

高等代数 题解

王萼芳 编

北京大学出版社

《高等代数》题解

(附：内容提要及补充题)

王萼芳 编

北京大学出版社

《高等代数》题解

(附：内容提要及补充题)

北京大学出版社出版

(北京大学校内)

1202 工厂印刷

新华书店北京发行所发行

787×1092毫米 32开本 12.125印张 25.5千字

1983年9月第一版 1983年9月第一次印刷

印数：1—160,000册

统一书号：13209·64 定价：1.25元

前 言

自从大学基础数学自学丛书《高等代数》(上海科技出版社)出版以来,许多读者来信询问书中一些习题的解法,并建议出版一本习题解答。

考虑到广大读者在自学的情况下,既缺乏老师的指导,又没有同学可磋商,要独立地完成习题的确有一定的困难。为了便于读者能更快更好地学完高等代数,我们决定满足读者的要求,编写了这本习题解。

本题解中的习题是按照《高等代数》中的习题顺序编排的(每一节的习题统一编号)。但是为了便于采用其它高等代数课本的读者也能使用此书,因此在每章的前面增加了内容提要,从而使此书成为一本独立的参考读物。此外,鉴于约当形在各方面的应用,又增加了“约当标准形简单介绍”一节。另外,为了加强读者在高等代数方面的训练,还在每章最后增加了一定数量的补充题,其中少量的题难度较大,读者可根据自己的情况进行选作。

对于计算题本书只给出答案,或作一、两个题示范,如答案不唯一,只给出一个答案以供参考;对于证明题,本书大部分作了较简练的证明,少部分给出提示。但是,解题的方法是多种多样的,书中的解法或提示只是提供读者参考。作者由衷地期望读者深入钻研教材,掌握基本理论,通过独立思考作出习题的正确解答。

王萼芳

1982年9月于北京大学

目 录

第一章 多项式	(1)
第一节 一元多项式及其运算	(1)
第二节 整除性理论	(6)
第三节 最大公因式	(12)
第四节 数域	(22)
第五节 因式分解定理	(24)
第六节 重因式	(29)
第七节 复系数与实系数多项式的因式分解	(31)
第八节 有理系数多项式	(33)
复习题一	(34)
补充题	(39)
补充题解答与提示	(42)
第二章 行列式	(48)
第一节 二、三级行列式	(48)
第二节 排列	(52)
第三节 n 级行列式	(54)
第四节 行列式的性质	(57)
第五节 行列式按某一行(列)展开	(68)
第六节 克莱姆法则	(73)
第七节 消元法	(78)
复习题二	(81)
补充题	(93)

补充题解答与提示	(97)
第三章 线性方程组	(102)
第一节 线性方程组	(102)
第二节 n 维向量空间	(111)
第三节 线性相关性	(114)
第四节 线性方程组有解判别定理	(127)
第五节 矩阵的秩	(133)
第六节 线性方程组解的结构	(137)
复习题三	(145)
补充题	(153)
补充题解答与提示	(156)
第四章 矩阵	(159)
第一节 矩阵的运算	(159)
第二节 矩阵的分块	(172)
第三节 矩阵的逆	(176)
第四节 等价矩阵	(186)
第五节 几类特殊矩阵	(192)
第六节 正交矩阵	(199)
复习题四	(203)
补充题	(210)
补充题解答与提示	(212)
第五章 矩阵的标准形	(214)
第一节 相似矩阵	(214)
第二节 特征值与特征向量	(216)
第三节 化为对角形的条件	(224)
第四节 化实对称矩阵为对角矩阵	(228)
第五节 约当标准形简单介绍	(236)

第六节 λ -矩阵	(239)
复习题五	(246)
补充题	(249)
补充题解答与提示	(252)
第六章 二次齐式	(255)
第一节 二次齐式及其矩阵表示	(255)
第二节 用正交变换化实二次齐式为平方和	(261)
第三节 标准形	(265)
第四节 规范形	(269)
第五节 正定二次齐式	(276)
复习题六	(282)
补充题	(285)
补充题解答与提示	(287)
第七章 线性空间与线性变换	(290)
第一节 线性空间	(290)
第二节 维数、基与坐标	(296)
第三节 基变换与坐标变换	(300)
第四节 线性空间的同构	(306)
第五节 线性子空间	(309)
第六节 线性变换及其运算	(317)
第七节 线性变换的矩阵	(321)
第八节 不变子空间	(334)
复习题七	(339)
补充题	(343)
补充题解答与提示	(347)
第八章 欧氏空间	(350)
第一节 定义与基本性质	(350)

第二节 标准正交基	(355)
第三节 子空间	(361)
第四节 正交变换与对称变换	(364)
复习题八	(367)
补充题	(374)
补充题解答及提示	(377)

第一章 多项式

第一节 一元多项式及其运算

基本内容

1. 多项式的定义

设 x 是一个变量(或称文字), n 是一非负整数, 表示式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

称为 x 的一个多项式.

记 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = f(x)$. $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 称为 $f(x)$ 的系数; $a_k x^k$ 称为 $f(x)$ 的 k 次项, a_k 称为 k 次项系数. 如果 $a_n \neq 0$, $a_n x^n$ 就称为 $f(x)$ 的首项, a_n 称为首项系数; n 称为 $f(x)$ 的次数, 记作“次 $f(x)$ ”.

如果两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的同次项的系数都相等, 就称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等, 记作 $f(x) = g(x)$.

系数全等于零的多项式称为零多项式, 记作 0. 零多项式是唯一的无法确定次数的多项式.

如果多项式的系数是整数、有理数、实数或复数, 就分别称此多项式为整系数多项式、有理系数多项式、实系数多项式或复系数多项式. 如果不加声明, 就理解为所讨论的是复系数多项式.

2. 多项式的运算

1) 加、减法

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$,

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

则当 $m \leq n$ 时,

$$f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} \\ + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0),$$

$$f(x) - g(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} \\ + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

(如果 $m < n$, 那么式中 $b_{m+1} = \cdots = b_n = 0$);

当 $m > n$ 时, 有相应的公式.

2) 乘法

$$f(x)g(x) = c_{n+m}x^{n+m} + c_{n+m-1}x^{n+m-1} + \cdots + c_1x + c_0,$$

其中

$$c_k = \sum_{i=0}^k a_{k-i}b_i \quad (k=0, 1, \cdots, n+m).$$

多项式的运算可以用竖式计算, 比较简单明了. 为了方便起见, 还可以应用分离系数法进行计算, 就是把 x 的方幂略去不写, 只把系数按次序写出来进行运算. 但是在计算时必须注意, 要把等于 0 的系数补进去.

3. 多项式的运算满足下面的一些规律

1) 加法交换律

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x).$$

2) 加法结合律

$$(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)).$$

3) 乘法交换律

$$f(x)g(x) = g(x)f(x).$$

4) 乘法结合律

$$(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x)).$$

5) 加乘分配律

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x).$$

6) 乘法消去律

如果 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$, 并且 $f(x)\neq 0$, 那么必有

$$g(x)=h(x).$$

7) 次数公式

$$\text{次}(f(x)\pm g(x))\leqslant \max(\text{次}f(x), \text{次}g(x)),$$

$$\text{次}(f(x)g(x))=\text{次}f(x)+\text{次}g(x).$$

习 题 及 解 答

1. 计算 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$ 及 $f(x)g(x)$:

$$(1) f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2,$$

$$g(x)=2x^3-x^2-5x+4.$$

$$\text{解 } f(x)+g(x)=x^4+(2+2)x^3+(-1-1)x^2$$

$$+(-4-5)x+(-2+4)$$

$$=x^4+4x^3-2x^2-9x+2;$$

$$f(x)-g(x)=x^4+(2-2)x^3$$

$$+[-(-1)-(-1)]x^2+[-(-4)$$

$$-(-5)]x+[-(-2)-4]$$

$$=x^4+x-6;$$

$$f(x)g(x)=2x^7+(4-1)x^6+(-2-2-5)x^5$$

$$+(-8+1-10+4)x^4+(-4+4$$

$$+5+8)x^3+(2+20-4)x^2$$

$$+(10-16)x-8$$

$$=2x^7+3x^6-9x^5-13x^4+13x^3$$

$$+18x^2-6x-8.$$

$$(2) f(x)=x^4-x^3-4x^2+2x+1,$$

$$g(x)=x^2-x+1.$$

解 应用分离系数法进行计算:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rrrrr}
 1 & -1 & -4 & 2 & 1 \\
 +) & & 1 & -1 & 1 \\
 \hline
 1 & -1 & -3 & 1 & 2
 \end{array} \\
 \text{所以 } f(x) + g(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rrrrr}
 1 & -1 & -4 & 2 & 1 \\
 -) & & 1 & -1 & 1 \\
 \hline
 1 & -1 & -5 & 3 & 0
 \end{array} \\
 \text{所以 } f(x) - g(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rrrrr}
 1 & -1 & -4 & 2 & 1 \\
 \times) & & 1 & -1 & 1 \\
 \hline
 1 & -1 & -4 & 2 & 1 \\
 & -1 & 6 & 4 & -2 & -1 \\
 & & 6 & -1 & -4 & 2 & 1 \\
 \hline
 1 & -2 & -2 & 5 & -5 & 1 & 1
 \end{array} \\
 \text{所以 } f(x)g(x) = x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 5x^2 + x + 1.
 \end{array}$$

$$(3) f(x) = x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 5x + 9,$$

$$g(x) = -x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 2.$$

$$\text{答: } f(x) + g(x) = -7x^2 + 3x + 11,$$

$$f(x) - g(x) = 2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 7,$$

$$\begin{aligned}
 f(x)g(x) = & -x^8 + 4x^7 + x^6 - 17x^5 + 13x^4 \\
 & + 21x^3 - 31x^2 - 8x + 18.
 \end{aligned}$$

$$(4) f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1,$$

$$g(x) = x^2 - 3x + 1.$$

答: $f(x) + g(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 2,$

$f(x) - g(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + 2x,$

$f(x)g(x) = 2x^6 - 7x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 6x^2$
 $- 4x + 1.$

(5) $f(x) = x^3 + (1+i)x^2 - (1-i)x - 1,$

$g(x) = x^3 - 2ix + 1 - 2i.$

答: $f(x) + g(x) = 2x^3 + (1+i)x^2 - (1+i)x - 2i,$

$f(x) - g(x) = (1+i)x^2 - (1-3i)x - (2-2i),$

$f(x)g(x) = x^6 + (1+i)x^5 - (1+i)x^4$
 $+ (2-4i)x^3 + (5+i)x^2$
 $+ (1+5i)x - (1-2i).$

2. 计算

(1) $(x^3 + x^2 - x - 1)(x^3 - 2x - 1) - 8x(x^2 - 5)$

答: 原式 $= (x^6 + x^5 - 3x^4 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1)$
 $- (8x^3 - 40x)$
 $= x^6 + x^5 - 3x^4 - 12x^3 + x^2 + 43x + 1.$

(2) $(x^3 + ax - b)(x^2 - 1) + (x^3 - ax + b)(x^2 - 1).$

答: 原式 $= 2x^3(x^2 - 1) = 2x^5 - 2x^3.$

3. 求 k, l, m , 使

$(2x^2 + lx - 1)(x^2 - kx + 1) = 2x^4 + 5x^3 + mx^2 - x - 1.$

解 因为

$(2x^2 + lx - 1)(x^2 - kx + 1)$
 $= 2x^4 + (l - 2k)x^3 + (-kl + 1)x^2 + (k + l)x - 1,$

所以

$(2x^2 + lx - 1)(x^2 - kx + 1) = 2x^4 + 5x^3 + mx^2 - x - 1$

的充分必要条件是

$$\begin{cases} l-2k=5, \\ -kl+1=m, \\ k+l=-1. \end{cases}$$

即 $k=-2, l=1, m=3.$

4. 设 $f(x), g(x)$ 是两个非零多项式, 问 $f(x), g(x)$ 的系数满足什么条件时, 次数公式

$$\text{次}(f(x)+g(x)) \leq \max(\text{次}f(x), \text{次}g(x))$$

中等号成立? 满足什么条件时, 小于号成立?

答: 当 $f(x), g(x)$ 的次数相等而且它们的首项系数之和等于零时, 次数公式中小于号成立; 否则, 等号成立.

第二节 整除性理论

基本内容

1. 带余除法

定理1 (带余除法) 对于任意两个多项式 $f(x), g(x)$ ($g(x) \neq 0$), 总可以找到唯一的一对多项式 $q(x)$ 及 $r(x)$, 使得

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

其中 $r(x) = 0$ 或 $\text{次}r(x) < \text{次}g(x)$.

$q(x)$ 称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的**商式**(简称**商**), $r(x)$ 称为**余式**(简称**余**).

定理2 (余数定理) 多项式 $f(x)$ 被 $x-c$ 除, 所得的余数等于 $f(c)$.

2. 整除的概念

定义 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是两个多项式, 如果有一个多项

式 $q(x)$ 使得

$$f(x) = q(x)g(x),$$

就称 $g(x)$ 整除(或除尽) $f(x)$. $f(x)$ 称为 $g(x)$ 的一个倍式,
 $g(x)$ 称为 $f(x)$ 的一个因式.

用“ $g(x)|f(x)$ ”表示 $g(x)$ 整除 $f(x)$; 用 $g(x) \nmid f(x)$
表示 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$. 当 $g(x)|f(x)$, 且 $g(x) \neq 0$ 时,
可以用 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 表示 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的商.

当 $g(x) \neq 0$ 时, $g(x)|f(x)$ 的充分必要条件是 $g(x)$ 除
 $f(x)$ 所得的余式等于零. 特别地, $x-c|f(x)$ 的充分必要
条件是 $f(c) = 0$.

3. 整除关系的一些性质

1) 零多项式是任何多项式的倍式, 而零多项式的倍
式只有零多项式.

2) 零次多项式是任何多项式的因式, 而零次多项
式的因式只有零次多项式.

3) $f(x)|g(x)$, 并且 $g(x)|f(x)$ 的充分必要条件是
 $f(x) = cg(x)$ (c 是一个非零常数).

4) 如果

$$f_1(x)|f_2(x), f_2(x)|f_3(x), \dots, f_{i-1}(x)|f_i(x),$$

那么

$$f_1(x)|f_i(x).$$

5) 如果 $g(x)|f_1(x), g(x)|f_2(x), \dots, g(x)|f_i(x)$,
那么 $g(x)$ 可以除尽 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_i(x)$ 的任一个组
合. 即: 对任意多项式 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_i(x)$ 都有
 $g(x)|u_1(x)f_1(x) + u_2(x)f_2(x) + \dots + u_i(x)f_i(x)$.

习 题 及 解 答

1. 计算 $f(x)$ 被 $g(x)$ 除所得的商及余:

$$(1) f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6,$$

$$g(x) = x^2 - 3x + 1,$$

$$(2) f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1, g(x) = 3x^2 - 2x + 1,$$

$$(3) f(x) = x^5 + x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 10x - 3,$$

$$g(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 1,$$

$$(4) f(x) = x^3 + (1-i)x^2 + (5+3i)x - i,$$

$$g(x) = x^2 + ix - 1,$$

$$(5) f(x) = x^4 - x^3 - 8x^2 + 11x - 3,$$

$$g(x) = x^2 - 3x + 1.$$

答: (1) $q(x) = 2x^2 + 3x + 11$, $r(x) = 25x - 5$,

$$(2) q(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{9},$$

$$r(x) = -2\frac{8}{9}x - \frac{2}{9},$$

$$(3) q(x) = x^2 - x + 3, r(x) = 0,$$

$$(4) q(x) = x + 1 - 2i,$$

$$r(x) = (4 + 2i)x + (1 - 3i),$$

$$(5) q(x) = x^2 + 2x - 3, r(x) = 0.$$

2. 设 $f(x) = 3x^4 - 10x^2 - 5x - 4$, $g(x) = x - 2$.

(1) 求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的商及余;

(2) 求 $f(2)$.

答: (1) 商 $= 3x^3 + 6x^2 + 2x - 1$, 余 $= -6$,

$$(2) f(2) = -6.$$

3. 设 $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $g(x) = x - c$.

求 $f(x)$ 被 $g(x)$ 除所得的余式。

答: $a_3c^3 + a_2c^2 + a_1c + a_0$.

4. 检验 $g(x)$ 是否是 $f(x)$ 的因式:

$$(1) f(x) = x^4 - 4x^3 - 1, g(x) = x^2 - 3x - 1,$$

$$(2) f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 1,$$

$$g(x) = x^3 + 2x + 1.$$

答: (1) 不是, (2) 不是。

5. 求 $g(x) = x^3 - x + 1$ 除 $f(x) = x^5 + 3x^4 - 3x^3 + kx^2 + 5x + 1$ 所得的商及余, 并且确定 k, l 的值, 使 $g(x)$ 整除 $f(x)$ 。

答: 商 $= x^2 + 3x - 2$, 余 $= (k+2)x^2 + (l+2)$;

当 $k = -2, l = -2$ 时, $g(x) | f(x)$ 。

6. 求 l, m , 使 $f(x) = x^3 + lx^2 + 5x + 2$ 能被 $g(x) = x^2 + mx + 1$ 整除。

解 因为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的余式为

$$(4 - lm + m^2)x + (2 - l + m),$$

所以当

$$\begin{cases} 4 - lm + m^2 = 0, \\ 2 - l + m = 0, \end{cases}$$

即

$$m = 2, \quad l = 4$$

时, $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除。

7. 已知 $x^2 + x - 2$ 能整除 $x^4 + x^3 + lx + m$. 求 l, m .

答: $l = 2, m = -4$ (求法同上题)。

8. 证明: 如果

$$g(x) | [f_1(x) + f_2(x)], g(x) | [f_1(x) - f_2(x)].$$

那么

$$g(x) | f_1(x), g(x) | f_2(x).$$