浙江省教育厅教研室
浙江省基础教育课程教材开发研究中心 编写

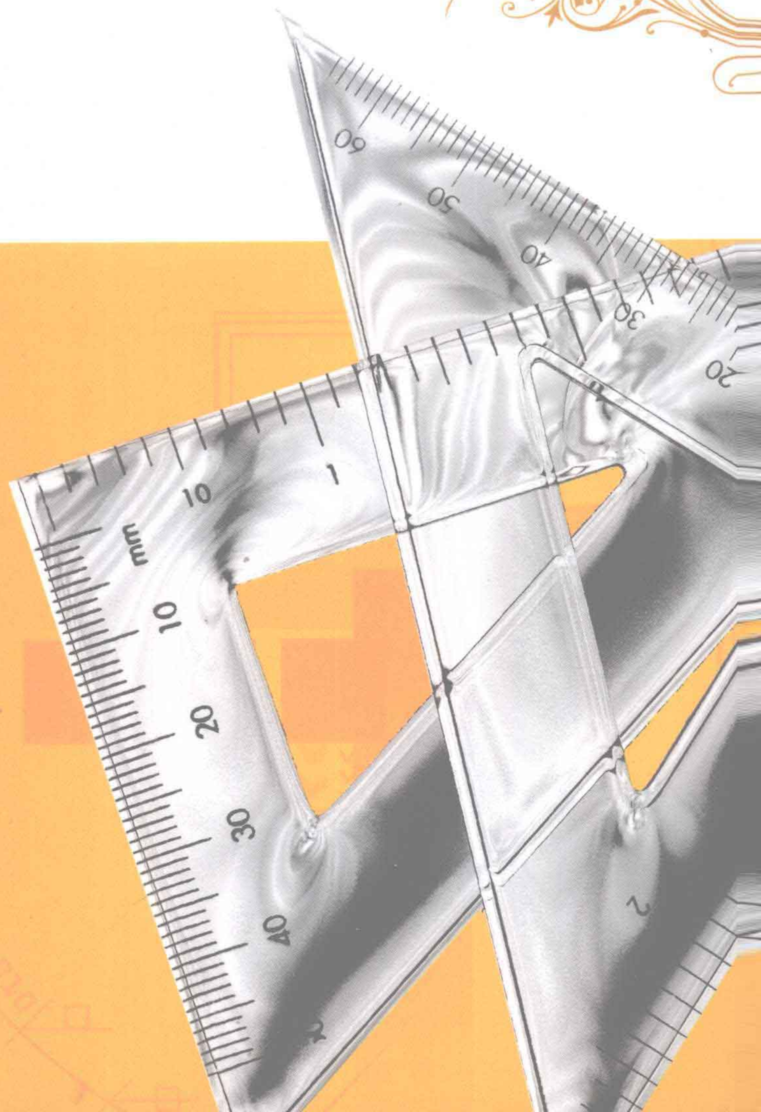
浙江省普通高中新课程

数学 总复习导引

ZHEJIANGSHENG PUTONG GAOZHONG XINKECHENG
SHUXUE ZONGFUXI DAOYIN

浙江教育出版社

理科版



图书在版编目(CIP)数据

浙江省普通高中新课程数学总复习导引：理科版 / 浙江省教育厅教研室、浙江省基础教育课程教材开发研究中心编写. —杭州：浙江教育出版社，2008.8(2009.8重印)

ISBN 978-7-5338-7655-5

Ⅰ. 浙… Ⅱ. ①浙…②浙… Ⅲ. 数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP数据核字(2008)第 124286 号

浙江省普通高中新课程

数学总复习导引(理科版)

浙江省教育厅教研室
浙江省基础教育课程教材开发研究中心 编写

责任编辑 胡 星 **责任校对** 卢 宁
装帧设计 韩 波 **责任印务** 陆 江

▶ **出 版** 浙江教育出版社
(杭州市天目山路 40 号 邮编:310013)
▶ **发 行** 浙江省新华书店集团有限公司
▶ **图文制作** 杭州富春电子印务有限公司
▶ **印 刷** 杭州钱江印刷有限公司
▶ **开 本** 787×1092 1/16
▶ **印 张** 17.5
▶ **字 数** 404 000
▶ **版 次** 2008 年 8 月第 1 版
▶ **印 次** 2009 年 8 月第 2 次印刷
▶ **标准书号** ISBN 978-7-5338-7655-5
▶ **定 价** 19.00 元

联系电话: 0571-85170300-80928
e-mail: zjjy@zjcb.com
网 址: www. zjeph.com

前 言

为贯彻落实教育部《普通高中课程方案(实验)》、《浙江省普通高中新课程实验第一阶段工作方案》和《浙江省普通高中新课程实验学科教学指导意见》精神,指导高中教师科学地开展高中新课程的复习教学,帮助高三学生系统地梳理学科学习内容,建构学科基本知识和能力结构,浙江省教育厅教研室、浙江省基础教育课程教材开发研究中心组织我省优秀教师和教研员,编写了"浙江省普通高中新课程总复习导引"丛书。

本套丛书与我省使用的普通高中课程标准实验教科书紧密配套,是高中新课程资源的有机组成部分,丛书共有思想政治、语文、数学(文科版)、数学(理科版)、英语、物理、化学、生物、历史、地理、技术(信息技术、通用技术)等11册。每册由若干个复习单元组成,涵盖相应学科的必修课程、选修课程IA及IB模块内容。复习单元按章节或模块顺序展开。每册设"知识归纳"、"例题解析"、"自主练习"、"综合检测"等栏目。有利于师生对照教学目标,落实新课程的学习要求,检测高中阶段的学科教学成效。

由于编写时间比较仓促,书中定有许多不足之处,欢迎广大师生在使用过程中提出修改意见和建议。

编 者

2009年7月

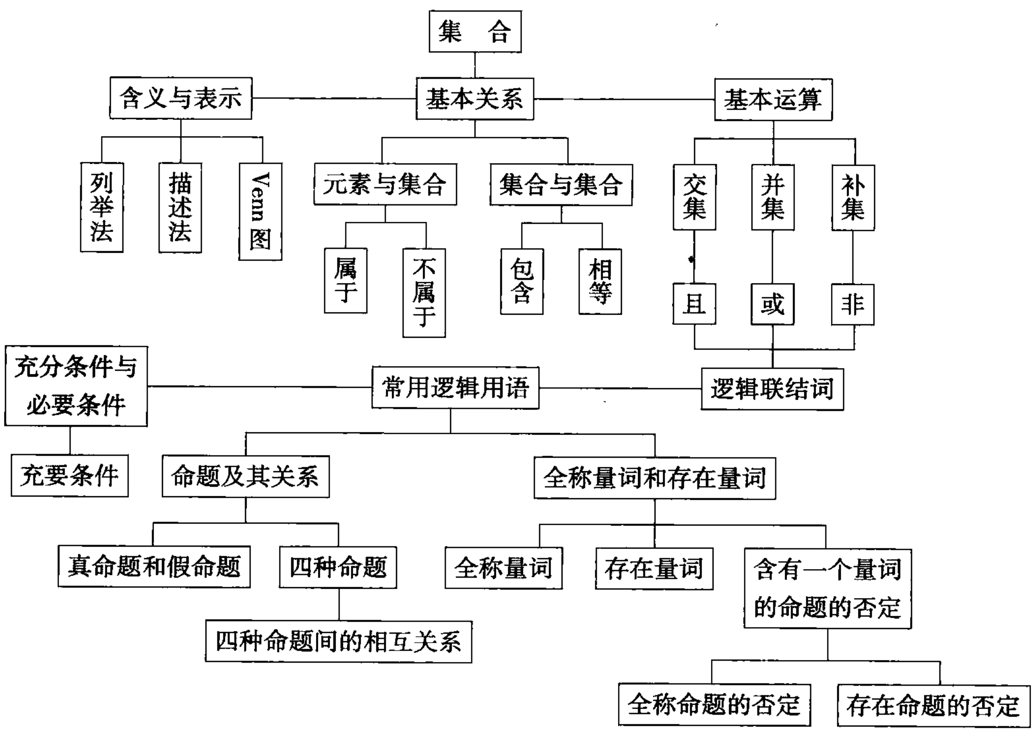
目录

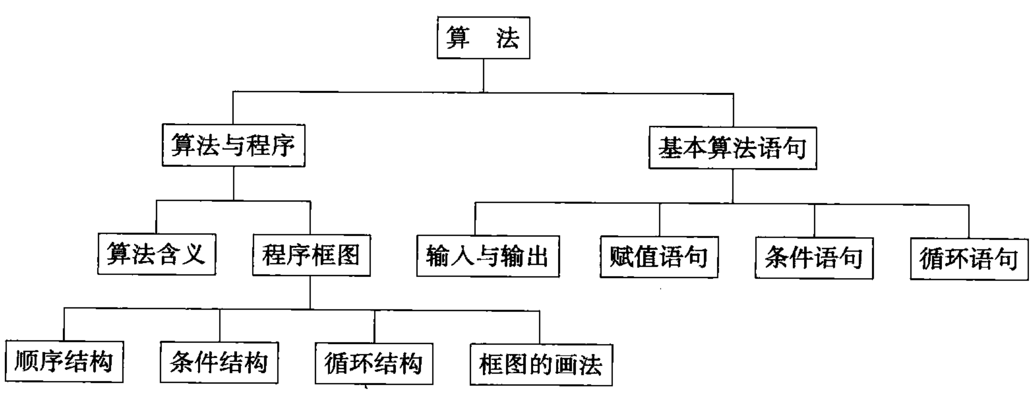
（带*号的为选修IB模块内容）

第一章 集合与常用逻辑用语及算法初步

本章主要知识有集合、常用逻辑用语和算法初步等，是高中数学的基础，也是人们日常生活中必备的数学基础知识. 集合语言是现代数学的基本语言之一，可以简洁、准确地表达数学的一些内容；使用常用逻辑用语可以准确地表达数学内容，正确地表达自己的思维，有助于人们进行思考、交流；算法是数学及数学应用的重要组成部分，在信息时代有着不可替代的作用，其思想贯穿整个高中数学思想体系.

本章知识结构如下：





1.1 集合的概念及关系

知识归纳

集合是不加定义的概念，其表示方法有列举法、描述法和Venn图表示法，常用的集合还有约定的字母符号表示(如实数集用$\mathbf{R}$;有理数集用$\mathbf{Q}$;空集用$\varnothing$等).

元素与集合之间具有“属于($\in$)”或“不属于($\notin$)”的关系，两个集合之间的关系有包含关系、相等关系和不包含关系.包含关系与子集概念等价，即集合A包含于集合B等价于A是B的子集，记作$A\subseteq B$;集合A真包含于集合B等价于A是B的真子集，记作$A\subsetneqq B$.集合的相等关系与包含关系相关，即$A\subseteq B$且$B\subseteq A$等价于$A=B$.

集合语言是现代数学的基本语言之一，复习时要将集合作为一种语言，能使用最基本的集合语言表示有关的数学对象，夯实运用数学语言进行交流的基础.

例题解析

例1 设A,B,I均为非空集合，且满足$A\subseteq B\subseteq I$,给出下列命题:①若$x\in A$,则必有$x\in B$;②若$x\notin A$,则必有$x\notin B$;③存在$A=B$的可能;④$\complement_I A\subseteq I$;⑤$\complement_I B\subseteq\complement_I A$;⑥若$x\in B$,则必有$x\in A$.其中正确的命题是________.(填序号)

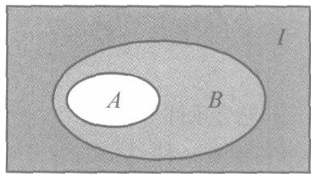


图1-1

解法1 由子集定义可知①③正确，②错误;由补集及子集的定义可知④⑤正确;由元素与集合的关系和子集的定义可知⑥错误.

解法2 画出Venn图(如图1-1),由图可知①③④⑤正确，②⑥错误.

评注 (1)符号$\in,\subseteq,I,\complement_I A$分别对应着不同的概念，理解它们与不同的概念之间的联系是正确解答这类问题的前提.

(2)借助Venn图的直观性，数形结合，更容易得出结论.

例2 已知$I=\mathbf{R}$,集合$A=\{x|(x+2)(x-3)<0\}$,$B=\{x|\log_3(x-a)<2\}$.

(1)当$0\in B$时，求实数a的取值范围.

(2)当$A\cap B=A$时，求实数a的取值范围.

(3)是否存在实数a,使得$A=B$?

(4)是否存在实数a,使得$B\subseteq A$?

解 先分别化简集合A,B,得$A=\{x|-2<x<3\}$,$B=\{x|a<x<9+a\}$.

(1)由$0\in B$,得$\begin{cases}0>a,\\0<9+a,\end{cases}$解得$-9<a<0$.

(2)由$A\cap B=A$,得$\begin{cases}-2\geqslant a,\\3\leqslant 9+a,\end{cases}$解得$-6\leqslant a\leqslant -2$.

(3)要使$A=B$,只需$\begin{cases}-2=a,\\3=9+a,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-2,\\a=-6,\end{cases}$由$a$无解，可知不存在$a$,使得$A=B$.

(4) 要使 $B\subseteq A$，只需 $\begin{cases}-2\leqslant a,\\ 3\geqslant 9+a,\end{cases}$ 由 a 无解，可知不存在 a，使得 $B\subseteq A$.

评注 正确理解元素与集合、集合与集合之间的关系是运用等价条件转化、解决问题的关键.

例3 (1) 已知集合 $A=\{x\mid x^2+2x-3=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid -x^2+2x+15=0,x\in\mathbf{R}\}$，求 $A\cap B$.

(2) 已知集合 $A=\{y\mid y=x^2+2x-3,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=-x^2+2x+15,x\in\mathbf{R}\}$，求 $A\cap B$.

(3) 已知集合 $A=\{y\mid y=x^2+2x-3,x\in\mathbf{N}\}$，$B=\{y\mid y=-x^2+2x+15,x\in\mathbf{N}\}$，求 $A\cap B$.

(4) 已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=x^2+2x-3,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)\mid y=-x^2+2x+15,x\in\mathbf{R}\}$，求 $A\cap B$.

解 (1) 集合 A,B 是二次方程的解集，求 $A\cap B$ 即求两个二次方程的公共解构成的集合.

由 $x^2+2x-3=0$，得 $x=-3$，或 $x=1$. 由 $-x^2+2x+15=0$，得 $x=-3$，或 $x=5$.

$\therefore$ $A\cap B=\{-3,1\}\cap\{-3,5\}=\{-3\}$.

(2) 集合 A,B 是二次函数的函数值 y 的取值范围，$A\cap B$ 即为两个二次函数值的公共部分构成的集合.

$\because$ $y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4\geqslant-4$，$y=-x^2+2x+15=-(x-1)^2+16\leqslant16$.

$\therefore$ $A\cap B=\{y\mid y\geqslant-4\}\cap\{y\mid y\leqslant16\}=\{y\mid -4\leqslant y\leqslant16\}$.

(3) 由 $x\in\mathbf{N}$，得 A,B 是变量 x 取自然数时所对应的整数值构成的集合，

$\because$ $A=\{-3,0,5,12,21,\cdots\}$，$B=\{15,16,12,7,0,-9,\cdots\}$，$\therefore$ $A\cap B=\{0,12\}$.

(4) 集合 A,B 表示抛物线上的点集(或二元二次方程的解集)，

$\therefore$ $A\cap B$ 是两条抛物线的交点构成的集合.

由 $\begin{cases}y=x^2+2x-3,\\ y=-x^2+2x+15,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\ y=12,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-3,\\ y=0.\end{cases}$ $\therefore$ $A\cap B=\{(3,12),(-3,0)\}$.

评注 (1) 在描述法表示的集合 $\{x\mid x\in P\}$ 中，有代表元素 x 及它所具有的性质 P 两项内容.

(2) 用描述法表示集合具有概括、简练和抽象的特点，用列举法表示集合具有直观、清晰和可数的特点，解决问题时要根据需要进行互化.

自主练习

1. 已知 $M=\varnothing$，则 ( )

(A) $0\in M$ (B) $\{0\}\subsetneqq M$ (C) $M\subsetneqq\{0\}$ (D) $\{0\}=M$

2. 已知集合 $A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x+y=1,\\ 2x-y=2,\end{cases}x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\right\}$，则与 A 相等的集合是 ( )

(A) $(1,0)$ (B) $x=1,y=0$ (C) $\{(1,0)\}$ (D) $\{0,1\}$

3. 已知集合 $Q=\{m,n\}$，则 Q 的非空真子集的个数为 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4. 已知集合 A 满足 $\{7,8\}\subsetneqq A\subseteq\{7,8,9,10,11\}$，则符合条件的集合 A 共有________个.

5. 设 $U=\mathbf{Z}$，$A=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，则 $\complement_U A=$________，$\complement_U B=$

________.

6. 已知集合 $M=\{a,a^2\}$，$N=\{2-a,a\}$，且 $M=N$，则实数 $a=$________.
7. 设 U 是全集，A,B 是非空集合，且 $A\subsetneqq B\subsetneqq U$，则集合 $A\cap \complement_U B=$________.
8. 已知 $A\cap B=B$，且 $A=\{3,4,5\}$，求满足条件的集合 B.

9. 设 $I=\{x|x$ 为小于 20 的正偶数$\}$，若 $A\cap \complement_I B=\{12,14\}$，$B\cap \complement_I A=\{2,4,16,18\}$，$\complement_I A\cap \complement_I B=\varnothing$，求集合 A,B.

10. 设 M 是关于 x 的不等式 $(2x-a-1)(x+2a-3)<0$ 的解集，已知 $0\in M$，求实数 a 的取值范围，并用 a 表示集合 M.

1.2 集合的运算

知识归纳

集合有下列运算：

集合 A 与 B 的交集：$A\cap B=\{x|x\in A$，且 $x\in B\}$；

集合 A 与 B 的并集：$A\cup B=\{x|x\in A$，或 $x\in B\}$；

集合 A 中的子集 B 的补集：$\complement_A B=\{x|x\in A$，且 $x\notin B\}$.

Venn 图可以表示集合运算，将集合语言转换成图形语言. 从 Venn 图开始，数形结合的思想方法始终贯穿于集合知识之中，复习时要注意提炼并掌握知识中蕴涵的思想方法.

集合的交、并、补运算与逻辑联结词且、或、非相互对应. 集合的运算与两个集合之间的关系也存在联系，如 $A\cap B=A$ 等价于 $A\subseteq B$ 等.

复习时要立足于这一认识：集合运算是表达某些数学内容的一种语言.

例题解析

例 1 已知集合 $A=\{2,4,6,8,9\}$，$B=\{1,2,3,5,8\}$. 集合 C 是这样一个集合：若各元素都加 2，就变为 A 的一个子集；若各元素都减 2，就变为 B 的一个子集. 求集合 C.

解 集合 A 中各元素都减 2，得 $\{0,2,4,6,7\}$；集合 B 中各元素都加 2，得 $\{3,4,5,7,10\}$. 由题意得 $C\neq\varnothing$，且 $C\subseteq\{0,2,4,6,7\}$，$C\subseteq\{3,4,5,7,10\}$， $\therefore$ $C\neq\varnothing$，且 $C\subseteq\{4,7\}$.

$\therefore$ $C=\{4\}$，或 $C=\{7\}$，或 $C=\{4,7\}$.

评注 通过本例可以体会到列举法能直观地表示集合，根据条件即可写出集合 C 所属的两个集合，而集合 C 正是这两个集合交集的子集，得到交集即可得到集合 C.

例 2 设集合 $M=\{x\mid x^2-(k-3)x-4k=0\}$，$N=\{x\mid x>0, x\in\mathbf{R}\}$. 若 $M\cap N=\varnothing$，求实数 k 的取值范围.

分析 因为 M 是一元二次方程的解集，N 是正实数集，所以 $M\cap N=\varnothing$ 等价于二次方程无解或有两个非正实数解.

解 当 $M=\varnothing$ 时，$\Delta=(k-3)^2+16k=k^2+10k+9<0$，解得 $-9<k<-1$.

当 $M\neq\varnothing$ 时，$x^2-(k-3)x-4k=0$ 有两个非正实数解，

$$\begin{cases}\Delta=k^2+10k+9\geqslant 0,\\ k-3\leqslant 0,\\ -4k\geqslant 0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}k\leqslant -9, \text{或 } k\geqslant -1,\\ k\leqslant 3,\\ k\leqslant 0,\end{cases}\quad \text{解得 } k\leqslant -9, \text{或 } -1\leqslant k\leqslant 0.$$

$\therefore$ k 的取值范围是 $k\leqslant 0$.

评注 集合是一种数学语言，根据集合运算作出等价转化是解决集合运算问题的基本思路，而理解问题中集合表示的对象，联想有关知识，是正确转化的关键.

例 3 已知 $A=\{x\mid x^2-5x+4=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}$，$C=\{x\mid x^2-mx+4=0\}$. 若 $A\cup B=A$，$A\cap C=C$，求实数 a，m 的值.

解 化简集合 A，得 $A=\{1,4\}$. 解方程 $x^2-ax+(a-1)=0$，得 $x=1$，或 $x=a-1$.

由 $A\cup B=A$，得 $B\subseteq A$. $\because$ $B\neq\varnothing$，$\therefore$ $B=\{1\}$，或 $B=\{1,4\}$，

$\therefore$ $a-1=1$ 或 $a-1=4$，$\therefore$ $a=2$，或 $a=5$.

又 $\because$ $A\cap C=C$，$\therefore$ $C\subseteq A$.

当 $\Delta=m^2-16<0$，即 $-4<m<4$ 时，$C=\varnothing\subseteq A$；

当 $\Delta=m^2-16\geqslant 0$，即 $m\geqslant 4$，或 $m\leqslant -4$ 时，$C\neq\varnothing$.

由 $C\subseteq A$，得 $C=\{1\}$，或 $C=\{4\}$，或 $C=\{1,4\}$，此时 $m=5$.

综上可得，$a=2$，或 $a=5$；$-4<m<4$，或 $m=5$.

评注 对已知的集合运算和集合间的关系，通常是根据有关概念进行等价转化，如 $A\cup B=B$，$A\cap B=A$ 均等价于 $A\subseteq B$.

自主练习

1. 已知集合 $P=\{x\mid x<2\}$，$Q=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$，则 $P\cup Q$ 等于 ( )

(A) $\{x\mid -1\leqslant x<2\}$ (B) $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$

(C) $\{x\mid x\leqslant 3\}$ (D) $\{x\mid x\geqslant -1\}$

2. 已知集合 $M=\{a,0\}$，$N=\{1,2\}$，且 $M\cap N=\{1\}$，则 $M\cup N$ 等于 ( )

(A) $\{a,0,1,2\}$ (B) $\{1,0,1,2\}$ (C) $\{0,1,2\}$ (D) $\{a\}$

3. 设集合 $M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2-y=0, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$，则集合 $M\cap N$ 中元素的个数为 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4. 若全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x^2+px+12=0, x\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+q=0, x\in\mathbf{N}^*\}$，且 $A\cap\complement_U B=\{4\}$，$B\cap\complement_U A=\{2\}$，则 $p+q=$________.

5. 已知全集 $S=\{a,b,c,d,e\}$，$M=\{a,c,d\}$，$N=\{b,d,e\}$，则 $\complement_S M\cap\complement_S N=$________.

6. 某班在期末测试中，有 36 人数学成绩不低于 80 分，有 20 人物理成绩不低于 80 分，有 15 人的数学、物理成绩都不低于 80 分，则这两科成绩中至少有一科不低于 80 分的人数为

________.

7. 设 $A=\{x \mid \sqrt{4x-x^2}>ax\}$，$B=\{x \mid 0<x<1\}$. 若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是________.

8. 集合 $A=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x \mid x^2-nx+2=0\}$，若 $A\cap B=B$，求实数 n 的取值范围.

9. 已知集合 $A=\{x \mid -1<x<2\}$，$B=\{x \mid a<x<a+1\}$.

(1) 若 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

(2) 若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

10. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x \mid x^2-ax+a-1=0\}$，且 $A\cup B=A$，求实数 a 的值.

1.3 四种命题与充要条件

知识归纳

"若 p，则 q"形式的命题由"条件 p"和"结论 q"构成，命题有真有假.

记原命题："若 p，则 q"，则它的逆命题："若 q，则 p"，否命题："若 $\neg p$，则 $\neg q$"，逆否命题："若 $\neg q$，则 $\neg p$".

互为逆否命题的两个命题具有相同的真假性，互为逆命题或互为否命题的两个命题的真假性没有关系.

若命题"若 p，则 q"是真命题，即 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

若命题"若 p，则 q"和它的逆命题"若 q，则 p"都是真命题，即有 $p\Leftrightarrow q$，则 p 是 q 的充要条件，显然 q 也是 p 的充要条件.

本节是常用逻辑用语的重点，也是重要的数学基础知识，复习中不仅要能分清"条件"与"结论"，还要掌握其中存在的一些等价关系，理解本节知识的地位、作用和价值.

例题解析

例 1 已知 a,b 为实数，给出命题：若 $x^2+ax+b=0$ 有实数解，则 $a^2-4b\geqslant 0$. 试写出该命题的逆命题、否命题和逆否命题，并判断这些命题的真假.

解 逆命题：若 $a^2-4b\geqslant 0$，则 $x^2+ax+b=0$ 有实数解；

否命题：若 $x^2+ax+b=0$ 无实数解，则 $a^2-4b<0$；

逆否命题：若 $a^2-4b<0$，则 $x^2+ax+b=0$ 无实数解.

由于原命题、逆命题均为真命题，因此，四个命题均为真命题.

评注 (1) 正确解答本例的关键是分清原命题中的条件与结论，正确写出条件、结论的否定形式，并掌握四种命题的组成结构.

(2) 在四个命题中，任意两个命题之间的关系或是“互否”，或是“互逆”，或是“互为逆否”，而互为逆否命题的两个命题具有相同的真假性；互为逆命题或否命题的两个命题的真假性没有关系.

例 2 判断命题“若 $c>0$，则 $y=x^2+x-c$ 的图象与 x 轴有两个交点”的逆否命题的真假.

分析 因为一个命题和它的逆否命题是等价命题，所以只要判断原命题的真假即可. 当然也可先写出它的逆否命题，然后判断真假.

解法 1 $\because$ $c>0$，$\therefore$ $4c>0$. $\therefore$ $1+4c>0$.

$\therefore$ $y=x^2+x-c$ 的判别式 $\Delta=1+4c>0$.

$\therefore$ $y=x^2+x-c$ 的图象与 x 轴有两个交点.

$\therefore$ 原命题为真命题，而原命题与它的逆否命题等价，从而其逆否命题也为真命题.

解法 2 原命题“若 $c>0$，则 $y=x^2+x-c$ 的图象与 x 轴有两个交点”的逆否命题是“若 $y=x^2+x-c$ 的图象与 x 轴没有两个交点，则 $c\leqslant 0$”.

$\because$ $y=x^2+x-c$ 的图象与 x 轴没有两个交点，

$\therefore$ $\Delta=1+4c\leqslant 0$. $\therefore$ $c\leqslant -\dfrac{1}{4}\leqslant 0$.

$\therefore$ “若 $y=x^2+x-c$ 的图象与 x 轴没有两个交点，则 $c\leqslant 0$”为真命题.

解法 3 记命题 p:$c>0$，则使 p 成立的集合是 $A=\{c\in\mathbf{R}\mid c>0\}$.

记命题 q:$y=x^2+x-c$ 的图象与 x 轴有两个交点，则使 q 成立的集合是 $B=\{c\in\mathbf{R}\mid y=x^2+x-c$ 的图象与 x 轴有两个交点$\}=\left\{c\in\mathbf{R}\,\middle|\,c>-\dfrac{1}{4}\right\}$.

$\because$ $A\subseteq B$，$\therefore$ $p\Rightarrow q$，即原命题为真命题，从而其逆否命题也为真命题.

评注 (1) 判断一个命题的真假可以直接判断，也可以利用等价命题来判断，当条件与结论涉及数集时，还可以利用集合之间的包含关系来判断.

(2) 在书写原命题的否命题、逆否命题时，会碰到对条件或结论的“否定”(反设). 解决问题时，要注意归纳总结.

例 3 (1) 当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$(1-|x|)(1+x)>0$ 成立的充要条件是 ( )

(A) $|x|<1$ (B) $x<1$

(C) $x<-1$ (D) $x<-1$，或 $-1<x<1$

(2) 设 $x,y\in\mathbf{R}$，问：$x\neq y$ 是 $x^2\neq y^2$ 成立的什么条件？

(3) 分别求能使不等式 $|x|<1$ 成立的一个充分不必要条件和一个必要不充分条件.

解 (1) $(1-|x|)(1+x)>0\Leftrightarrow\begin{cases}1-|x|>0,\\1+x>0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-|x|<0,\\1+x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<1,\\x>-1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<-1,\text{或 }x>1,\\x<-1\end{cases}\Leftrightarrow -1<x<1$，或 $x<-1$. 故选(D).

(2) 命题：若 $x\neq y$，则 $x^2\neq y^2$ 与其逆否命题：若 $x^2=y^2$，则 $x=y$ 等价.

∵ 逆否命题不成立，而逆否命题的逆命题成立，

∴ $x\neq y$ 是 $x^2\neq y^2$ 成立的必要不充分条件.

(3) 不等式 $|x|<1$ 的解为 $-1<x<1$.

∴ 集合 $A=\{x|-1<x<1\}$ 是 $|x|<1$ 成立的充要条件.

∴ 集合 A 的任意一个子集，都是 $|x|<1$ 成立的充分不必要条件，如取 $x=0$，$0<x<1$ 等. 能包含集合 A 的集合是 $|x|<1$ 成立的必要不充分条件，如取 $-2<x<2$，$x<3$ 等(本小题是一道开放型问题).

评注 (1) 第(1)小题是通过直接推导得出结论，过程中的每一步都是等价的，这是判断充要条件的常用方法.

(2) 命题成立，则命题的条件是结论的充分条件；原命题的逆命题成立，则原命题的条件是结论的必要条件. 这是判定充分、必要或充要条件问题的一种方法.

(3) 因为原命题与其逆否命题等价，故碰到否定表述的问题时，可以先将其转化为逆否命题，使问题的表述变为肯定形式. 第(2)小题就是依据这一结论先进行转化，再作出判断的.

自主练习

1. 给出下列命题：①"若 $x+y=0$，则 x，y 互为相反数"的逆命题；②"全等三角形的面积相等"的否命题；③"若 $q\leqslant 1$，则 $x^2+2x+q=0$ 有实数根"的逆否命题；④"不等边三角形的三个内角相等"的逆命题. 其中真命题为 ( )
   (A) ①② (B) ②③ (C) ①③ (D) ③④
2. A：$a\in\mathbf{R}$，$|a|<1$；B：关于 x 的二次方程 $x^2+(a+1)x+a-2=0$ 的一个根大于零，另一个根小于零. A 是 B 的 ( )
   (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
   (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
3. 命题 p：若 $A\cap B=B$，则 $A\subseteq B$；命题 q：若 $A\not\subseteq B$，则 $A\cap B\neq B$. 命题 p 与命题 q 的关系是 ( )
   (A) 互为逆命题 (B) 互为否命题 (C) 互为逆否命题 (D) 不能确定
4. 若 A 是 B 的必要不充分条件，则 $\neg B$ 是 $\neg A$ 的________.
5. 命题"若 x，y 是奇数，则 $x+y$ 是偶数"的逆否命题是________________.
6. 已知命题 p：当 $x=3$，或 $x=-1$ 时，有 $x^2-2x-3=0$，则 p 的逆否命题是________________.
7. 已知 $A=\{x|x$ 满足条件 $p\}$，$B=\{x|x$ 满足条件 $q\}$，试用"充分"、"必要"或"充要"填空.
   (1) 如果 $A\subseteq B$，那么 p 是 q 的________条件.
   (2) 如果 $B\subseteq A$，那么 p 是 q 的________条件.
   (3) 如果 $A=B$，那么 p 是 q 的________条件.
8. 分别求出能使不等式 $|2x+4|<6$ 成立的一个充分不必要条件和一个必要不充分条件.

9. 求证："$a+b+c=0$"是"方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 1"的充要条件.

10. 已知 $p:\left\{x \middle| \begin{cases} x+2\geqslant 0, \\ x-10\leqslant 0 \end{cases}\right\}$，$q:\{x\mid -m\leqslant x\leqslant 1+m, m>0\}$，若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件，求实数 m 的取值范围.

1.4 逻辑联结词与量词

知识归纳

简单的逻辑联结词有"或（∨）"、"且（∧）"、"非（¬）"，它们能反映命题的构成，也能联结成新的命题. 复习时，要结合具体问题正确理解逻辑联结词的含义和作用，会判断由逻辑联结词联结成的命题的真假.

量词分为"全称量词（∀）"和"存在量词（∃）"，要理解它们各自的含义，并能正确地对含有一个量词（全称量词或存在量词）的命题进行否定.

本节知识涉及的每个概念都有相应的数学符号表示，需要建立它们与各自概念之间的联系，能正确地运用.

例题解析

例 1 对于下列命题 p，写出"$\neg p$"形式的命题.

(1) p：$91\in A\cap B$（其中全集 $U=\mathbf{N}^*$，$A=\{x\mid x$ 是素数$\}$，$B=\{x\mid x$ 是正奇数$\}$）.

(2) p：有一个素数是偶数.

(3) p：任意正整数都是素数或合数.

(4) p：三角形有且仅有一个外接圆.

解 (1) $\neg p$：$91\notin A$，或 $91\notin B$.

(2) $\neg p$：每一个素数都不是偶数.

(3) $\neg p$：存在一个正整数既不是素数，也不是合数.

(4) $\neg p$：存在一个三角形有两个以上的外接圆或没有外接圆.

评注 本例涉及的全称量词和存在量词大部分都是用自然语言表达的，可以试着把(2)～(4)中的命题用符号语言表达，再重新完成本例，谈一谈你的感受.

例 2 判断下列命题的真假：

(1) 已知 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，若 $a\neq c$，或 $b\neq d$，则 $a+b\neq c+d$.

(2) $\forall x\in\mathbf{N}$，$x^3>x^2$.

(3) 若 $m>1$，则方程 $x^2-2x+m=0$ 无实数根.

(4) $\exists x_0\in\mathbf{R},x^2-2x-3=0$.

解 (1) 假命题,反例:$1\neq4$,或 $5\neq2$,而 $1+5=4+2$.

(2) 假命题,反例:$\exists 0\in\mathbf{N},x^3=x^2$.

(3) 真命题,$m>1\Rightarrow\Delta=4-4m<0\Rightarrow$方程无实数根.

(4) 真命题,当 $x=3$ 时,$x^2-2x-3=0$.

评注 对含有全称量词的命题,要判定其是真命题,需要给出证明;而要判定其是假命题,只需给出一个反例即可.对含有存在量词的命题,要判定其是真命题,只需找到一个使其成立的条件即可.

例3 已知命题 p:方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不相等的正实数根,命题 q:方程 $4x^2+4(m+2)x+1=0$ 无实数根.若"$p\vee q$"为真命题,试求实数 m 的取值范围.

解法1 "$p\vee q$"为真命题,等价于 p 为真命题,或 q 为真命题.

当 p 为真命题时,有$\begin{cases}\Delta=m^2-4>0,\\ x_1+x_2=-m>0,\\ x_1x_2=1>0,\end{cases}$得 $m<-2$.

当 q 为真命题时,有 $\Delta=16(m+2)^2-16<0$,得 $-3<m<-1$.

综上所述,$m<-1$.

解法2 由条件可得,使命题 p 为真命题的 m 的值属于集合 $P=\{m|m<-2\}$,使命题 q 为真命题的 m 的值属于集合 $Q=\{m|-3<m<-1\}$,

$\therefore$ $P\cup Q=\{m|m<-1\}$即为所求.

评注 逻辑联结词"且"、"或"、"非"与集合中"交"、"并"、"补"对应,结合具体问题,理解两者各自的含义,有助于运用所学知识解决问题.

自主练习

1. 已知命题 $p:\varnothing\subseteq\{0\}$,$q:0\notin\varnothing$,$r:\varnothing=\{0\}$,则下列判断正确的是 ( )
(A) "$p\wedge q$"与"$p\wedge r$"都是真命题　(B) "$p\vee q$"与"$p\vee r$"都是真命题
(C) "$p\wedge q$"与"$p\wedge r$"都是假命题　(D) "$p\vee r$"与"$q\vee r$"都是假命题

2. 已知命题 $p:\forall x\in\mathbf{R},\sin x\leqslant1$,则 ( )
(A) $\neg p:\exists x\in\mathbf{R},\sin x\geqslant1$　(B) $\neg p:\forall x\in\mathbf{R},\sin x\geqslant1$
(C) $\neg p:\exists x\in\mathbf{R},\sin x>1$　(D) $\neg p:\forall x\in\mathbf{R},\sin x>1$

3. 给出下列结论:①"$p\wedge q$"为真命题是"$p\vee q$"为真命题的充分不必要条件;②"$p\wedge q$"为假命题是"$p\vee q$"为假命题的充分不必要条件;③"$p\vee q$"为真命题是"$\neg p$"为假命题的必要不充分条件;④"$\neg p$"为真命题是"$p\wedge q$"为假命题的必要不充分条件.其中正确的结论是 ( )
(A) ①②　(B) ①③　(C) ②④　(D) ③④

4. 已知命题 $p:\exists x\in\mathbf{Z},x^3<1$,则 $\neg p$ 为________.

5. 已知命题 $p:x\geqslant3$,命题 $q:x^2-5x+4<0$.若 $p\wedge q$ 为真命题,则实数 x 的取值范围为________.

6. 给出下列命题:①$\forall x\in\mathbf{R},2x^2-3x+4>0$;②$\forall x\in\{1,-1,0\},2x+1>0$;③$\exists x\in\mathbf{N}$,使 $x^2\leqslant x$;④$\exists x\in\mathbf{N}^*$,使 x 为 17 的约数.其中正确的命题是________.(填序号)

7. 已知 $p:\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant2$,$q:x^2-2x+1-m^2\leqslant0$ $(m>0)$.若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要条件,则实数