sim \frac{\arctan x - x}{x}$ $(x\to 0)$,若用该等价无穷小因子替换(可简化计算)有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{3x^2(1+x^2)} = -\frac{1}{3}.$$

因此 $w = e^{-\frac{1}{3}}$.