

(1989—1994)

硕士招生

全国数学统考 试题分析与解答

主编 汪荷仙



4

四川大学出版社

硕士招生

全国数学统考试题分析与解答

江苏工业学院图书馆

藏书章

编委

汪荷仙 汪 洋 李红兵

(川) 新登字 014 号

责任编辑: 张仕成

封面设计: 冯先洁

技术设计: 张仕成

硕 士 招 生
全国数学统考试题分析与解答
汪荷仙 主编

四川大学出版社出版发行 (成都市望江路 29 号)
四川省新华书店经销 郫县犀浦印刷厂印刷
787×1092mm 32 开本 11.6 印张 244 千字
1994 年 9 月第 1 版 1994 年 9 月第 1 次印刷
印数: 0001—4000 册
ISBN7-5614-1067-0/O·97 定价: 7.50 元

前 言

为有效指导我国的硕士招生考试,从1987年开始,国家教委制订和多次修订了数学考试大纲。1994年修订的大纲明确规定,硕士招生考试的性质是选拔性考试。它的指导思想是:“有利于选拔高层次人才,有利于高等学校提高各类数学课程的教学质量。”这就为我们指明了它与本科学历考试的联系与区别。

大纲规定“要求考生比较系统地理解数学的基本知识,掌握数学的基本方法。要求考生具有抽象概括能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力和综合运用所学知识分析和解决问题的能力。”

考试方式采用笔试,考试时间为3小时。

根据各学科各专业对硕士研究生入学所应具备的数学知识与素质的不同要求,大纲将试题分为五种类型,并分别对考试内容和试题结构进行了规定:

数 学 一

考试内容

高等数学、线性代数、概率论或复变函数(概率论与复变函数两门中,由考生自选一门应试。)

试卷结构

(一) 内容比例

高等数学 约 68%

线性代数 约 20%

概率论或复变函数 约 12%

(二) 题型比例

填空题与选择题 约 30%

解答题(包括证明题) 约 70%

适用的招生专业

力学、仪器仪表、动力机械及工程热物理、电工、电子学及通信、计算机科学与技术、自动控制、管理工程、船舶、原子能科学与技术、航空与宇航技术、兵器科学与技术。

数学二

考试内容

高等数学、线性代数。

试卷结构

(一) 内容比例

高等数学 约 75%

线性代数 约 25%

(二) 题型比例

填空题与选择题 约 30%

解答题(包括证明题) 约 70%

适用的招生专业

机械设计与制造、金属材料、冶金、土建、水利、测绘、非金属材料、化学工程和工业化学、地质勘探、矿业石油、铁道、公路、水运、纺织、轻工、林业工程。

数 学 三

考试内容

高等数学。

试卷结构

填空题与选择题 约 30%

解答题(包括证明题) 约 70%

适用的招生专业

建筑学、技术科学史。

数 学 四

考试内容

微积分、线性代数、概率论。

试卷结构

(一) 内容比例

微积分 约 50%

线性代数 约 25%

概率论 约 25%

(二) 题型比例

填空题、选择题和判断是非题 约 30%

解答题(包括证明题) 约 70%

适用的招生专业

国民经济计划与管理(含经济系统分析)、工业经济、工

业企业管理、统计学、数量经济学和技术经济学。

数学五

考试内容

高等数学、线性代数、概率论。

微积分、线性代数、概率论。

试卷结构

(一) 内容比例

微积分 约 55%

线性代数 约 25%

概率论 约 20%

(二) 题型比例

填空题、选择题和判断是非题 约 30%

解答题(包括证明题) 约 70%

适用的招生专业

基本建设经济、农业经济、农业企业管理、商业经济、商业企业管理、运输经济、物资经济、劳动经济、财政学、货币银行学(含保险)、会计学、国际贸易、国际金融、世界经济、经济地理、政治经济学、经济学说史以及其他财经类专业。

这批考题历来被人瞩目,其原因有二。

首先,它以试卷的原型呈现于读者面前,便于准备报考的人了解试题的全貌及逐年发展趋势,变考前突击为“平战结合”,变盲目猜题为胸中有数,破除对硕士研究生考试的神秘感,以实战状态模拟考题的类型、份量、深广度,达到从知识上、能力上、技巧上、心理上作好应试准备。

其次,由于硕士研究生考试的性质是选拔考试,它必须完成学历考试和择优考试双重任务。前者在于检测考生对本科教学大纲基本要求的完成情况,后者在此基础上拉开考生成绩档次,便于择优选拔高层次人才。

因此，这些考题并非都是难题，但它们是在考试大纲的指导下，由经验丰富的专家集体推敲的产物。其突出特点是体现大纲的要求比较准确、全面，题目灵活，类型多样，既有利于推动学生掌握三基（基础知识、基本理论、基本技能），明确学习方向，把握课程重点；又便于他们扩大视野，启迪思维，激发兴趣，开发智力，提高能力，推进学习的深广度。因此，它很好地体现了对当前本科教学的导向功能和指导意义。

鉴于当前有关读物奇缺，只能找到一些零星残缺的复印材料，使用多有不便，编者汇集了自 1989 年以来的全部资料，编写成这本小册子，为推进我国高校数学教学改革尽微薄之力。我们相信，它能引起在校和业余数学爱好者的广泛兴趣。

编者 1994. 4. 2.
于四川大学数学系

目 录

第一章 1989 年试题及解答	(1)
1-1 数学 (试卷一) 试题及解答	(1)
1-2 数学 (试卷二) 试题及解答	(18)
1-3 数学 (试卷三) 试题及解答	(24)
1-4 数学 (试卷四) 试题及解答	(38)
1-5 数学 (试卷五) 试题及解答	(53)
第二章 1990 年试题及解答	(65)
2-1 数学 (试卷一) 试题及解答	(65)
2-2 数学 (试卷二) 试题及解答	(84)
2-3 数学 (试卷三) 试题及解答	(91)
2-4 数学 (试卷四) 试题及解答	(100)
2-5 数学 (试卷五) 试题及解答	(115)
第三章 1991 年试题及解答	(126)
3-1 数学 (试卷一) 试题及解答	(126)
3-2 数学 (试卷二) 试题及解答	(146)
3-3 数学 (试卷三) 试题及解答	(153)
3-4 数学 (试卷四) 试题及解答	(168)
3-5 数学 (试卷五) 试题及解答	(186)

第四章 1992 年试题及解答 (199)

4-1 数学 (试卷一) 试题及解答 (199)

4-2 数学 (试卷二) 试题及解答 (217)

4-3 数学 (试卷三) 试题及解答 (223)

4-4 数学 (试卷四) 试题及解答 (232)

4-5 数学 (试卷五) 试题及解答 (245)

第五章 1993 年试题及解答 (257)

5-1 数学 (试卷一) 试题及解答 (257)

5-2 数学 (试卷二) 试题及解答 (270)

5-3 数学 (试卷三) 试题及解答 (276)

5-4 数学 (试卷四) 试题及解答 (286)

5-5 数学 (试卷五) 试题及解答 (297)

第六章 1994 年试题及解答 (308)

6-1 数学 (试卷一) 试题及解答 (308)

6-2 数学 (试卷二) 试题及解答 (320)

6-3 数学 (试卷三) 试题及解答 (327)

6-4 数学 (试卷四) 试题及解答 (338)

6-5 数学 (试卷五) 试题及解答 (350)

第一章 1989年试题及解答

1-1 数学(试卷一) 试题及解答

1-1.1 试 题

一、填空题(本题满分 15 分,每小题 3 分)

[本题包含 5 个小题. 将答案填入题中横线上空白处(不填解题过程). 填对得 3 分, 不填或填错一律得 0 分.]

(1) 已知 $f'(3) = 2$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{2h} =$ _____.

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$, 则 $f(x) =$ _____.

(3) 设平面曲线 L 为下半圆周 $y = -\sqrt{1-x^2}$, 则曲线积分 $\int_L (x^2 + y^2) ds =$ _____.

(4) 向量场 $\vec{u}(x, y, z) = xy^2\vec{i} + ye^z\vec{j} + x\ln(1+z^2)\vec{k}$ 在点 $P(1, 1, 0)$ 处的散度 $\text{div} \vec{u} \geq 0$ _____.

(5) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则逆矩阵 $(A - 2I)^{-1} =$ _____.

二、选择题(本题满分 15 分, 每小题 3 分)

[本题包含 5 个小题, 每个小题都给出代号为 A, B, C, D 的四个结论, 其中只有一个结论是正确的. 必须把所选结论的代号写在小题后的圆括号内. 选对得 3 分; 不选、选错或选出的代号超过一个一律得 0 分.]

(1) 当 $x > 0$ 时, 曲线 $y = x \sin \frac{1}{x}$

(A) 有且仅有水平渐近线.

(B) 有且仅有铅直渐近线.

(C) 既有水平渐近线, 也有铅直渐近线.

(D) 既无水平渐近线, 也无铅直渐近线. 答()

(2) 已知曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x + 2y + z - 1 = 0$, 则点 P 的坐标是

(A) $(1, -1, 2)$.

(B) $(-1, 1, 2)$.

(C) $(1, 1, 2)$.

(D) $(-1, -1, 2)$. 答()

(3) 设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解, c_1, c_2 是任意常数, 则该非齐次方程的通解是

(A) $c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_3$.

(B) $c_1 y_1 + c_2 y_2 - (c_1 + c_2) y_3$.

(C) $c_1 y_1 + c_2 y_2 - (1 - c_1 - c_2) y_3$.

(D) $c_1 y_1 + c_2 y_2 + (1 - c_1 - c_2) y_3$. 答()

(4) 设函数 $f(x) = x^2, 0 \leq x < 1$,

而 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, -\infty < x < +\infty$,

其中 $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx, n = 1, 2, 3, \dots$,

则 $S(-\frac{1}{2})$ 等于

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$ 答()

(5) 设 A 是 4 阶矩阵, 且 A 的行列式 $|A| = 0$, 则 A 中

(A) 必有一列元素全为 0.

(B) 必有两列元素对应成比例.

(C) 必有一列向量是其余列向量的线性组合.

(D) 任一行向量是其余列向量的线性组合. 答()

三、(本题满分 15 分, 每小题 5 分)

(1) 设 $z = f(2x - y) + g(x, xy)$, 其中函数 $f(t)$ 二阶可导, $g(u, v)$ 具有连续的二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(2) 设曲线积分 $\int_C xy^2 dx + y\varphi(x) dy$ 与路径无关, 其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数, 且 $\varphi(0) = 0$. 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x) dy$ 的值.

(3) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x+z) dv$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 所围成的区域.

四、(本题满分 6 分)

将函数 $f(x) = \arctg \frac{1+x}{1-x}$ 展为 x 的幂级数.

五、(本题满分 7 分)

设 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$, 其中 f 为连续函数, 求 $f(x)$.

六、(本题满分 7 分)

证明方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^x \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

七、(本题满分 6 分)

问 λ 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = \lambda \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda + 2 \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 2\lambda + 3 \end{cases}$$

有解, 并求出解的一般形式.

八、(本题满分 8 分)

假设 λ 为 n 阶可逆矩阵 A 的一个特征值, 证明

(1) $\frac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1} 的特征值;

(2) $\frac{|A|}{\lambda}$ 为 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值.

九、(本题满分 9 分)

设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) 上, 问当 R 取何值时, 球面 Σ 在定球面内部的那部分的面积最大?

下面概率论或复变函数由考生自选一门应试, 每门有 2 个大题, 题号同为第十和第十一. 两门都做, 只按概率论一门的成绩计分.

概 率 论

十、填空题(本题满分 6 分, 每小题 2 分)

[本题包含 3 个小题. 将答案填入题中横线上空白处(不填解题过程). 填对得 2 分; 不填或填错一律得 0 分.]

(1) 已知随机事件 A 的概率 $P(A) = 0.5$, 随机事件 B 的

概率 $P(B) = 0.6$ 及条件概率 $P(B|A) = 0.8$, 则和事件 $A \cup B$ 的概率 $P(A \cup B) = \underline{\quad\quad\quad}$.

(2) 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次, 其命中率分别为 0.6 和 0.5. 现已知目标被命中, 则它是甲射中的概率为 $\underline{\quad\quad\quad}$.

(3) 若随机变量 ξ 在 $(1, 6)$ 上服从均匀分布, 则方程 $x^2 + \xi x + 1 = 0$ 有实根的概率是 $\underline{\quad\quad\quad}$.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 与 Y 独立, 且 X 服从均值为 1、标准差(均方差)为 $\sqrt{2}$ 的正态分布, 而 Y 服从标准正态分布. 试求随机变量 $Z = 2X - Y + 3$ 的概率密度函数.

复 变 函 数

十、填空题(本题满分 6 分, 每小题 2 分)

[本题包含 3 个小题. 将答案填入题中横线上空白处(不填解题过程). 填对得 2 分; 不填或填错一律得 0 分.]

(1) 已知解析函数的实部 $u(x, y) = x^2 - x - y^2$, 则虚部 $v(x, y) = \underline{\quad\quad\quad}$.

(2) 设 C 为正向圆周 $|z| = \frac{1}{2}$, 则积分 $\oint_C \frac{\sin z}{z(1-e^z)} dz = \underline{\quad\quad\quad}$.

(3) 映射 $w = \frac{z+1}{1-z}$ 把 z 平面上曲线 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 映射成 w 平面上的曲线的方程为 $\underline{\quad\quad\quad}$.

十一、(本题满分 6 分)

设 $a \neq 0$, $f(z) = \frac{z-a}{z+a}$,

(1) 将 $f(z)$ 展开为 z 的幂级数;

(2) 计算 $\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$, 其中 C 是圆域 $|z| < |a|$ 内围绕原点的任一正向简单闭曲线.

1-1.2 解 答

(1) -1

这是因为 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{2h} = -\frac{1}{2} f'(3) = -1$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \frac{f(3-h) - f(3)}{-h} = -\frac{1}{2} f'(3) = -1.$$

(2) $x-1$

只要设 $\int_0^1 f(t) dt = c$ (c 为常数)

则 $f(x) = x + 2c$

且有 $\int_0^1 (x + 2c) dx = c$

可得 $\frac{1}{2} + 2c = c$, 于是知 $c = -\frac{1}{2}$

$\therefore f(x) = x - 1$

(3) π

利用第一型曲线积分公式

$$\int_{C(A,B)} f(x, y) ds = \int_a^b f[x, y(x)] \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

直接计算, 得

$$\int_L (x^2 + y^2) ds = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-1}^1 = \pi$$

或化为参数方程 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \pi \leq t \leq 2\pi$

代入公式计算

$$\int_L (x^2 + y^2) ds = \int_{\pi}^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) \cdot \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} dt = \pi.$$

(4) 2

因为

$$\operatorname{div} \vec{u}_{(P)} = \left[\frac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(ye^x)}{\partial y} + \frac{\partial(x \ln(1+z^2))}{\partial z} \right]_{(1,1,0)} = \left(y^2 + e^x + \frac{2 \times z}{1+z^2} \right)_{(1,1,0)} = 2$$

(5)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[解一] 利用公式 $B^{-1} = \frac{1}{|B|} B^*$

$$B^* = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & \cdots & B_{n1} \\ B_{12} & B_{22} & \cdots & B_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1n} & B_{2n} & \cdots & B_{nn} \end{bmatrix}$$

其中 B_{ij} 是 B 中元素 b_{ij} 的代数余子式.

由公式知

$$(A - 2I)^{-1} = \frac{1}{|A - 2I|} (A - 2I)^*$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[解二] 用初等变换求逆矩阵