普通高等教育"十一五"国家级规划教材

几何与代数

周建华　陈建龙　张小向　编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

几何与代数

周建华　陈建龙　张小向　编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是作者在多年教学实践的基础上，为适应教学改革新的要求而编写的. 主要内容有：行列式和线性方程组的求解、矩阵、几何空间、n 维向量、特征值与特征向量、二次型与二次曲面. 每章最后一节为"用 Matlab 解题"，作为课程内容的验证与演示，同时也使学生了解软件的初步应用. 每章后安排了"历史小贴士"和习题，习题分三部分，以期达到拓展知识背景，培养应用意识的目的，同时也兼顾不同层次学生的需要，便于选用.

本书适合作为普通高等院校工科各专业"线性代数与解析几何"课程的教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

几何与代数/周建华，陈建龙，张小向编. —北京：科学出版社，2009
普通高等教育"十一五"国家级规划教材
ISBN 978-7-03-024766-7

Ⅰ. 几… Ⅱ. ①周…②陈…③张… Ⅲ. ①解析几何-高等学校-教材②线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. O182 O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 096976 号

责任编辑：姚莉丽 房 阳 / 责任校对：陈丽珠
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京智力达印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2009 年 6 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009 年 6 月第一次印刷 印张：16 1/2
印数：1—4 000 字数：323 000

定价：27.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新伟〉)

前　言

经课程内容的整合，从 1998 年起，东南大学大部分电类专业的空间解析几何和线性代数均作为一门课程开设. 本书是作者在多年教学实践的基础上，为适应教学改革新的要求而编写的. 编写时，结合教育部课程教学指导委员会制定的基本要求，我们在以下几方面作了努力.

1. 处理好课程中几何与代数的关系

将空间解析几何与线性代数合为一门课的主要理由是在课程中这两部分内容可以相互借鉴. 众所周知，几何可以为许多代数概念提供直观原形，代数则可以为解决几何问题提供有效手段. 许多代数概念都来源于几何，代数中的许多结果也都具有相应的几何含义. 因此，在同一门课内讲授这两部分内容，对提高教学效果无疑有很大的好处，但我们并不是只追求两者形式上的相互融合，而更重视两者本质上共有的特性.

线性代数中的许多问题用矩阵来刻画时，常常归结为讨论矩阵的等价关系、相似关系和合同关系. 与这些关系对应的各种变换都构成作用在矩阵集合上的变换群，讨论这些问题实质上就是讨论矩阵在各种关系下的分类以及寻找刻画相关分类的不变量. 这一想法带有明显的几何色彩. 虽然教材不可能给出变换群的概念，但是，我们竭力将这一思想方法融入代数问题的讨论之中，希望学生在潜移默化之中，理解并接受这种思维方式.

2. 处理好数学软件的教学

利用数学软件，尤其是利用 Matlab 讲授线性代数是国内外相关课程改革的重要趋势，但如何更好地发挥 Matlab 在课程教学中的作用，则需要作更多的努力.

数学实验在课程教学中主要起“验证和演示”的作用. 每章的最后一节都通过一些具体的例子，介绍 Matlab 的相关命令，展示软件在相关计算中的运用. 学生只需“依葫芦画瓢”，便可初步了解软件的基本功能. 我们在第 1 章介绍 Gauss 消元法并引入矩阵概念，既考虑到了目前中学数学的课程改革，同时也是为了在条件许可的情况下，使 Matlab 的应用能贯穿整个课程的始终.

将数学实验放在每章的最后一节还有一个目的，那就是希望避免由于数学实验而使理论内容显得过于零散，不因为数学实验而影响教材在不同教学班级的使用. 鉴于课程的性质，在教材中没有必要，也不可能系统地介绍 Matlab. 我们没有

打算在课本中介绍进一步的编程方法，只是在少量的应用题中才需要学生设法更有效地使用 Matlab. 这些年的实践也表明，只需给予适当的引导，加上一定的实践机会，学生都能顺利学会软件的初步使用，但如果想要能更娴熟地运用 Matlab，则不仅需要借助专业的软件教材，而且还需要足够的上机练习.

3. 拓展知识背景，培养应用意识

数学不仅是后继课程的基础，也肩负着培养学生的数学修养，提高学生理性思维能力和解决实际问题能力的任务.

每一章的开头部分均提及本章内容在数学和其他学科中的应用，借此让学生了解教学内容与数学的其他方面的关系，了解课程所学知识在其他应用学科的用途，以增强学生的学习目的性，提高学习兴趣. 每章正文之后的"历史小贴士"简要介绍相关概念出现的年代以及对此作出重要贡献的著名数学家，便于学生了解理论的历史. 在每章的习题(C)中，均安排了若干应用题，其中一些习题的解答可以手工进行，而另一些则建议运用 Matlab. 这一安排的出发点是希望学生借此了解相关理论的应用，增强应用所学知识解决实际问题的意识和能力.

4. 适应不同的教学要求

本书编写的依据是教育部课程教学指导委员会制定的课程基本要求，少部分内容会超出该要求. 由于不同专业的教学对象、教学要求各异，课时条件也不尽相同. 在编写教材时，我们力求使教材具有尽可能广泛的适用性.

我们给出几乎所有定理的证明，并不意味着课堂教学必须讲解所有定理的证明. 恰恰相反，在学时不允许的情况下，课本上提供定理完整的证明可以更方便学生自学，教师授课时处置材料也可以更加灵活.

Jordan 标准形是矩阵理论的重要部分，在特征值、特征向量部分，教材除了讨论矩阵的相似对角化问题外，还简要介绍了矩阵的 Jordan 标准形. 这样安排，可以让学生更完整地了解矩阵理论，更好地理解矩阵的相似对角化问题. 使用本书时，对线性方程组的最小二乘解和 Jordan 标准形等超出要求的部分，教师完全可以根据实际要求及条件的许可进行处理，不会因为删减这些内容而影响整个课程的连贯性和完整性.

一些教学班级暂时还没有开设数学实验. 教材均将关于 Matlab 的讲解放在每章的最后一节，也是为了有利于教师对这部分内容的取舍. 习题(C)放在每章习题的最后一部分也是出于类似的考虑.

5. 照顾不同理解层次的学生

相关课程通常是面向大学一年级学生开设的. 教材尽量考虑到目前中学的数

学教学和大学低年级学生的实际水平，在体系的设置上力求循序渐进，概念的引入力求做到由具体到抽象，材料的处理力求由浅入深、先易后难.

例如，目前入学的大学新生中，有些人在中学里就学过矩阵，有的则没有学过.因此，教材必须要兼顾这两部分人的实际情况.通过线性方程组的系数矩阵和增广矩阵认识矩阵概念，对于中学阶段没有学过矩阵的学生不会显得过于突兀，对于学过矩阵的学生也不完全是重复.再如，在介绍几何空间时，为了与中学阶段向量知识衔接，我们参考了现行的《普通高中数学课程标准》，尽可能照顾到各方面的学生.此外，为了适应部分学生更高的需求，我们还简要介绍了空间直角坐标变换.

限于篇幅，少部分定理没有给出完整的理论证明，而是力图采用直观的、易于理解的方式让学生理解定理的含义，了解证明定理的思想方法.例如，对向量在子空间上的投影，我们没有给出相关定理的严格证明，而是通过几何直观，让学生理解定理的意义.再如，略去了 Jordan 标准形存在性的证明，唯一性则通过对具体例子的计算，让学生体会其证明的思路.

将习题分成三部分，习题(A)主要用于学生课后自测之用，习题(B)可作为学生的书面作业，习题(C)则由实验题和应用题组成.习题的编排次序力求既考虑到内容的先后顺序，又顾及习题的难易程度，便于选用.

本书的第 1、2、4、5 章由周建华教授编写，第 3 章由张小向老师编写，第 6 章由陈建龙教授编写.最后由周建华教授负责统稿.

感谢东南大学数学系的全体老师，尤其是承担本课程教学任务的老师，本书的成形离不开他们的支持.感谢东南大学教务处的领导，他们的鼓励促成了本教材的编写.最后还要感谢科学出版社对本书的支持.

尽管作了不少努力，但编者的水平和经验有限，书中难免会有许多疏漏和不足，敬请各位专家、读者批评指正.

编　者

2009 年 3 月 1 日

目　录

第 1 章　行列式和线性方程组的求解

线性方程组是线性代数的基本内容，它不仅是数学中非常重要的基础理论，也是科学研究、工程技术、社会、经济、金融以及生产实践中常用的数学工具.

许多数学问题都可以通过解线性方程组得到解决. 例如，在平面解析几何中，如果两条直线的方程分别是 $a_1x+b_1y=c_1$ 和 $a_2x+b_2y=c_2$，那么，它们的交点的坐标就是线性方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 的解. 因此，求它们的交点只需要求解这个线性方程组. 同样地，考虑空间中平面、直线的交点的情况，实际上也就是考虑相应的线性方程组的解.

在处理各种实际问题时，线性方程组常常发挥着重要作用. 例如，Leontief 的投入产出模型实质上就是用线性方程组表达的经济学模型. 这一模型的建立为经济学研究提供了强有力的手段，Leontief 因此获得了 1973 年的 Nobel 经济学奖. 事实上，运用现代数学理论，许多复杂的实际问题最终都可以化成求解线性方程组的问题.

我们将会看到，线性代数中的许多问题都是围绕着线性方程组展开的，但讨论线性方程组离不开行列式，而且，行列式还是线性代数和解析几何中几乎所有论题的重要工具. 因此，本章大体分成两部分：第一部分着重讨论行列式，提出行列式的概念，讨论行列式的性质，介绍计算行列式的一些典型方法；第二部分主要讨论求线性方程组解的方法，将介绍 Cramer 法则和 Gauss 消元法，并介绍 Gauss 消元法的矩阵表示形式，即矩阵的初等行变换.

1.1　二阶、三阶行列式

行列式概念来源于求解线性方程组. 对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

利用消元法可知，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，这个线性方程组有唯一解

$$x=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad y=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

为了便于记忆这个公式，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

等式的左边是由 4 个数构成的两行两列的方块，称为**二阶行列式**. 这个方块的从左上角到右下角的连线称为**主对角线**，而从右上角到左下角的连线称为**次对角线**. 一个二阶行列式的值等于其主对角线上两个数的乘积与其次对角线上两个数的乘积之差.

利用二阶行列式，线性方程组(1.1)的解就可以用易于记忆的方式表示如下：

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.2}$$

解的表达式中，分母都是方程组(1.1)的系数所构成的行列式，x 的分子是将系数行列式的第一列改为常数项后所得的二阶行列式，y 的分子是将系数行列式的第二列改为常数项后所得的二阶行列式.

例 1.1　利用行列式解线性方程组$\begin{cases} 2x+3y=4, \\ 5x+6y=7. \end{cases}$

解　利用公式(1.2)得

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{3}{-3} = -1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{-3} = 2,$$

故方程组的解为 $x=-1, y=2$.

对于三元线性方程组的解也有类似的结果. 如果定义三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \tag{1.3}$$

那么，含三个方程的三元线性方程组的解可以用公式表达出来，即当

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

有唯一解

$$x=\frac{D_1}{D},\quad y=\frac{D_2}{D},\quad z=\frac{D_3}{D},$$

其中

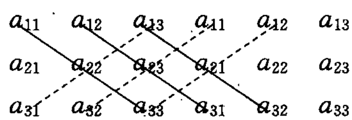
$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

三阶行列式的展开式比较复杂，可以用如下较直观的方式记住(1.3)式：

(1) 展开式中含有六项，其中三项前取正号，另三项前取负号；

(2) 每一项都是三个数的乘积，这三个数均取自行列式的不同行、不同列；

(3) 各个乘积项前的正、负号可以结合下图选取，在图中，用实线连起来的三个数的乘积前取正号，用虚线连起来的三个数的乘积前取负号.



例 1.2　计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ 的值.

解　按照行列式的定义，$D=1+8+27-6-6-6=18$.

上面确定二阶行列式和三阶行列式展开式中乘积项前正、负号的方法称为对角线法则. 用行列式表示线性方程组的解的公式称为 Cramer 法则.

1.2　n 阶行列式的概念

将要定义的 n 阶行列式是二阶、三阶行列式的推广. 为了方便理解，以三阶行列式为例，考察其展开式的规律，并以此作为定义 n 阶行列式的出发点.

根据(1.3)式，三阶行列式是由 9 个数所决定的一个表达式，其中的每个数 a_{ij} 均有两个下标(i 和 j)，第一个下标 i 标明的是这个数所在的行，第二个下标 j 标明的是这个数所在的列. 行列式的值是 6 个乘积项的代数和，其中的每个项是位于不同行、不同列的三个数的乘积. 事实上，这个行列式是所有位于不同行、不同列的三个数的乘积的代数和. 因此，三阶行列式可以表示成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum(\pm a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}),$$

其中的 i_1, i_2, i_3 是 1,2,3 这三个数的排列，$\sum$ 表示对所有这种排列求和. 因此，要将三阶行列式推广到 n 阶行列式，关键是要找到一个明确的方式，给出排列 i_1, i_2, i_3 与相应的乘积项前的正、负号间的关系. 为此，先给出 n 级排列及其逆序数的概念.

1.2.1　排列的逆序数

定义 1.1　由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 按任意次序排成一列所得的 n 元数串 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 称为一个 **n 级排列**.

例如，3,5,4,1,2 和 4,2,1,5,3 是两个不同的 5 级排列. 我们知道，对于给定的正整数 n，一共有 $n!$ 个不同的 n 级排列.

定义 1.2　在 n 级排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 中，排在第 k 个数 i_k 前面但比 i_k 大的数的个数称为 i_k 在这个排列中的**逆序数**. 排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 中各元素逆序数之和称为这个**排列的逆序数**，记为 $\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)$. 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例如，3,5,2,1,4 是一个 5 级排列. 在这个排列中，数 1,2,3,4,5 的逆序数分别为 3,2,0,4,1，因此，排列 3,5,2,1,4 的逆序数 $\tau(3,5,2,1,4)=3+2+0+1+0=6$.

由于 $\tau(3,5,2,1,4)=6$，所以，3,5,2,1,4 是一个偶排列. 而 $\tau(3,1,5,4,2)=5$，所以 3,1,5,4,2 是一个奇排列.

在所有 n 级排列中，只有排列 $1,2,\cdots,n$ 的逆序数为零，称 $1,2,\cdots,n$ 为**自然排列**. 显然，自然排列是偶排列.

在所有 n 级排列中，排列 $n,n-1,n-2,\cdots,2,1$ 的逆序数最大. 容易算得，$\tau(n,n-1,n-2,\cdots,2,1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$. 因此，当 n 能被 4 整除或被 4 除余数为 1 时，这是偶排列；当 n 被 4 除余数为 2 或为 3 时，这是奇排列.

定义 1.3　将一个排列中的两个元素互换位置，其余元素的位置保持不变，这种由给定排列得到新的排列的操作称为**对换**. 如果对换的两个元素在排列中处于相邻位置上，则称这样的对换为**相邻对换**.

例如，如将排列 2,4,1,3,5 中的 4 和 5 作一次对换，则得新的排列 2,5,1,3,4.

定理 1.1　一次对换改变排列的奇偶性.

证明　先考虑相邻对换. 假设排列 $i_1, i_2, \cdots, i_p, i_{p+1}, \cdots, i_n$ 经一次对换后得到新的排列 $i_1, i_2, \cdots, i_{p+1}, i_p, \cdots, i_n$. 容易看到，除了 i_p, i_{p+1} 外，其余各个元素在这两个排列中的逆序数都是一样的.

如果 $i_p < i_{p+1}$，则 i_p 在新排列中的逆序数比在旧排列中的逆序数大 1，而 i_{p+1} 及其余元素在新、旧两个排列中的逆序数相同，因此，

$$\tau(i_1,i_2,\cdots,i_p,i_{p+1},\cdots,i_n)=\tau(i_1,i_2,\cdots,i_{p+1},i_p,\cdots,i_n)-1.$$

类似可以证明,如果 $i_p>i_{p+1}$,则

$$\tau(i_1,i_2,\cdots,i_p,i_{p+1},\cdots,i_n)=\tau(i_1,i_2,\cdots,i_{p+1},i_p,\cdots,i_n)+1.$$

不管怎样,$i_1,i_2,\cdots,i_p,i_{p+1},\cdots,i_n$ 与 $i_1,i_2,\cdots,i_{p+1},i_p,\cdots,i_n$ 的奇偶性相反.

下面考虑一般情形. 注意到,一般的对换与奇数次相邻对换的效果相同. 具体地说,如果将排列 $i_1,\cdots,i_p,\cdots,i_{p+s},\cdots,i_n$ 中的 i_p,i_{p+s} 作一次对换得到新排列 $i_1,\cdots,i_{p+s},i_{p+1},\cdots,i_{p+s-1},i_p,\cdots,i_n$,这一对换与下述相邻对换的效果是一致的:

$$\begin{aligned}i_1,\cdots,i_p,i_{p+1},\cdots,i_{p+s},\cdots,i_n&\xrightarrow{i_p\text{ 往后 }s\text{ 次}}i_1,\cdots,i_{p-1},i_{p+1},\cdots,i_{p+s},i_p,\cdots,i_n\\&\xrightarrow{i_{p+s}\text{ 往前 }s-1\text{ 次}}i_1,\cdots,i_{p-1},i_{p+s},i_{p+1},\cdots,i_p,\cdots,i_n,\end{aligned}$$

共进行了 $2s-1$ 次相邻对换. 由于作一次相邻对换改变排列的奇偶性一次,所以作奇数次相邻对换肯定改变排列的奇偶性. 因此,经过一次对换前后的排列的奇偶性相反.

推论 1.1 任意排列经过一些对换变成自然排列时,对换次数的奇偶性与该排列的奇偶性相同.

证明 因为自然排列是偶排列,由定理 1.1,结论显然成立.

推论 1.2 当 $n\geqslant 2$ 时,在所有 $n!$ 个 n 级排列中,有一半是奇排列,一半是偶排列.

证明 在 n 级排列中任取一个奇排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$,将这个排列中的前面两个元素 i_1,i_2 做一次对换就得到一个偶排列 $i_2,i_1,\cdots,i_n$. 用这种方法,每个奇排列对应于一个偶排列,而且,不同的奇排列对应于不同的偶排列. 因此,在 $n!$ 个 n 级排列中,偶排列不比奇排列少. 用类似的方法可以证明,奇排列也不比偶排列少. 因此,在所有 $n!$ 个 n 级排列中,偶排列与奇排列个数相同,即有一半是奇排列,一半是偶排列.

1.2.2 n 阶行列式的定义

观察(1.3)式易知,三阶行列式的展开式中,各项前的正、负号取决于(1.3)式中该项对应的列指标的排列的奇、偶性:列指标的排列是偶排列的,项前取正号;列指标的排列是奇排列的,项前取负号. 因此,三阶行列式的展开式可以表示成

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\sum_{i_1,i_2,i_3}(-1)^{\tau(i_1,i_2,i_3)}a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3},$$

其中 $\sum\limits_{i_1,i_2,i_3}$ 表示对所有的 3 级排列 i_1,i_2,i_3 求和.

二阶行列式也有类似的表示式.

下面给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.4　由 n^2 个数 $a_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$给出的表示式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n} (-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \tag{1.4}$$

称为一个 **n 阶行列式**,其中 $\sum\limits_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ 表示对所有 n 级排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 求和.

为方便起见,(1.4)式中的行列式有时也记为 $\det(a_{ij})_{n\times n}$或 $\det(a_{ij})$.

据定义 1.4,乘积 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$中 n 个因子的行指标互不相同,因此,这 n 个因子取自不同的行.同样,这 n 个因子的列指标互不相同,所以,这 n 个因子来自不同的列.事实上,(1.4)式表示所有取自此式中不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$的代数和,其中 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是一个 n 级排列.当 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是偶排列时,$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$前取正号;当 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是奇排列时,$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$前取负号.

由于一共有 $n!$ 个不同的 n 级排列,所以,n 阶行列式的展开式是 $n!$ 项的代数和.而且,由推论 1.2 可知,在这 $n!$ 项中,一半项前带正号,另一半项前带负号.

对于二阶行列式和三阶行列式,1.1 节中的定义与(1.4)式是一致的.同时还要指出,根据定义,一阶行列式$|a|=a$.

例 1.3　问 $a_{32}a_{14}a_{41}a_{23}$是不是 4 阶行列式的展开式中的项?如果是,该项前是带正号还是带负号?

解　由于 $a_{32}a_{14}a_{41}a_{23}$中 4 个因子的第一个下标互不相同,所以,这 4 个因子取自行列式的不同行.同样,这 4 个因子的第二个下标互不相同,故这 4 个因子取自行列式的不同列.因此,$a_{32}a_{14}a_{41}a_{23}$是行列式的展开式中的项.

为了确定这一项前的正负号,将这 4 个因子按行指标的大小顺序排列

$$a_{32}a_{14}a_{41}a_{23} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.$$

由于 $\tau(4,3,2,1)=6$,所以,$a_{32}a_{14}a_{41}a_{23}$前带正号.

注意,上面的例子中涉及的刚好是这个 4 阶行列式的次对角线上的元素,这个例子也表明,与二阶、三阶行列式不同,在 4 阶行列式的展开式中,次对角线上的元素的乘积前必定取正号.读者不妨想一想,对给定的行列式,如何确定次对角线元素乘积项前的正负号?

例 1.4　计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这个行列式的特点是其主对角线以下的元素全部为零.这样的行列式称为**上三角形行列式**.

解 由于这个行列式的最后一行只有最后一个数不为零,所以,在展开式中,如果一般项 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 不为零,则 i_n 只能为n.同样地,i_{n-1}只能在 $n,n-1$ 中取其一.又由于一般项中的 n 个元素取自不同列,而 $i_n=n$,故 $i_{n-1}=n-1$. 同理,对每个 $1\leqslant j\leqslant n$,$i_j=j$.因此,D 的展开式中至多只有一个非零项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.显然,这一项前带正号,所以,$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

我们将会看到,许多行列式的计算都可以化成上三角形行列式的计算.因此,可以将例 1.4 的结果当作公式来记住.

例 1.5 求关于 x 的多项式

$$\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2 \\ 0 & 2x & 1 & -1 \\ -2 & 1 & x & 3 \\ x & 3 & 2 & 3x \end{vmatrix}$$

中 x^4 和 x^3 的系数.

解 先确定 x^4 的系数.根据行列式的定义,要确定 x^4 的系数,只要找出行列式的展开式中那些包含 4 个 x 的项即可.显然地,在这个行列式的展开式中,只有主对角线元素之积一项包含 4 个 x:$x\cdot 2x\cdot x\cdot 3x=6x^4$,而这一项前取正号.因此,$x^4$ 的系数是 6.

下面计算 x^3 的系数.类似地,要确定 x^3 的系数,只要找出展开式中的那些包含 3 个 x 的项.首先,这些项中的 3 个 x 不可能都取自主对角线元素,否则,第四个因子也必须是主对角线元素,从而,所得到的乘积不是三次,而是四次的.所以,3 个 x 中必有 1 个 x 取自第一行第二列,或第四行第一列,而另两个 x 取自主对角线.因此,包含 3 个 x 的项有两个:$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=0$,$(-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-4x^3$,所以,所求的关于 x^3 的系数为-4.

1.2.3 行列式的转置

根据行列式的定义,n 阶行列式的展开式中每一项前的正负号取决于其中的 n 个因子按行的次序排列时相应的列指标排列的奇偶性.初看起来,行列式中元素的行指标与列指标的地位不是平等的,其实,这仅是表面的.为说明这一点,先证明下

面的引理.

引理 1.1　假设 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 是 n 阶行列式(1.4)的展开式中的一项,调整其因子的次序,将该项写成 $a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}$,则

$$(-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)+\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}=(-1)^{\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)+\tau(q_1,q_2,\cdots,q_n)}.$$

特别地,如果将 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 的因子次序调整成 $a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$,则

$$(-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)}=(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}.$$

证明　如果将乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中的两个因子的次序对调,则所得乘积中因子的行指标所构成的排列可由 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 经一次对换得到,列指标所构成的排列也可由 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 经一次对换得到. 由于一次对换都改变排列的奇偶性,所以,调换次序前后,乘积的行指标排列与列指标排列的逆序数之和的奇偶性不会改变. 由于将 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中因子的次序调整成 $a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}$ 可以经过若干次因子的两两对调来实现,因此,$\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)+\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 与 $\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)+\tau(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ 的奇偶性相同. 引理得证.

利用引理 1.1,可以得到行列式的下述性质.

性质 1.1　假设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},\quad D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

则 $D=D'$.

这里,D' 是将 D 的各个行(列)变成相应的列(行)得到的,称 D' 为 D 的**转置行列式**.

证明　由引理 1.1,如将展开式(1.4)中的一般项 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 的因子次序调整成 $a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$,则

$$(-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}=(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}.$$

于是,

$$D=\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n}(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}.$$

如果令 $b_{ij}=a_{ji}(1\leqslant i,j\leqslant n)$,则有

$$D=\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n}(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}.$$

由行列式的定义,

$$D=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D'.$$

由例 1.4 及性质 1.1 不难证明,对下三角行列式,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即下三角形行列式也等于其主对角线元素的乘积.

1.3 行列式的性质

我们知道,n 阶行列式的展开式中含有 $n!$ 项,而当 n 增大时,$n!$ 增长得非常快,

$$3!=6,\quad 4!=24,\quad 5!=120,\quad 6!=720.$$

因此,用定义计算一般的高阶行列式几乎是不可能的. 自然地,人们希望通过分析行列式的性质,找到有效的计算办法.

1.3.1 行列式的基本性质

根据性质 1.1,在行列式中,元素的行指标与列指标的地位完全等同. 换言之,行列式的关于“行”成立的性质对“列”一定也成立. 因此,在讨论行列式的性质时,对于“行”和“列”两种情形,只需给出其中一种情形的证明即可.

考虑 n 阶行列式的某一行,例如,第 i 行 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$. 根据定义,在展开式中每一项的 n 个因子中,含有并且只含有 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 中的一个元素. 因此,可以将展开式的 $n!$ 项分成 n 组,第一组的各项均含有 a_{i1},第二组的各项均含有 a_{i2} 等,然后再在各组中将第 i 行的元素作为公因子提出来,于是就有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}. \qquad (1.5)$$

注意,在(1.5)式中,A_{ij} 与 D 的第 i 行、第 j 列的所有元素都没有关系(在后文中,