

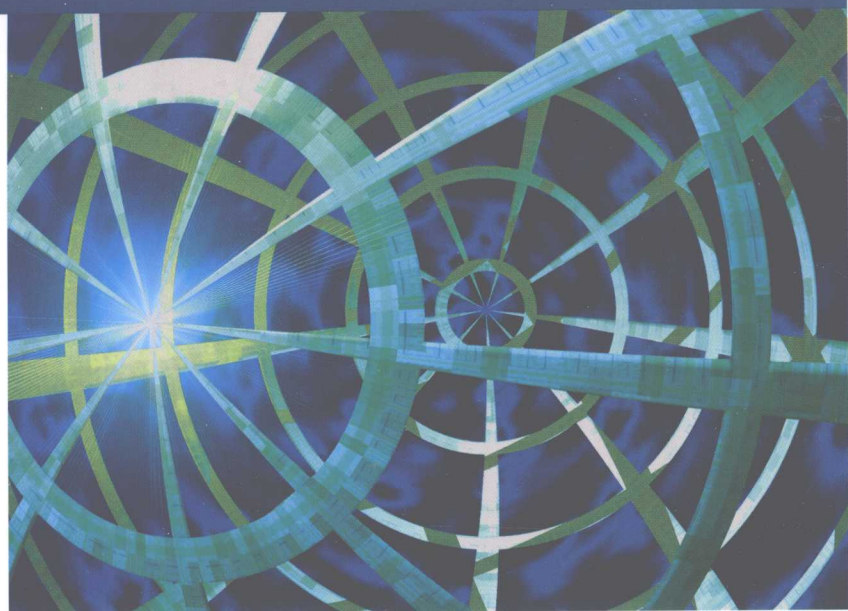


数学方法论应用传播丛书

丛书主编 徐沥泉 徐鸿超

学会抽象与建模

Learning Abstraction and Mathematical Modeling



钱铭 陈伟斌 袁渊 著

大连理工大学出版社 | DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

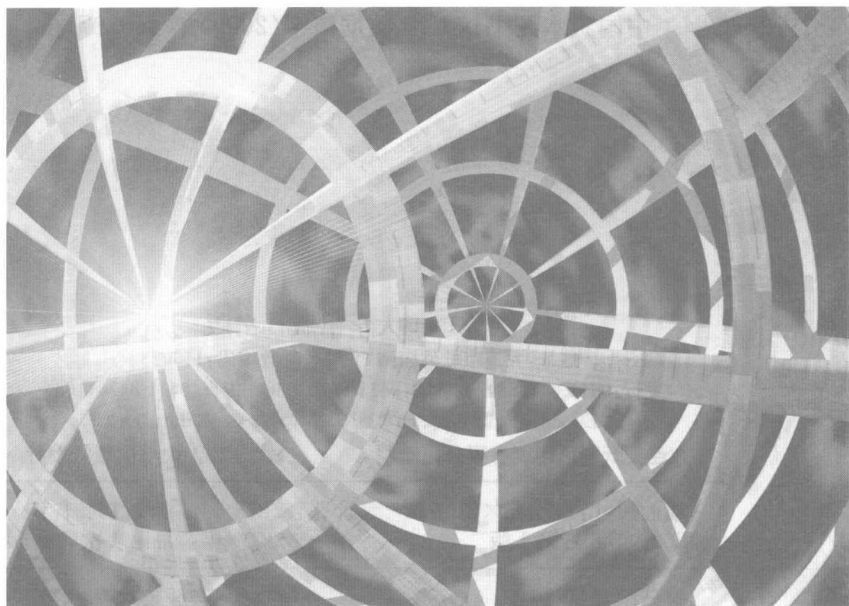


数学方法论应用传播丛书

丛书主编 徐沥泉 徐鸿超

学会抽象与建模

Learning Abstraction and Mathematical Modeling



钱铭 陈伟斌 袁渊 著

大连理工大学出版社 DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

学会抽象与建模/钱铭,陈伟斌,袁渊著. —大连:
大连理工大学出版社,2009.8
(数学方法论应用传播丛书)
ISBN 978-7-5611-5049-8

I. 学… II. ①钱…②陈…③袁… III. ①数学—
思想方法②数学模型 IV. O1-0 O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 146207 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn URL:<http://www.dutp.cn>

大连美跃彩色印刷有限公司印刷

大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm	印张:8.875	字数:164 千字
2009 年 8 月第 1 版	2009 年 8 月第 1 次印刷	

责任编辑:王颖鑫

责任校对:骁 杰

封面设计:孙宝福

ISBN 978-7-5611-5049-8

定价:25.00 元



数学方法论应用传播丛书

编写委员会

丛书顾问(按姓氏笔画排序)

王梓坤 刘绍学 周春荔 林夏水

丛书主编 徐沥泉 徐鸿超

执行主编 唐志华

委员(按姓氏笔画排序)

于世章	王民珠	王光明	朱恒杰
何万生	吴勤文	杨世明	杨冠夏
陈安宁	陈远刚	周公贤	周家禧
徐献卿	袁 渊	郭 璋	顾晓华
储东花	谢 祥	裴光亚	

“数学方法论应用传播丛书”题词

推广数学方法论二十年

徐利治

2009年8月于大连

总 序

“太湖烟波碧沉沉 渤海嗒淋^①沁人心。”

由大连理工大学出版社出版的“数学方法论应用传播丛书”，与读者见面了。这是我国数学科学与数学教育文库百花园中的一簇奇葩。

先让我们扼要地回顾一下这套丛书的由来。

1987年8月，无锡市的数学老师应邀出席了由大连理工大学应用数学研究所主办的“全国数学方法论和数学史学术研讨会”。在此期间，一连六天，我国著名数学家徐利治教授作了关于“数学方法论和G·波利亚数学教育思想”的系列讲座。尔后，无锡市的老师又出席了由周春荔先生、杨世明先生在首都师范大学主持召开的“全国首届波利亚数学教育思想学术研讨会”。

返锡后，他们在时任无锡市教育局局长周稽裘先生的亲自部署和直接领导下，在无锡市原教研室主任、特级教师李永灿先生的支持与指导下，成立了无锡市MM(Mathematical Methodology)课

① “大连”原本是满语中“嗒淋”的译音，本意是“海滨”之意。

题组. 教育行政部门组织和协调市教育科学研究所、市教研室和江南大学·教育学院等各方面的研究力量,“强强联合”协作攻关,设计出“贯彻数学方法论的教育方式,全面提高学生素质”的数学教育实验(简称 MM 实验)课题. 从此,在中国无锡市正式拉开了把数学方法论和波利亚数学教育思想直接应用于数学教育教学实践的序幕.

此后,在时任江苏省教委主任袁相碗教授、副主任周稽裘先生的关心支持下,在无锡市教委主任林建坤先生的直接参与和领导下,MM 课题先后列入江苏省教育科研“八五、九五”重点项目和国家教委“八五规划”项目.

经过 5 年实验,证明 MM 教育方式不仅减轻了师生的负担,而且提高了老师的数学水平和教学水平,从而提高了教学质量. 因此,它于 1994 年通过了受江苏省教委委托,由王梓坤院士、徐利治教授组成的专家组的鉴定,并获得高度好评.

MM 实验从设计到确立为一种教育方式(MM 教育方式),并且推广到全国十几个省、市、自治区,迄今已经整整 20 年. 这其中倾注了设计者、实验者、推广者的大量心血. 当年参加实验和推广的老师已经陆续退休了,而且随着年龄的增长,他们将无法到全国各地亲自指导和推广 MM 实验. 这就提出一个问题:如何使 MM 实验继续推广下去,使 MM 教育方式世代相传,并且随着时代的发展而不断发展?

当然,作为实验,已经出版过两本教材:杨世明、周春荔、徐沥泉等著的《MM 教育方式:理论与实践》(2002 年)和徐沥泉著的《教学·研究·发现——MM 方式演绎》(2003 年). 不过,MM 实

验需要具备一定的条件,这就使得它的传播带有一定的局限性.特别是对于不具备实验条件,又希望在数学教学中贯彻 MM 教育方式的一些重要教育思想和教学方法的老师来说,则需要一部能概括 MM 实验、MM 教育方式的普及书.因此,我在 2006 年于新疆召开的数学科学方法论研究交流中心理事会上提议:撰写一部“MM 教育方式”雅俗共赏的书籍.

现在,我国各地 MM 实验点一线教师,以及热心于数学方法论的理论传播和应用研究的大、中、小学数学教师 and 教学研究人员集思广益,共同努力,分工协作撰写的“数学方法论应用传播丛书”,终于正式出版了.她比我原先设想的 MM 教育方式普及性书籍能更全面地传播数学科学,传播数学方法论,传播数学文化,传播数学的精髓.是一套让人走进数学,理解数学,鉴赏数学,品味数学,直到热爱数学和应用数学,宣传数学思想方法的高级科普读物.

丛书作者的知识结构、年龄结构合理,在丛书写作方面具有最佳的主体结构.作者的年龄跨度从 33 岁至 89 岁,这是少见的,也是十分可喜的.我国一批著名数学家、科学家都十分关心和支持数学方法论的研究与普及工作,关心数学科普作品的撰写与出版.王梓坤教授的《科学发现纵横谈》一书,就给我们如何撰写科普著作做出了榜样.该书对从事理科和文科工作的同志都起到了很好的教育作用.本套丛书的作者也认真学习和尝试了这种风韵.

值此 MM 课题实施 20 周年之际,王梓坤院士和刘绍学教授等又为 MM 实验纪念活动,为本套丛书的出版发来了热情洋溢的贺词与贺信.年届 90 的徐利治教授亲自撰写有关 MM 教育方式

的论文和《MM 教育方式:理论与实践》一书的序言。“天下士非一方之士,人伦师乃万世之师。”他们为本套丛书留下了珍贵的作品和墨宝,他们的思想在这套丛书中得以充分体现,以飨读者. 作为一名数学哲学工作者,看到这些著名数学家和科学家为数学科普工作付出的辛劳,我感到由衷的欣慰.

丛书共有八本专著和一本编著.《源于教学·高于教学——MM 方式演绎》一书,是《教学·研究·发现——MM 方式演绎》(科学出版社,2003 年 3 月)的姊妹篇,其中收录了全国各实验点 70 余位老师的专题论文、研究报告、教学设计和教学实录. 他们之中有著名学者,大学教授、副教授、讲师和初出茅庐的博士、硕士;有中、小学的特级教师、高级教师;有享受国家和地方政府特殊津贴的专家,全国模范教师、先进教师 and 科技拔尖人才.

《合情推理趣引》、《数学——直觉与逻辑的交响乐》、《数学和谐美》等著作,揭示和展现了数学发现和发明过程中直觉思维、形象思维和逻辑思维交融的旋律. 数学和文学、数学和艺术都是相通的.

数学是研究抽象事物的,它的抽象性保证了其应用的广泛性. 如何教育学生从具体事物中抽象出数学问题?《学会抽象与建模》一书的许多数学模型都是从日常生活中以及我们身边的例子提炼(抽象)出来的,有一部分是中学数学课堂教学的实例,还有一部分是由中学生从自己周围的具体事例中抽象概括出来的数学模型和他们的获奖作品,颇具特色,也有一定的应用价值. 学会抽象与建模应该成为学习数学的一种技能.

数学教育是人类的一件大事. 古往今来,许许多多数学家、教

育家、教师和数学教育工作者，一直在“摸着石头过河”。怎样摸得更好？怎样避免陷入泥潭？记得一位伟人说过：“人类总得不断地总结经验，有所发现，有所发明，有所创造，有所前进。”那么，《数学·教学·哲学》和《世纪婚约——哲学与数学教育联姻的实践与思考》这两部著作将给我们带来深刻的启迪与思考。它将帮助我们回答数学的本质是什么，数学教育和数学教学的本质又是什么，在数学教学中怎样提高学生的一般科学素养，增进社会文化修养，形成和发展数学品质，从而全面提高学生的素质。

一个好的数学教师，他的任务是帮助学生了解数学文化、喜爱数学文化、陶醉于数学文化，进而让学生学会用数学家的思维方式思考问题、解决问题。正如波利亚所说，让处于性格极易改变的青少年时期的学生，养成善思的好习惯，从而改变他们一生的命运。《从喜欢到入迷——学好数学的秘密》一书的作者将以自己的亲身经历说明如何用以上思想来教育学生，让学生从害怕数学、讨厌数学的困境中解脱出来，从而热爱数学，迷恋数学。从一二十分到全年级前三名，一些看来是神话般的例子，确实是现实的，关键是要真正地了解数学及其教学方法。

《数学思想赏析》一书内容丰富、内涵深刻，作者居高临下，又深入浅出，可供非数学专业的读者领略和赏析数学美，学到一定的数学常识、数学知识、典型的数学思想与方法；也可供爱好数学和数学专业的读者在茶余饭后分享与品味作者精心设计与制作的数学实例。它会引起具有较好数学基础和具备较高数学素养的读者的共鸣。

总之，本套丛书是具有数学科学方法论特色、兼具鉴赏性和教

材性的数学专题科普著作.同时,她又沟通了文理科学,内容丰富,事例翔实,起点有高有低,读者可各取所需,适合于广大数学爱好者阅读.

“数学方法论应用传播丛书”的宗旨是:走进数学,理解数学,养成数学思维,欣赏数学的美;品味数学,启迪心智,增强数学修养,弘扬数学文化.我们要提倡、鼓励和采取有效机制让学习和从事文科的人们读一点自然科学的科普读物;学习和从事理科(含数学)的人们阅读和鉴赏一些文学、艺术名著.开阔思路,从事跨学科的研究工作,把各自的思维活动发挥得淋漓尽致,不断地实现科学研究中的发明和发现.

林夏水

2009年2月15日

前 言

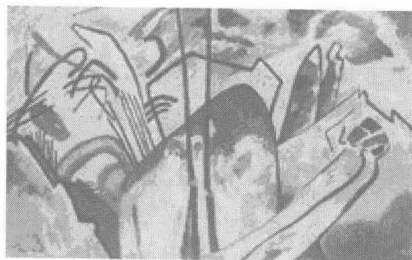
抽象者,从具体事物中抽取其本质特征也。

抽象一般同“具体”相对,是指从具体事物中抽取出来的相对独立的各个方面、属性、关系等。具体是指客观存在着的或在认识中反映出来的事物整体,是具有多方面属性、特点、关系的统一。具体和抽象是人的认识过程中不可分割的两个方面,它们互相联系、互相渗透,并在一定条件下互相转化。为了获得对事物的科学认识,必须从客观的具体实际出发,搜集丰富的材料,但由于尚未揭示出事物的多方面属性及其内部联系,在认识上还只是停留在感性表象上,即事物的表面层次上。但这种具体认识却是研究工作的起点。对此,我们必须运用思维的抽象力,把事物分解为各个部分、各个方面,逐一考查其不同的发展形态,形成各种简单的概念、判断,这时认识就从具体进入了抽象,深入了一步。但是,由于它仅对各部分、各方面作了单独的考查,如果我们的认识就此止步,就有可能使认识变得空洞或片面。因此,在抽象分析的基础上还必须把抽象再进一步上升到具体,即把已经获得的各种简单概念,结合具体条件,作系统而周密的综合考查,探求事物各方面之间的内部联

系,达到在理论上再现具有多方面属性、特点、关系的统一整体,这样才能获得关于客观事实的真正科学的知识,即高级的理性的具体认识.

把这种思维操作反映到数学上,就是本书的主要内容,学会抽象与建模.

但是限于作者本身的能力和水平,并考虑到读者对象的普及性,我们这里所说的抽象与建模具有高中以上文化水平的读者就能看懂.其中的许多数学模型都是日常生活中我们身边的例子,有一部分是中学数学课堂教学的实例,还有一部分是中学生从自己周围的具体事例中抽象概括出来的数学模型和他们的获奖作品,颇具特色,也有一定的应用价值.“抽象”与“具体”相对,指从具体事物中抽取出来的相对独立的各个方面、属性、关系等,这句话的本意是指思维活动中的一种特殊性,即在事物中抽取其本质属性.这个最基本的概念,无论对于逻辑思维和形象思维,都是合乎客观实际的.因而,抽象不是数学科学所特有的现象,文学艺术中比比皆是.比如下面的一幅水彩画就是绘画艺术中抽象主义作品的一个典型.



第一幅水彩抽象画作者康定斯基藏 1910 年

抽象艺术包含两种类型:

(1)从自然现象出发加以简约或抽取其富有表现特征的因素,形成简单的、极其概括的形象;

(2)不以自然物象为基础的几何构成.

抽象不仅是可感知的,而且有一定内涵,表现为概括性的存在形式.中国传统的绘画艺术中,积淀下了丰富多彩的抽象艺术形式,甚至可以说它们已形成了某种抽象形式,不仅可以激发人们的审美感受,而且在整个审美领域中占有相当重要的地位和作用.

在所有的艺术种类中,音乐的抽象性表现得最为鲜明,它不具有绘画艺术的直观性,也不具有文学描写的具体性,既不能像绘画那样直接描绘生活现象,也不能像文学那样叙述生活事件、故事情节.音乐的美是各种音响、曲调和节奏的构成,音乐形象不能按造型艺术或者语言艺术的特点来理解,声音没有形状、色彩的可视.文学作为一门语言艺术是以它的书面符号——语言文字作为物质手段,构成一种表象和想象中的形象,来反映现实生活的内容和艺术家的情感.文学创作和视觉艺术创作一样,都要从现实生活的矿藏中挖掘素材,并且对这些素材进行艺术加工和凝练,同样离不开抽象的把握.然而,文学艺术具有自身非常独特的语言媒介——语言文字,这种媒介和其他物质媒介的不同之处在于,它具有更大的自由性,小到一瞬间闪现的感性现象,大到对世界本质的哲学思考都可以表现,所谓“观古今于须臾,抚四海于一瞬”,“笼天地于形内,挫万物于笔端”.文学的语言能同时诉诸听觉和视觉,并通过它们唤起生动的表象,作用于欣赏者的再创造.语言艺术在描绘一种具体、生动的图景时,必须经由欣赏者的想象和再创造,才能呈现

出来.从创作和欣赏两方面看,文学艺术比其他艺术更加自由,它没有绘画的局限,也不像音乐那样抽象,而是用抽象的物质语言媒介构成源自审美经验、融合理解和情感的感性图像.然而,严密的逻辑推理、高度的模式抽象正是数学区别于其他科学的主要特征.正是数学所特有的抽象性,保证了有可能把理论应用于各种具体情形中去,有诗为证:

极端的抽象是真正的武器,
用以控制具体事物的思维;
这个似乎矛盾的说法,
现已完全成立.

——怀特海(A. N. Whitehead)

作者于无锡

2009年6月29日

目 录

引 子 数学最本质的东西是抽象	1
1 数学的抽象度分析法与中学数学教学	6
1.1 数学的抽象度分析法概述	6
1.2 数学教学中的抽象度分析法	18
1.3 典型教学案例研讨	40
思考题	115
2 生活中的抽象与建模	116
2.1 数学建模的本质	116
2.2 生活中数学建模案例赏析	119
3 中学生数学建模案例赏析	176
4 高考中的数学建模	230
4.1 确定性函数类数学建模案例评析	231
4.2 三角函数类数学建模案例评析	238
4.3 随机类数学建模案例评析	246
附 录	250
附录 1 高中女生数学学习兴趣诊断量表	250
附录 2 本书引用学生建模论文目录	252
附录 3 高考中经典应用问题赏析	253

引 子

数学最本质的东西是抽象

数学最本质的东西是抽象,抽象是人类创造性思维最基本的特征.在数学上,假如没有超脱元素的“具体”,便不会有集合论的诞生;没有变元与符号的建立,便不可能有更深刻的方程和函数理论;没有形与数结合的解析几何,便没有微积分的发展;没有对“具体”的变换,便难以有抽象数学的产生.

从中学数学的学习过程中读者已经体会到数学的抽象性了.数本身就是一个抽象概念,几何中的直线也是一个抽象概念,全部数学的概念都具有这一特征.整数的概念,几何图形的概念都属于最原始的数学概念.在原始概念的基础上又形成有理数、无理数、复数、函数、微分、积分、 n 维空间以至无穷维空间这样一些抽象程度更高的概念.但是需要指出,所有这些抽象度更高的概念,都有非常现实的背