理论力学简明教程

Lilun Lixue Jianming Jiaocheng

◎贾莹　邹斌　王义全／编著

031

中央民族大学出版社
China Minzu University Press

理论力学简明教程

贾 莹 邹 斌 王义全 编著

中央民族大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

理论力学简明教程/贾莹等编著．—北京：中央民族大学出版社，2009.7

ISBN 978-7-81108-717-8

Ⅰ．理… Ⅱ．贾… Ⅲ．理论力学—教材 Ⅳ．031

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第109843号

理论力学简明教程

编　　者	贾　莹　邹　斌　王义全
责任编辑	关紫烽
封面设计	金　星
出 版 者	中央民族大学出版社 北京市海淀区中关村南大街27号　邮编:100081 电话:68472815(发行部)　传真:68932751(发行部) 68932218(总编室)　68932447(办公室)
发 行 者	全国各地新华书店
印 刷 者	北京华正印刷有限公司
开　　本	880×1230(毫米)　1/32　印张:6.25
字　　数	160千字
印　　数	1000册
版　　次	2009年7月第1版　2009年7月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-81108-717-8
定　　价	16.00元

版权所有　翻印必究

前　　言

理论力学是物理相关专业本科学生的一门必修课，也是学生首次接触到的理论物理课程。作为普通物理力学的后继课程，理论力学的任务是：使学生能够运用高等数学和数学物理方法等知识研究宏观低速物体机械运动的普遍规律，并在理论物理的研究方法方面受到初步的训练。

全书共分为六章：第一章是牛顿动力学，第二章是分析力学的变分原理，第三章是拉格朗日动力学，第四章是哈密顿动力学，第五章是刚体运动学，第六章是刚体动力学。这种编排的意图是想阐述如下的力学体系：第一章是牛顿动力学基础，第二章、第三章和第四章是分析力学基础，它们都属于经典力学的基础理论，是研究经典力学问题的两种不同的处理方法；第五章和第六章讨论了一种重要的力学系统——刚体，并将牛顿力学和分析力学的方法应用于刚体动力学问题的求解过程。

相对于国内现行的一般教材，本教材在以下两个方面作了调整。

首先，对传统教材的部分内容进行了精简。

目前国内高等院校的理论力学教材大都是按照 70～80 课时或 120～140 课时的教学计划编写的，但是民族类本科院校和部分专科院校的理论力学课程的课时一般是 40～60 课时。为了方便此类课程的教学，我们将传统教材中的部分内容做了精简处理，更加注重基本概念、基本规律和基本方法的讲解。例如对于学生在普通物理力学课程中比较熟悉的牛顿运动定律，本书不作过多的重复，而是采用逻辑性较强的方式，使学生取得更深的理

解，为提高物理思维能力打下较好的基础；又如在介绍牛顿力学的三大定理和三大守恒律时，对于学生比较熟悉的质点动力学的三大定理和三大守恒律，本书只作简单介绍，而把重点放在如何由质点的情况推广到学生不太熟悉的质点系的情况，并对质点和质点系的三大定理及三大守恒律作以分析比较，加深学生对质点系动力学的认识。

其次，将分析力学部分提前。

理论力学的研究对象是经典力学问题，其研究方法是牛顿力学方法和分析力学方法。目前，国内大多数理论力学教材都采取先牛顿力学的质点、质点系和刚体，后分析力学的一种逻辑体系，它的优点是保持了理论体系的完整性。但是在具体的教学实践中，却存在一些弊端。例如按照这样的逻辑体系进行教学，牛顿力学部分必然要花费大部分学时，学生会感到理论力学只是普通力学的简单重复，不利于调动学生学习的积极性；另外，分析力学放在教材的最后，学生接触分析力学的时间短，没有更多的机会去熟悉分析力学的实际应用，以至于不能够深刻领悟这种方法的精髓。考虑到牛顿力学和分析力学是相对独立的两个理论体系，本教材将分析力学部分提前到第二章至第四章讲授，这样学生能够提早接触到分析力学方法，体会理论力学与普通力学的联系与区别，有利于调动学生的学习积极性。同时在学习后边刚体部分时，学生既可以采用牛顿力学方法，又可以采用分析力学方法来处理具体的力学问题。经过这样亲自体验和实践，有利于加深学生对两种方法的理解和领悟。

贾莹负责第二、第三、第五、第六章的编写以及全书的统稿；邹斌负责第一、第四章的编写；王义全负责第四章的编写及全书的统稿。在书稿的编写过程中，苏玉成副教授和编者的学生提出了许多宝贵的意见和中肯的建议，编者对此表示衷心的感谢。另外，本书的出版得到了中央民族大学“应用物理学”本科

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

专业建设项目的部分资助，在此，编者一并表示谢意。

由于编者学识粗浅，书中不免存在错误和不足，祈望读者批评指正。

编　者

2009 年 5 月于中央民族大学

目　　录

第一章　牛顿动力学

经典力学的三种理论形式包括牛顿动力学、拉格朗日方程以及哈密顿理论，其中后两种又合称为分析力学。在普通物理力学课程中，对于牛顿动力学有过较为详细的讲授，但是基本上只限于单质点的直线运动和圆周运动，而对质点、质点系的一般运动等涉及不深。

本章在介绍单个质点运动状态的描述以及牛顿运动微分方程之后，引入质点系的概念。并且从质点运动微分方程出发，分别推导了质点和质点系情况下三大基本定理——动量定理、动能定理和角动量定理。这三大定理共同揭示了质点或质点系的整体动力学性质，为进一步学习刚体力学打下坚实的基础。此外，在本章的最后还对两类特殊问题（两体问题和变质量物体的运动问题）进行初步地探讨，以巩固本章所学的相关知识。

§1.1　质点运动的描述

各种物体的运动都是绝对的，但是对运动的描述却是相对的，而宏观物体的运动过程都要与时间及空间相联系。因此，为了定量和统一地描述物体运动，首先需要引入一个参考系，并且在此参考系上建立一套坐标系。所谓的参考系就是为了更方便地描述物体而人为选取的另外一个用来作为参照物的物体，此时我们认为观察者也包含在该参考系中。关于参考系还需要注意以下两点：

一是参考系不能是一个参考点，必须是一个有体积的物体或者是由若干个点组成的一个三维力学系统。这是因为仅仅一个参考点无法说明所要考察的运动物体相对于该点的方位，也就无法区分与参考点距离相同但是方位不同的物体的位置。

二是物体的运动是一个客观存在的运动，虽然在不同的参考系下测量的结果会有所不同，但是这些结果是相互联系的。例如：在不考虑相对论效应的情况下，普通力学知识告诉我们，低速运行的宏观物体在不同惯性参考系下的坐标和速度满足伽利略变换关系；在考虑相对论的情况后，不同惯性参考系所观察的物体运动满足洛仑兹变换关系。

为了从数量上确定运动物体相对于参考系的位置，还需要在参考系上选用一个固定的坐标系。坐标系可以看成是由坐标曲线组成的带有标度的空间网格。通常我们熟悉的坐标系是笛卡儿直角坐标系，它是由三条互相垂直的坐标轴（x 轴、y 轴和 z 轴）以及坐标原点（O 点）组成。一般我们选用右手笛卡儿直角坐标系，此时 x 轴、y 轴和 z 轴呈右手螺旋关系，而且当考虑角度变化时规定以逆时针方向为正方向。根据讨论问题的需要，我们也可以选用其他类型的坐标系。如当讨论物体在三维空间内运动时，采用柱坐标系或者球坐标系等；当讨论物体在平面内作曲线运动时，经常选用平面极坐标系或者平面自然坐标系等。离开了坐标系讨论一个运动物体在空间的位置是无意义的事情，所以，物体的存在是事实，但是如何去描述它，或者说如何用物理的方法去测量它，则是更重要的。

此外一个物体总是有一定的形状和体积，但是在研究其机械运动时这些因素往往对物体的平动状态没有影响，为此我们可以采用一种理想模型，认为该物体仅仅是一个具有有限质量的几何点，这样的点就称之为质点。质点是可以描述任何大小、任何几何形状以及处于任何存在状况（气态、液态或固态等）下平动物

体的重要概念。如果物体的转动不影响其惯性中心运动的话，则该物体也可以用一个质点来描述。

质点运动学就是研究关于物体空间位置的确定以及这些位置随时间改变而发生变化的学科，而质点动力学则是探究物体之间的相互作用和这些相互作用所引起的物体运动状态的改变，即研究力与质点运动之间关系的学科。质点运动学和动力学是几何点的运动学和动力学，它反映了最基本、最简单的物理学规律，是我们学习理论力学的基础。如果研究的对象不是单个的质点，而是由若干个质点组成的集合，则这样的集合称为质点系。这里需要注意的是，在运动学中可以任意选取参考系，但是在动力学中，参考系需分为惯性参考系和非惯性参考系两种，在动力学方程的表述中需要考虑参考系的种类。本章主要讨论牛顿动力学问题，如不作特殊声明，这里的参考系均为惯性参考系。

1.1.1　直角坐标系

质点运动的空间位置一般是某个物理量的函数，最常用的参量就是时间 t。在直角坐标系中，存在一个质点 P，该质点在各个时刻的位置可由下式表示

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases} \tag{1.1.1}$$

该方程称为质点的**运动学方程**，该表示方法也称为**坐标描述法**。如果在任意时刻质点的三个坐标都不发生变化，则表示该质点相对此坐标系处于静止状态；反之，质点处于运动状态。

从（1.1.1）式中消去时间参量 t，则可以得到 x、y、z 坐标之间的关系，即该质点运动的**轨道方程**，它描述了质点的运动轨迹。所谓**运动轨迹**，就是将质点在各个时刻的位置连成的一条线。如果运动轨迹是一条曲线，则该质点的运动称为**曲线运动**。

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

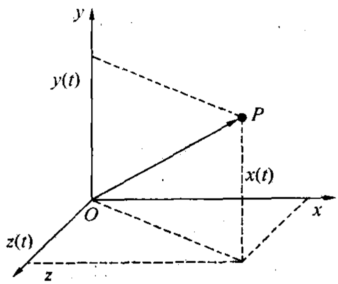

图 1.1　直角坐标

如果从坐标原点 O 到 P 点作一条有向线段，用矢量 $\vec{r}$ 表示，则该矢量称为位置矢量（简称位矢或者径矢）。如果分别用 $\vec{i}$、$\vec{j}$ 和 $\vec{k}$ 表示沿 x 轴、y 轴和 z 轴的单位矢量，那么 P 点的位矢可以表示为

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}。\tag{1.1.2}$$

一般情况下，位矢 $\vec{r}$ 也是时间的函数，即

$$\vec{r} = \vec{r}(t)。\tag{1.1.3}$$

在经典力学的范围内，质点的位置矢量函数是单值、连续和可微的数学函数。由数学知识可知，位矢的大小为

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}。\tag{1.1.4}$$

质点 P 的元位移可表示为沿三个坐标轴的元位移之和的形式

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}。\tag{1.1.5}$$

由于我们选用的直角坐标系是右手正交系，因此单位矢量应满足如下关系

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k},$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0。$$

质点在一段时间内沿轨道走过的长度恒为标量，称为质点运动的路程。而在一段时间内它位置矢量的改变量叫做质点在这段时间内的位移。设质点在 t 和 $t+\Delta t$ 时刻分别通过 A 点和 B 点，其位置矢量分别为 $\vec{r}(t)$ 和 $\vec{r}(t+\Delta t)$，则由质点初始位置引向 Δt 以后的末位置的矢量表示位置矢量的增量，即位移为

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)。\tag{1.1.6}$$

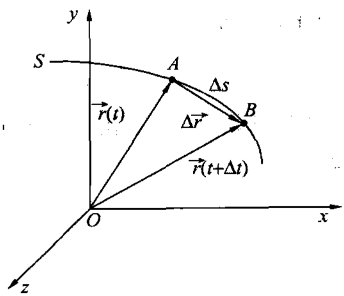

图 1.2 位移和路程

位移 $\Delta\vec{r}$ 除了表示 B 点与 A 点之间的距离以外，还表明了 B 点相对于 A 点的方位。因此位移是矢量，在运算中遵循矢量的运算法则。在图 1.2 中 Δs 表示质点在这段时间内所经历的路程，而 $\Delta\vec{r}$ 表示质点的位移。由此可以清楚地看到路程和位移的大小一般并不相同。当时间间隔 $\Delta t\rightarrow 0$ 时，$|\Delta\vec{r}|\rightarrow\Delta s$，记为 $|\mathrm{d}\vec{r}|=\mathrm{d}s$。

位移对时间的变化率表示质点运动的**瞬时速度**，它也是一个矢量，其定义为

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\vec{r}},\qquad(1.1.7)$$

即质点的瞬时速度为该质点位矢 $\vec{r}$ 对时间的一阶导数。瞬时速度 $\vec{v}$ 的方向沿运动轨迹的切线并指向质点前进的方向，其大小可记为

$$|\vec{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{|\mathrm{d}s|}{\mathrm{d}t}=\dot{s},\qquad(1.1.8)$$

它反映质点在该瞬时运动的快慢，称为**瞬时速率**。

由于质点运动中，瞬时速度的大小和方向都有可能随时间变化，因此为反映其大小或方向变化的快慢，这里有必要引入瞬时加速度的概念。如果在 Δt 时间内速度的变化是 $\Delta\vec{v}$，当 $\Delta t\rightarrow 0$ 时有

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\dot{\vec{v}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)=\ddot{\vec{r}}。\qquad(1.1.9)$$

$\vec{a}$ 称为质点在 t 时刻的**瞬时加速度**。瞬时加速度是速度 $\vec{v}$ 对时间的一阶导数，也是位矢 $\vec{r}$ 对时间的二阶导数。

在直角坐标系中，沿着三个坐标轴的单位矢量都不随时间发

生变化，因此有

$$\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k}。\tag{1.1.10}$$

如果以 v_x 、v_y 和 v_z 分别表示速度沿各个坐标轴的分量，则有

$$\begin{cases} v_x=\dot{x}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ v_y=\dot{y}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \\ v_z=\dot{z}=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{cases}\tag{1.1.11}$$

速度的大小为

$$v=|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}。\tag{1.1.12}$$

速度的方向余弦为

$$\cos(\vec{v},\vec{i})=\frac{v_x}{v},\cos(\vec{v},\vec{j})=\frac{v_y}{v},\cos(\vec{v},\vec{k})=\frac{v_z}{v}。\tag{1.1.13}$$

同样如果以 a_x 、a_y 和 a_z 分别表示加速度沿各个坐标轴的分量，则有

$$\vec{a}=\ddot{\vec{r}}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\tag{1.1.14}$$

其中

$$\begin{cases} a_x=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\dot{v}_x=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{x} \\ a_y=\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\dot{v}_y=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{y}, \\ a_z=\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\dot{v}_z=\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{z} \end{cases}\tag{1.1.15}$$

加速度的大小为

$$a=|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}。\tag{1.1.16}$$

1.1.2　平面极坐标系

尽管在解力学问题时，直角坐标系用得最普遍，但是当质点被限制在平面上运动时，选用其他合适的坐标系常常可以使问题得以简化。如在考虑中心力场问题时采用平面极坐标系就比选用直角坐标系方便得多。

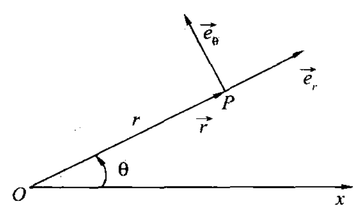

图 1.3　平面极坐标系

在平面极坐标系中，坐标原点 O 点称为极点，Ox 轴称为极轴，质点 P 的位置可以由坐标 (r,θ) 表示，如图 1.3 所示。其中 θ 角称为极角，该角正方向为逆时针方向。沿径向的单位矢量用 $\vec{e}_r$ 表示，叫做平面极坐标系的**径向单位矢量**。垂直于径向并指向极角增加的方向的单位矢量用 $\vec{e}_\theta$ 表示，称为平面极坐标系的**横向单位矢量**。

与直角坐标系不同，在平面极坐标系中，径向单位矢量 $\vec{e}_r$ 和横向单位矢量 $\vec{e}_\theta$ 的方向随质点的位置变化而改变，即 $\vec{e}_r$ 和 $\vec{e}_\theta$ 都是极角 θ 的函数，而 $\theta=\theta(t)$，因此 $\vec{e}_r$ 和 $\vec{e}_\theta$ 也是时间 t 的函数。正因为如此，我们总是把描述质点运动的矢量，如速度、加速度等，在质点所在的位置就地进行正交分解，并且在考虑矢量对时间求导时，必须同时考虑到单位矢量 $\vec{e}_r$ 和 $\vec{e}_\theta$ 也是时间的函数，否则就会出现错误。

显然，在平面极坐标系中，质点位置矢量的表示十分方便，为

$$\vec{r}(t)=r(t)\vec{e}_r(t)。\tag{1.1.17}$$

该方程也称为质点在平面极坐标系下的运动学方程。

于是质点的速度为

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\vec{e}_r)=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\vec{e}}_r。\tag{1.1.18}$$

从（1.1.18）式中可以看出，在平面极坐标系中速度由两项组成。前一项为位矢 $\vec{r}$ 的大小随时间的变化率，方向为径向单位矢量 $\vec{e}_r$ 方向，其物理意义很明显；而后一项必须在求出 $\dot{\vec{e}}_r$ 之后才能知道该项的具体物理意义。

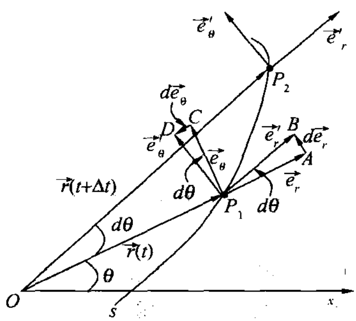

图 1.4 平面极坐标系下的单位矢量

这里我们采用单位矢量直接微商法计算 $\dot{\vec{e}}_r$。如图 1.4 所示，设质点在 Δt（$\Delta t\to 0$）时间段内沿曲线 s 从 P_1 点移动到 P_2 点，此时 $\Delta\theta\to 0$。

由于 $\vec{e}_r$ 和 $\vec{e}'_r$ 均为径向单位矢量，所以 ΔP_1AB 为等腰三角形。当 $\Delta\theta\to 0$ 时，P_1A 和 P_1B 两边近似垂直于底边 AB，因此在此极限情况下，$\mathrm{d}\vec{e}_r\perp\vec{e}_r$。也即，$\mathrm{d}\vec{e}_r$ 的方向与 $\vec{e}_\theta$ 相同，而其大小为 $|\mathrm{d}\vec{e}_r|=|\vec{e}_r|\cdot\mathrm{d}\theta=1\cdot\mathrm{d}\theta$，故有矢量关系式

$$\mathrm{d}\vec{e}_r=\mathrm{d}\theta\cdot\vec{e}_\theta。\tag{1.1.19}$$

利用相似的推导过程可以知道

$$\mathrm{d}\vec{e}_\theta=-\mathrm{d}\theta\cdot\vec{e}_r。\tag{1.1.20}$$

其中负号来源于 $\mathrm{d}\vec{e}_\theta$ 的方向与 $\vec{e}_r$ 相反。因此可以得到如下关系式

$$\begin{cases} \dot{\vec{e}}_r = \dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{e}_\theta = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \dot{\vec{e}}_\theta = \dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{e}_r = -\dot{\theta}\vec{e}_r \end{cases}, \tag{1.1.21}$$

根据（1.1.21）式中两个单位矢量微商的基本关系式，可计算出平面极坐标系下质点速度的表达式为

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta。 \tag{1.1.22}$$

由此式我们可以很明显地看出平面极坐标系速度表达式中第二项的物理意义了。它实际上表示垂直于位矢 $\vec{r}$ 方向的速度分量。令 $v_r = \dot{r}$，表示因位矢 $\vec{r}$ 的量值改变所引起的速度分量，称为径向速度；令 $v_\theta = r\dot{\theta}$，表示因位矢 $\vec{r}$ 方向改变所引起的速度分量，称为横向速度。因此，在平面极坐标系中速度可以表达为

$$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta。 \tag{1.1.23}$$

速度的大小可简单表示为

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}。 \tag{1.1.24}$$

与速度分解情况相似，加速度也可以在径向和横向两个方向上进行分解，推导过程如下：

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}(\dot{r}\vec{e}_r)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)}{\mathrm{d}t}。 \tag{1.1.25}$$

（1.1.25）式中右边第一项为径向速度随时间的变化率，第二项为横向速度随时间的变化率，我们对其分别进行计算。

$$\frac{\mathrm{d}(\dot{r}\vec{e}_r)}{\mathrm{d}t} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}}_r = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta。$$

该等式右边第一项是来源于径向速度量值的变化，第二项源于径向速度方向的变化。

$$\frac{\mathrm{d}(r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)}{\mathrm{d}t} = (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_\theta = (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r。$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com