普通高等教育“十一五”规划教材
21世纪大学数学精品教材

数学建模

李德宜　李　明　主编

SHUXUEJIANMO

科学出版社
www.sciencep.com

O14
18

·普通高等教育"十一五"规划教材·

21世纪大学数学精品教材

数学建模

李德宜 李 明 主编

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书融数学模型、数学实验和数学软件于一体，主要介绍数学建模中常用的建模方法，即数值计算方法、基本建模方法、数学规划方法、统计分析方法和图论方法，并将这些方法结合实际案例利用 MATLAB 软件或 Lingo 软件给予实现. 对每种建模方法本书都从其数学原理、软件实现、应用案例三个方面加以介绍，使得读者不仅了解每种建模方法的基本理论和应用领域，还能够借助数学软件将此方法应用于实验. 读者只需具备高等数学、线性代数和概率统计方面的基础知识便可以阅读、学习本书.

本书可作为高等院校理工科各专业本科生、研究生数学建模课程的教材，也可作为大学生参加各类数学建模竞赛的培训教材以及科研工作者和工程人员的参考文献.

图书在版编目(CIP)数据

数学建模/李德宜，李明主编. —北京：科学出版社，2009

普通高等教育“十一五”规划教材. 21 世纪大学数学精品教材

ISBN 978-7-03-024605-9

Ⅰ. 数…　Ⅱ. ①李…②李…　Ⅲ. 数学模型－高等学校－教材　Ⅳ. O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 078372 号

责任编辑：王雨舸　曾　莉 / 责任校对：董艳辉

责任印制：彭　超　/ 封面设计：苏　波

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2009 年 5 月第　一　版　　开本：B5(720×1 000)

2009 年 5 月第一次印刷　　印张：19 3/4

印数：1—4 000　　字数：382 000

定价：31.80 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

普通高等教育“十一五”规划教材
21 世纪大学数学精品教材

《数学建模》编委会

主　编　李德宜　李　明

副主编　郑巧仙　尹水仿

编　委　李德宜　李　明
郑巧仙　尹水仿
陈建发　熊　丹
熊　革　兰春霞

前　　言

美国科学院的一位院士曾经提出“数学是一种关键的、可以应用的技术”，也就是说数学可以直接应用于实践.然而传统的数学课程，一般偏重于介绍数学的理论、方法和解题技巧，对数学的应用则介绍得相对较少，致使不少学生虽然学了不少数学知识，却不能有效地应用这些知识解决实际问题.

近几十年来，随着现代科学技术的发展，特别是计算机技术的发展，应用数学知识解决大规模实际问题已经不再困难.基于这一点，数学也从以前的纯理论研究转变成一种真正的技术，可以转化为生产力的技术.目前数学的应用领域已经由传统的物理领域迅速扩展到从自然科学技术到工农业生产建设、从经济活动到社会生活的各个领域.正是在这样的背景下，国内外高校的专家开始有意识地将数学建模的思想引入到高校课程中，并组织开展了一系列课外科技活动，如美国大学生数学建模竞赛和全国大学生数学建模竞赛，以提高大学生用数学的能力.

目前不少高校都开设了与数学建模相关的课程，如数学建模、数学实验、数学模型等，并编写了教材.这些教材主要分为两类，一类主要介绍数学模型，侧重于理论模型的建立；另一类主要介绍数学方法，侧重于求解数学模型.本书将数学模型、数学方法和数学软件通过实际案例有机地结合在一起，侧重于培养学生分析问题、利用现代技术解决实际问题的能力.

全书共6章，主要分成三个部分：第一部分侧重于介绍建立数学模型的基本方法(第3章)，包括平衡方法、马尔可夫链方法、比例方法、构造分析方法、简单的优化方法、微分方程方法、概率方法和层次分析法，致力于培养学生分析问题、将实际问题抽象为数学问题的建模能力；第二部分侧重于介绍求解数学模型的数学方法及其软件实现(第2、4、5、6章)，包括数值计算方法、数学规划方法、统计分析方法和图论方法，致力于培养学生应用数学技术和数学软件求解数学模型的能力；第三部分主要介绍数学建模中两个常用的数学软件，即MATLAB软件和Lingo软件.对各种建模方法本书大都从其数学思想、软件实现、应用案例三个方面加以介绍，数学思想可以使得读者了解建模方法的理论基础和应用领域，软件实现可使得读者能够借助数学软件将此方法应用于实践，应用案例则将理论知识和应用实践紧密相连，使得读者能够将学到的数学知识有效地应用于解决实际问题，从而做到学以致用.

编写教材是一项繁重而又长久的工作，本书在酝酿了5年之久才开始动笔，在这漫长的时间里，家人一直默默地支持我们，在此表示深深的感谢. 吉林大学数学学院的刘金英教授为教材的构思提供了建设性的意见，在此一并致谢.

本书由李德宜、李明主编，郑巧仙、尹水仿任副主编. 各章编写人员如下：李德宜(第1章)，李明(第2章、第4章)，尹水仿(第3章)，郑巧仙(第5章)，熊革、兰春霞(第6章)，陈建发(附录A)，熊丹(附录B). 全书由李明和郑巧仙审校，最后由李德宜教授统稿、定稿.

由于编者水平有限，书中难免有疏漏和不妥之处，恳请专家和广大读者批评指正.

编　者

2009年4月

目　录

第 1 章　数学建模概述

现代科学技术的飞速发展，特别是电子计算机技术的迅速发展使得数学科学的地位发生了巨大变化. 目前，数学应用已经不仅仅局限于一些传统领域，而是广泛地渗透到从自然科学技术到工农业生产建设、从经济活动到社会生活的各个领域，即使在生物、政治、经济以及军事等非传统领域也显示了强大的威力. 各学科对各自领域中实际问题的研究需要精确化、定量化和数字化，这些都需要建立数学模型进行分析讨论. 数学模型是连接数学和现实世界的桥梁，建立一个好的数学模型对解决实际问题至关重要.

本章在给出数学建模的几个基本概念后，结合典型的建模实例给出数学建模的一般步骤，使读者对数学建模有初步的认识.

1.1　数学建模介绍

模型(model)在现实生活中随处可见，如在科技展览厅摆设的大型水电站模型、人造卫星模型，玩具店里的汽车模型和轮船模型；再如建筑工程师用的工程图纸，电子工程师用的电路图等，都称为模型. 模型可分为两类：一类称为形象模型，其外观和实物非常接近，如汽车模型；另一类称为抽象模型，是人们对实物的一种抽象，通过这个模型能获得关于实物更多、更准确的信息，如电路图.

数学模型(mathematical model)是抽象模型的一种，是一种数学结构，即对于一个特定的对象，为了某个特定的目标，根据对象的内在规律而作的抽象、简化的数学结构. 如针对一个具体问题经抽象简化建立的非线性方程、线性方程组、常微分方程和线性规划等数学结构都称为数学模型.

数学建模(mathematical modeling)是指建立、求解数学模型的全过程，它主要包括五个部分：(1) 提出问题，即对于给定的实际问题，将其简化假设，并用精确的数学语言加以描述，提出相应的数学问题；(2) 建立模型，即利用合适的建模方法建立其数学结构；(3) 求解模型，即选择合适的数学方法，借助现代技术手段求解这个模型；(4) 模型的分析与检验，即对模型结果从理论和实践两方面进行分析检验，如果通不过检验，找出原因，对模型进行修正，检验，直至通过检验；(5) 模型的应用，即将模型应用于实践，其中建立数学模型和求解数学模型是整个过程中最重要的工作.

建立数学模型一般有两种方法：机理分析法和测试分析法. **机理分析法**根据对客观事物特性的认识，找出反映内部机理的数量规律，利用合适的数学工具建立数学模型. 这类模型通常有明确的现实意义. 当人们对事物的内部机理不清楚时，一般借助测试分析法建立数学模型. **测试分析法**将研究对象看作一个"黑箱"系统，通过对系统输入、输出数据的测量和统计分析，按照一定的准则找出与数据拟合得最好的数学模型. 在实践中，常常将两种方法结合起来，先用机理分析法建立模型的结构，然后用测试分析法确定模型的参数.

求解数学模型的方法主要取决于所建数学模型的类别，常用来求解数学模型的方法有数值计算方法、数理统计方法、优化方法和图论方法等，在后面将对这些方法的基本思想和应用一一给予介绍.

1.2　数学建模的一般步骤

数学建模需要哪些步骤并没有一个固定的模式，但是一个理想的模式对于建立数学模型、求解数学模型是非常有利的，本教材采用常用的五步法模式建模，下面给出五步法建模的一般步骤.

1. 提出问题

(1) 做好建模的准备工作. 解决一个实际问题，首先要了解其背景，明确建模的目的，搜集建模必需的各种信息，如相关资料、现象、数据等，尽量加深对问题的理解，并由此初步确定模型的类型. 为了做好这一步工作，有时还需向有关方面的专家请教，以便对问题有更透彻的了解.

(2) 对问题做出合理的假设. 根据前面的准备工作，对问题做必要的、合理的简化假设，确定模型所涉及的主要因素并抽象为变量. 所做的假设一定要适量，假设过少，考虑的因素过多，则难以建立数学模型，即使能，所得的数学模型也难以求解；假设过多，考虑的因素过少，就会使得模型过于粗糙，而难以得到有用的结果.

在数学建模中，对问题提出合理的假设是非常关键的，要做好这一点，需抓住两个要素：一是对问题内在规律的认识，二是对所提供的数据或现象的分析. 认识得越深，分析得越透彻，假设才能提得越合理. 因此，在做假设时一方面要运用与问题相关的物理、化学、生物、经济等方面的知识，另一方面又要充分发挥想象力、洞察力和判断力，善于辨别问题的主次，果断地抓住主要因素，舍弃次要因素，尽量将问题线性化、均匀化. 此外，经验在这里也常起重要作用.

(3) 提出问题. 在前面提出的简化假设下，根据问题的要求，用数学语言将一个实际问题抽象成一个数学问题.

2. 建立数学模型

(1) 挖掘问题中变量满足的条件. 根据前面的假设和问题的内在规律，挖掘出变量满足的条件，特别是隐含条件，这是求解模型能够成功的关键所在. 这些条件一般是指变量满足的等式和不等式.

(2) 建立数学模型. 根据问题的类型，选择合适的建模方法，建立数学模型.

3. 求解数学模型

(1) 推导模型的解析解. 判断模型所属的类别，根据相应的数学知识，推导模型的解析解.

(2) 计算模型的数值解. 在求解模型时，很多情况下很难得其解析解，这时可根据相应的数学知识，利用数学软件，计算模型的数值解.

(3) 补充模型的假设. 在求解模型时，为了求出模型的结果或得到与实际相一致的结果，可能需要对模型补充一些额外的假设，这些假设主要用于使得第一步中描述的问题与第二步中选定的数学结构相适应.

(4) 尽量减少求解的误差. 求解模型时，采用适当的技术，如计算机代数系统，图形、数值计算的软件和算法等，尽可能地减少计算误差.

4. 模型的分析和检验

(1) 对模型进行灵敏度分析和稳健性分析.

(2) 对模型的结果进行分析，检查所求解的结果在理论上是否有意义.

(3) 将模型的求解结果应用到实践中，检查它与实际是否一致. 若两者不一致，找出问题的所在(一般出现在问题的假设中)，修正模型，重新执行前面的步骤，直至结果与实际相一致为止.

5. 数学模型在实践中的应用

(1) 用非技术性的语言将上面所得的结果重新表述.

(2) 避免数学符号和术语，使得最初提出问题的人能理解给出的解答.

(3) 将前面所建立的数学模型应用到实际生活中.

1.3 数学建模示例

准确而又合理地用数学语言将一个现实问题描述成一个数学问题，是数学建模首先面对且必须解决的一个重要问题，下面通过一个实例，使读者对其有个感性的认识.

1.3.1 数学建模示例 1：人、狗、鸡、米过河问题

问题 某人要带狗、鸡、米过河，但小船除需要人划外，最多只能载一物过河，而当人不在场时，狗要咬鸡、鸡要吃米，问此人应如何过河才能将狗、鸡和米都安全地带过河？

问题的分析

这是一个智力游戏，经过逻辑思索便可求解，我们对其建立数学模型的目的在于设计一个算法，即用数学语言给予准确的描述，利用计算机对其进行求解.

初始时刻人、狗、鸡、米在河这边，可视为初始状态；每次过河，河岸两边的状态发生转移，过河后，河岸两边的状态相应发生改变；全部过河后，人、狗、鸡、米都到河的另一边，可视作终止状态，所以这是一个状态转移问题. 过河时，人应对船上的载物做出决策，在保证安全的前提下，在有限步内，使其全部过河. 解决此问题的关键是如何将每个状态、每次安全过河用数学语言进行描述，并用适当的工具进行处理.

模型的建立

用四维向量表示人、狗、鸡和米这四个物体所处的状态，且当物体在此岸时相应分量取 1，而在彼岸时则取其为 0，例如，(1, 0, 1, 0)表示人和鸡在此岸，而狗和米则在对岸.

由题意知，并非所有状态都是允许的，例如，(0, 1, 1, 0)表示只有狗和鸡在此岸，狗会吃鸡，所以此状态不可取. 题目中所含的可取状态向量分别为

人在此岸	人在对岸
(1, 1, 1, 1)	(0, 0, 0, 0)
(1, 1, 1, 0)	(0, 0, 0, 1)
(1, 1, 0, 1)	(0, 0, 1, 0)
(1, 0, 1, 1)	(0, 1, 0, 0)
(1, 0, 1, 0)	(0, 1, 0, 1)

在游戏中，状态的转移依靠摆渡完成，而摆渡也可抽象为一个四维向量，称为状态转移向量. 允许的状态转移向量显然只能取(1, 0, 0, 0)，(1, 1, 0, 0)，(1, 0, 1, 0)和(1, 0, 0, 1)四个. 而物体从一种状态变成另一种可取状态则可以由此状态向量和相应的状态转移向量施行某种运算来完成. 根据转移前状态向量、状态转移向量和转移后状态向量的关系此运算可定义为异或运算，即规定两向量的对应分量相加，且满足 $0+0=0$，$1+0=0+1=1$，$1+1=0$. 如转移前状态向量为(1, 1, 1, 1)，即人、狗、鸡、米原来均在此岸，转移向量为(1, 0, 1, 0)，即人带鸡过河，则由上面定义可得转移后状态向量为(0, 1, 0, 1)，即此岸仅剩狗和米，这与实际是一致的. 其他情况可以验证是一致的.

于是原问题便转化为数学上的状态转移问题，即将初始状态向量(1, 1, 1, 1)

和四种状态转移向量的某一种做异或运算，产生新的可取状态向量；再将此向量和四种状态转移向量的某一种做异或运算，产生新的可取状态向量，以此类推直到产生终止状态向量(0, 0, 0, 0)，算法结束.

模型的求解

异或运算很容易在计算机上实现，这样就把一个数学游戏转化成了一个可以在计算机上计算的数学问题，于是求得渡河方案为：第一次渡河，人带鸡到彼案；第二次渡河，人独自回此岸；第三次渡河，人带狗(或米)到彼岸；第四次渡河，人带鸡到此岸；第五次渡河，人带米(或狗)到彼岸；第六次渡河，人独自回此岸；第七次渡河，人带鸡到彼岸，全部过河.

模型的说明

人、狗、鸡、米问题只是个数学游戏，但经过我们引入一系列严格定义和运算，用数学语言对其进行描述，最终将其"翻译"成一个数学问题(状态转移问题)，这一过程，是数学建模中的一个重要环节. 对于一个实际问题，我们只有将其转换成一个数学问题，才能用数学方法对其进行研究. 如何将一个实际问题转换为一个数学问题，是数学建模首先面对，也是必须给予解决的一个重要问题.

前面介绍了数学建模的一般步骤，下面结合一个实例，再对其做详细的介绍.

1.3.2　数学建模示例 2：人口预测问题

问题　人口问题是当今世界人们普遍关注的问题之一. 认识人口数量的变化规律，建立合理的人口增长模型，可用来描述人口的增长过程，还可以通过分析对人口增长进行预测，制定相应的人口政策，从而有效地控制人口增长. 下面介绍两个最基本的人口模型.

1. 指数增长模型(Malthus 模型)

问题的假设

影响人口增长的因素有很多，其中最主要的两个是出生率和死亡率，而出生率和死亡率又取决于很多别的因素. 如出生率，它和当地的婴儿存活率、传统习惯和道德观念等因素有关，而死亡率则受当地的公共医疗条件、战争情况、污染情况、心理压力情况、自然灾害等因素的影响. 下面只考虑出生率和死亡率这两个因素对人口增长的影响，假设如下：

(1) 在人口自然增长过程中，只考虑出生率和死亡率，且都为常数；

(2) 所讨论的地区在讨论时间内无人口迁移发生.

模型的建立

记某个地区在时刻 t 的人口数为 $N(t)$ (这里 $N(t)$ 是整数，不可微，但由于它很大，可视为连续、可微)，人口的出生率为 b，死亡率为 d，并假定此地区在时刻

$t=t_0$ 的人口数为 N_0，则在 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间间隔内，人口的净增长量为

$$N(t+\Delta t)-N(t)=bN(t)\Delta t-dN(t)\Delta t \tag{1.3.1}$$

两边除以 Δt，得

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}=bN(t)-dN(t)=rN(t)$$

其中 r 称为净增长率.

令 $\Delta t\to 0$，则得 $N(t)$ 满足的方程为

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}=rN(t) \tag{1.3.2}$$

再由初始条件，可建立 Multhus 人口模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=rN(t)\\ N(t_0)=N_0\end{cases} \tag{1.3.3}$$

模型的求解

利用微积分的知识容易解得微分方程(1.3.3)的解为

$$N(t)=N_0\mathrm{e}^{r(t-t_0)} \tag{1.3.4}$$

(1.3.4)式中含有未知参数 r，对于此未知参数，可根据某个相似地区的实际统计数据，利用数据拟合方法求得.

表 1.1 是美国近两百年的人口统计数据，下面我们根据表 1.1 中的数据，计算(1.3.4)式中的参数 r.

表 1.1　美国人口统计数据表

年　份	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850
人口/百万	3.9290	5.3080	7.2400	9.6380	12.8660	17.0690	23.1920
年　份	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920
人口/百万	31.4430	38.5580	50.1560	62.9480	75.9950	91.9720	105.7110
年　份	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
人口/百万	122.7550	131.6690	150.6970	179.3230	203.2120	226.5050	248.7100

取 $t_0=1790$，分别根据 1790～1900 年和 1790～1990 年美国的人口统计数据，利用 MATLAB 进行数据拟合，可得净增长率分别为 $r=0.0275$ 和 0.0216. 于是得美国近两百年的人口增长规律曲线如图 1.1 和图 1.2 所示(图中的黑点为统计数据，曲线为预测曲线).

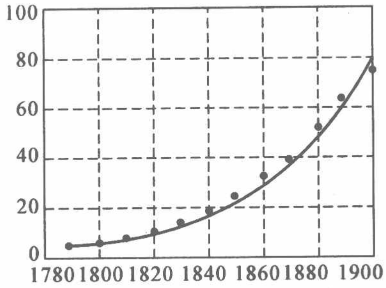

图 1.1　美国 1790～1900 年人口增长拟合图

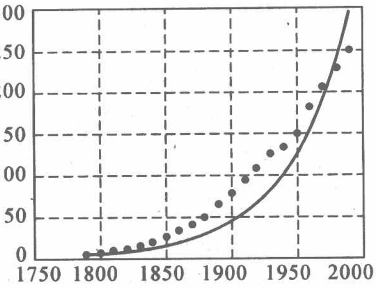

图 1.2　美国 1790～1990 年人口增长拟合图

模型的分析与检验

由拟合图 1.1 可以看出，在 19 世纪以前，本模型拟合的效果较好；但进入 20 世纪后，美国人口实际变化情况和拟合情况相差较大，如图 1.2 所示. 取 $t = 2000$，代入(1.3.4)式，计算可得 2000 年的预测值为 368.4134(百万)，而 2000 年美国人口普查的人口数为 281.4000(百万)，其相对误差为 30.92%，和实际相差太大；再取 $t = 2300$ 代入(1.3.4) 式，计算可得 2300 年的预测人口为 241 850(百万)，这远远超出美国自然资源和环境条件的承受力.

根据上面的分析可见，模型(1.3.4)在短期预测方面效果较好，但在长期预测方面效果非常差. 特别地，令 $t \to \infty$，则由(1.3.4)式得，美国的人口数量 $N(t) \to \infty$，这显然不可能达到.

模型不合理，问题一般出在假设上. 模型(1.3.4)假定人口的增长率为一个常数，当人口数量较小时，成员之间基本上没有竞争，净增长率可近似认为是常数；但当人口数量很庞大时，成员相互间要为有限的生存空间、自然资源进行竞争，此时，净增长率 r 一般就不可能再保持不变. 表 1.2 是用数值微分中的样条插值方法计算所得的美国人口净增长率(%/年). 由表 1.2 可知，美国人口净增长率在 19 世纪以前变化不大，所以假定为常数基本是合理的，但其后变化幅度较大，此时再假定为常数显然与实际不符，所以必须修改 Malthus 模型人口增长率是常数这一假设，重新建立模型.

表 1.2　美国人口增长率

年　份	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850
增长率/%	2.6077	3.1923	2.9428	2.8774	2.8404	2.8718	3.3269
年　份	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920
增长率/%	2.3397	2.3226	2.5840	1.9655	1.9825	1.5696	1.5455
年　份	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
增长率/%	1.0234	0.8569	1.7339	1.5146	1.1208	1.0278	0.8283