◎新课程学习能力评价课题研究资源用书

◎主编 刘德 林旭 编写 新课程学习能力评价课题组

学习高手

状元塑造车间

学习技术化

TECHNOLOGIZING STUDY

配人教A版

数学 必修2

推开这扇窗

- 全解全析
- 高手支招
- 习题解答
- 状元笔记

光明日报出版社

目录

第一章　空间几何体

走近学科思想

ZOUJINXUEKESIXIANG

转化思想

转化思想是“把问题从一种形式向另一种形式转化的思想”. 它可以从语言描述向图形表示转化，或从语言表达向符号形式转化，或是向某一种情况的反面转化，或是一种位置关系向另一种位置关系的转化. 转化思想是解决数学问题的一种最基本的数学思想，在研究数学问题时，通常是将未知问题转化为已知问题，将复杂问题转化为简单问题，将抽象问题转化为具体问题，将实际问题转化为数学问题，也常常在不同的数学问题之间互相转化，转化思想在解决数学问题时几乎无处不在. 在本章中主要表现在将符号语言与图形语言相互转化、将复杂的组合体问题与简单几何体问题相互转化.

本章要点导读

BENZHANGYAODIANDAODU

知识要点	课标要求	学习技术
柱、锥、台、球的结构特征	1. 了解柱、锥、台、球及其简单组合体的结构特征； 2. 会运用其描述现实中简单物体的结构.	对柱、锥、台、球的结构特征，要注重从实例入手，结合具体物体理解概念. 采取对比学习的方法，区分各几何体概念的异同.
三视图与直观图	1. 会画简单空间图形的三视图； 2. 能识别三视图表示的立体模型； 3. 会用斜二测画法画出它们的直观图.	对三视图的学习，要紧密结合实物和图纸；着重考查多面体、旋转体及简单组合体的三视图，注意可见及不可见轮廓线的画法. 用斜二测画法画直观图的关键是把握在原图中找到决定图形位置与形状的点的方法.
柱、锥、台、球的表面积与体积	1. 了解柱、锥、台、球的表面积和体积计算公式； 2. 会应用面积和体积公式进行有关计算.	在柱、锥、台、球的面积和体积的计算中，应重点把握侧面积公式的推导，这是通过它的侧面展开图来完成的，把握将立体问题（求侧面积）转化为平面问题（展开图面积）的思想方法. 多利用身边的实例，将问题的实际情境与具体物体结合起来，强化实物的形象作用.

1.1 空间几何体的结构

1.1.1 柱、锥、台、球的结构特征
1.1.2 简单组合体的结构特征

举世闻名的比萨斜塔是意大利一个著名景点.它的构造从外形上看是由八个圆柱组合成的一个组合体,我们周围的很多建筑物和它一样,也都是由一些简单几何体组合而成的组合体,本节我们就学习柱、锥、台、球这些简单几何体的结构特征和由这些简单几何体组合而成的简单组合体的结构特征.

高手支招① 细品教材

一、空间几何体

对于空间中的物体,如果我们只考虑其形状和大小,而不考虑其他因素,那么由这些物体抽象出来的空间图形,就叫做空间几何体.

二、多面体与旋转体

1. 多面体:一般地,我们把由若干个平面多边形所围成的几何体叫做多面体.围成多面体的各个多边形叫做多面体的面.相邻两个面的公共边叫做多面体的棱,棱与棱的公共点叫做顶点.棱柱、棱锥、棱台都是多面体.

2. 旋转体:我们把由一个平面图形绕它所在平面内的一条定直线旋转所形成的封闭几何体叫做旋转体.这条定直线叫做旋转体的轴.圆柱、圆锥、圆台和球都是旋转体.

几何体是一种空间形式,它所占空间的大小用体积度量.多面体与旋转体是立体几何中的重要载体.在学习时,要把握它们的定义和特征,要熟练掌握并会灵活运用棱柱、棱锥、棱台、圆柱、圆锥、圆台和球的定义与性质.

三、柱、锥、台、球的结构特征

1. 棱柱的结构特征

(1)定义:一般地,有两个面互相平行,其余各面都是四边形,并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行,由这些面所围成的多面体叫做棱柱.棱柱中,两个互相平行的面叫做棱柱的底面,简称底;其余各面叫做棱柱的侧面;相邻侧面的公共边叫做棱柱的侧棱;侧面与底面的公共顶点叫做棱柱的顶点.(如图 1.1.1－1 所示)

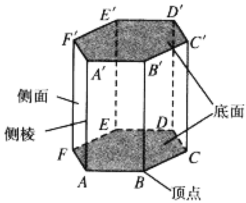


图 1.1.1－1

长方体是特殊的棱柱，它的六个面中每对相对面都是全等的矩形.

正方体是特殊的长方体，它的六个面都是全等的正方形，正方体也叫立方体.

(2)分类：通常按底面边数对棱柱分类，即底面是三角形、四边形、五边形……的棱柱分别叫做三棱柱、四棱柱、五棱柱…….

(3)表示：一般用棱柱的顶点的字母表示棱柱，如：六棱柱 $ABCDEF-A'B'C'D'E'F'$，有时用对角线端点字母表示，如：长方体 AC'.

(4)特征：①底面互相平行；②侧棱互相平行且相等；③侧面是平行四边形；④与底面平行的截面是与底面全等的多边形；⑤与侧棱平行的截面是平行四边形.

技术提示 棱柱的结构特征有两个方面，一是面，二是棱，棱柱的面共有两种，一种是底面，上、下共两个底面而且是平行的，二是侧面，几棱柱就有几个侧面，相邻侧面的公共边即侧棱都是平行的.它的棱也有两种，除了侧棱再一种就是底面上的边.注意如图 1.1.1－2所示的几何体不是棱柱.

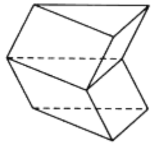


图 1.1.1－2

2. 棱锥的结构特征

(1)定义：一般地，有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形.由这些面所围成的多面体叫做棱锥.这个多边形面叫做棱锥的底面或底；有公共顶点的各个三角形面叫做棱锥的侧面；各侧面的公共顶点叫做棱锥的顶点；相邻侧面的公共边叫做棱锥的侧棱.(如图 1.1.1－3 所示)

有两种特殊的棱锥：

①正棱锥：底面是正多边形，并且侧棱都相等的棱锥.

②正四面体：所有棱长都相等的三棱锥.

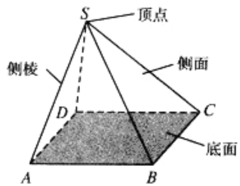


图 1.1.1－3

(2)分类：底面是三角形、四边形、五边形……的棱锥分别叫做三棱锥、四棱锥、五棱锥…….

(3)表示：棱锥用表示顶点和底面的字母表示，如图 1.1.1－3 中的四棱锥表示为棱锥 $S-ABCD$.

(4)特征：①底面是多边形；②侧面是有一个公共顶点的三角形；③侧棱相交于顶点.

技术提示 棱锥只有一个底面，其余的面全是侧面，这些侧面有一个公共顶点就是棱锥的顶点，棱锥的侧面都是三角形，相邻侧面的公共边就是侧棱，所有侧棱都相交于顶点.

【示例】如图 1.1.1－4 所示的多面体 $ABCDE$ 是否为棱锥？

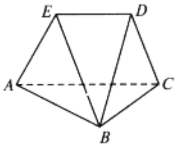


图 1.1.1－4

思路分析：把面 ABC 作底面不是三棱锥，可变换底面考虑.

解：把 B 看作顶点，则多面体 $B-ACDE$ 是四棱锥.

3. 圆柱的结构特征

(1)定义：以矩形一边所在直线为旋转轴，其余三边旋转形成的面所围成的旋转体叫做圆柱. 旋转轴叫做圆柱的轴；垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做圆柱的底面；平行于轴的边旋转而成的曲面叫做圆柱的侧面；无论旋转到什么位置，不垂直于轴的边都叫做圆柱侧面的母线. 如图 1.1.1－5，O_1O_2 所在直线为旋转轴，也是圆柱的轴.

棱柱和圆柱统称为柱体. 沿着圆柱的任意一条母线将圆柱剪开，可将其展到一个平面上.

(2)表示：圆柱用表示它的轴的字母表示，如圆柱 O_1O_2.

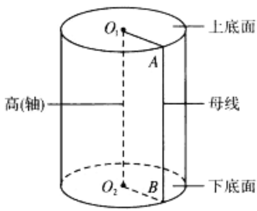


图 1.1.1－5

(3)特征：①与圆柱的底面平行的截面是圆；②与轴平行的截面是矩形.

技术提示　自己动手卷一个纸筒作圆柱的模型研究其结构特征，你会发现圆柱的两底面是相同的圆面，侧面是曲面，展开为矩形.

4. 圆锥的结构特征

(1)定义：以直角三角形的一条直角边所在直线为旋转轴，其余两边旋转形成的面所围成的旋转体叫做圆锥. 如图 1.1.1－6，SO 所在直线是旋转轴，SA 旋转形成的曲面是棱锥的侧面，SA 经过的每一个位置都是母线，SO 是高，OA 旋转而成的圆面叫做圆锥的底面.

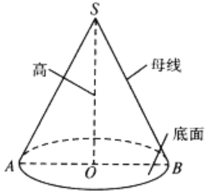


图 1.1.1－6

(2)表示：圆锥用表示它的轴的字母表示，如图 1.1.1－6 中的圆锥表示为圆锥 SO.

(3)特征：与圆锥底面平行的截面是圆，过圆锥顶点的截面是等腰三角形，两个腰都是母线. 如果截面经过圆锥的轴，则称该截面为轴截面，在轴截面中，一般用 r 表示圆锥的底面半径，用 l 表示母线长，用 h 表示圆锥的高，则有 $l^2=h^2+r^2$ 的重要结论.

技术提示　圆锥和棱锥都是锥体，它们体现在一个锥上，其不同点是体现在"棱"和"圆"的差别. 圆锥的底面是圆面，侧面是曲面，展开后是一个扇形.

【示例】一个圆锥的母线长为 20 cm，母线与轴的夹角为 30°，求圆锥的高.

思路分析：画出圆锥的轴截面，在此等腰三角形中构造直角三角形，运用勾股定理计算.

解：图 1.1.1－7 为圆锥的轴截面，其中 $PA=20$ cm，$\angle APO=30°$，OP 为高，在 Rt$\triangle OAP$ 中，

$$OP=AP\cdot\cos30°=20\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}(\text{cm}).$$

所以圆锥的高为 $10\sqrt{3}$ cm.

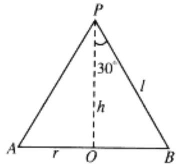


图 1.1.1－7

5. 棱台与圆台的结构特征

(1)定义：用一个平行于底面的平面去截棱锥(圆锥)，截面与底面之间的部分，叫做棱台(圆台). 原棱锥(圆锥)底面叫下底面，截面叫上底面. 如图 1.1.1－8 中，四边形 $ABCD$ 是下底面，四边形 $A'B'C'D'$ 是上底面，如图 1.1.1－9 中，OA 所在的圆面为下底面，BH 所在的圆面为上底面.

圆台还可以看作由一个直角梯形绕与底边垂直的腰旋转形成的. 圆台与棱台统称为台体，它们有一些类似的特征，例如它们都有两个平行的底面.

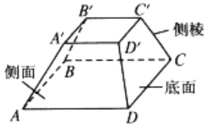


图 1.1.1－8

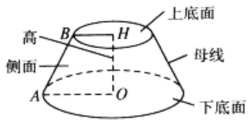


图 1.1.1－9

(2)棱台的分类：由三棱锥、四棱锥、五棱锥……截得的棱台分别叫三棱台、四棱台、五棱台…….

(3)表示：棱台用表示下上底面的字母表示，如图 1.1.1－8 所示的棱台可表示为棱台$ABCD\text{-}A'B'C'D'$，也可表示为棱台 AC'. 圆台用下上底面的圆心表示，如图 1.1.1－9中的圆台可用 OH 表示.

(4)棱台的特征：①棱台的侧棱延长后相交于一点；②棱台上下底面是相似多边形，且相互平行；③棱台的侧面是梯形；④过棱台的侧棱的截面是梯形.

【示例】如图 1.1.1－10 所示的几何体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 表示建筑工人堆成的沙堆，它是不是棱台？请说明理由.

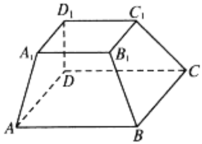


图 1.1.1－10

思路分析：判断几何体是不是棱台，就是看它是否符合棱台的定义，其中关键的一点就是各条侧棱延长后必须交于一点. 所以把一个棱台的各条侧棱延长后就能还原为原来的棱锥. 同时，必须注意的是棱台的上下底面平行，否则，虽然各侧棱延长交于一点，但也不是棱台.

解：不一定是棱台. 因为虽然有面 $ABCD$ 与面 $A_1B_1C_1D_1$ 平行，但各棱延长后一般不能相交于同一点，所以不一定是棱台.

(5)圆台的特征：①圆台的母线共点，任意两条母线确定的截面为等腰梯形；②如果截面经过圆台的轴，则称该截面为轴截面，在轴截面中，圆台的母线 l、高 h 和上下底面圆的半径 r、R 组成一个直角梯形，并且有$l^2=h^2+(R-r)^2$.

【示例】圆台的上、下底半径分别是 1、3，母线长为$\sqrt{5}$，那么圆台的高为________.

思路分析：画出轴截面，如图 1.1.1－11，研究轴截面这个等腰梯形，作出有关的直角三角形，用勾股定理求解.

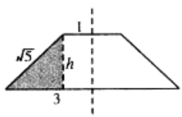


图 1.1.1－11

答案：1

技术提示　棱台与圆台都有两个平行的底面，它们的不同体现在一个是由棱锥得来，一个是由圆锥得来. 由于圆锥的侧面是扇形，那么圆台的侧面就是一个大扇形剪去一个小扇形而得的扇环，如图 1.1.1－12 所示. 由于棱锥的侧面都是三角形，那么棱台的侧面就是由几个梯形拼成的，如图 1.1.1－13 所示.

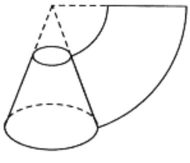


图 1.1.1－12

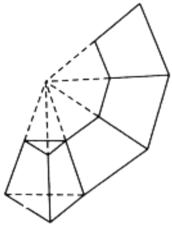


图 1.1.1－13

6. 球的结构特征

(1)定义：以半圆的直径所在直线为旋转轴，半圆面旋转一周形成的旋转体叫做球体，简称球. 半圆的圆心叫球心，半圆的半径叫球的半径，半圆的直径叫球的直径. 如图 1.1.1－14，O 为球心，AB 为直径.

球面也可以看作空间中到一定点距离相等的点的集合. 注意球面与球是不同的两个概念. 球上的任意一点到球心的距离小于等于半径. 把半径为 R 的球 O 用点集可表示为$\{M||OM|\leqslant R\}$.

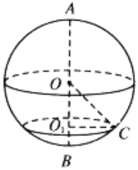


图 1.1.1－14

(2)表示：球常用表示球心的字母表示，如图 1.1.1－14 中的球可表示为球 O.

(3)特征：用一个平面截球会得到一个圆面，球心和截面圆心的连线垂直于截面，并且圆心到截面的距离 d、球半径 R、截面圆半径 r 满足 $R^2=r^2+d^2$. 这三个量已知两个可求第三个.

技术提示　球的截面问题与平面几何中圆的垂径问题类似，它们都能通过一个直角三角形体现各个量之间的关系，请比较图 1.1.1－15(1)(2)记忆它们的相同与不同.

把平面几何问题与立体几何问题作比较，找出它们的相同与不同，是学好立体几何的重要方法.

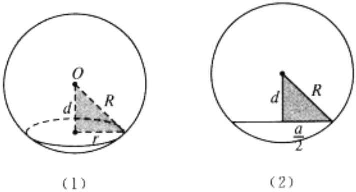


图 1.1.1－15

四、简单组合体的结构特征

1. 定义：现实生活中，除了柱体、锥体、台体、球体等简单几何体外，还有许多几何体是由简单几何体组合而成的，这些几何体叫做简单组合体.

2. 简单组合体的构成有两种基本形式：一种是由简单几何体拼接而成；一种是由简单几何体截去或挖去一部分而成.

简单组合体可以是两个或两个以上的多面体与多面体、多面体与旋转体、旋转体与旋转体组合而成的.要善于将它们分解成简单几何体，才能将复杂问题简单化.

【示例】试说明图 1.1.1－16 所示的几个组合体是由什么几何体构成的.

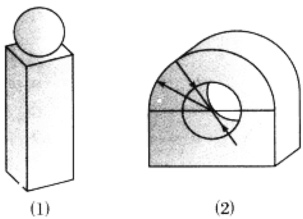


图 1.1.1－16

思路分析：我们所学过的简单几何体只有柱、锥、台、球，前三种又有多面体与旋转体的差别，分别为棱柱、棱锥、棱台和圆柱、圆锥、圆台，研究组合体的构成就是把组合体分解成简单几何体.

解：图(1)是由一个球与一个四棱柱拼接而成的，图(2)是把一个长方体拼接上半个圆柱，然后再从里边挖去一个小圆柱而成.

高手支招② 归纳整理

本节的主要内容是简单几何体及简单组合体的定义和结构特征.通过本节的学习，了解认识几何体结构特征的一般方法，能概括出柱体、锥体、台体和球体的结构特征，会判断一个简单几何体属于哪一类，如果是一个组合体，能分辨出其组成元素.

为区别和理解本节几种简单几何体的结构特征，首先要在脑海中固定一个特殊几何体的模型，通过模型来想象其结构特征.

- 空间几何体
  - 多面体
    - 棱柱：有两个面互相平行，其余的面都是平行四边形，且公共边都__①__的多面体
    - 棱锥：有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的__②__的多面体
    - 棱台：把一个棱锥用一个__③__的平面截去一个小棱锥，剩余的部分
  - 旋转体
    - 圆柱：以一个矩形的一边为轴，其余三边旋转形成的__④__几何体
    - 圆锥：以__⑤__为轴，其余两边旋转形成的面所围成的几何体
    - 圆台：用__⑥__截圆锥，在截面与底面之间的部分
    - 球：以__⑦__为轴，半圆面旋转一周所形成的几何体
  - 简单组合体：把两个或两个以上的__⑧__拼接而成，或把一个或几个__⑨__拼接成的几何体挖去一部分而成的几何体

答案

①互相平行　②三角形　③平行于底面的　④曲面所围成的　⑤直角三角形的一条直角边　⑥平行于底面的平面　⑦半圆的直径所在的直线　⑧简单几何体　⑨简单几何体

高手支招③ 综合探究

1. 正方体的截面

借助于实物或想象，正方体的截面可以有如下几种情况：

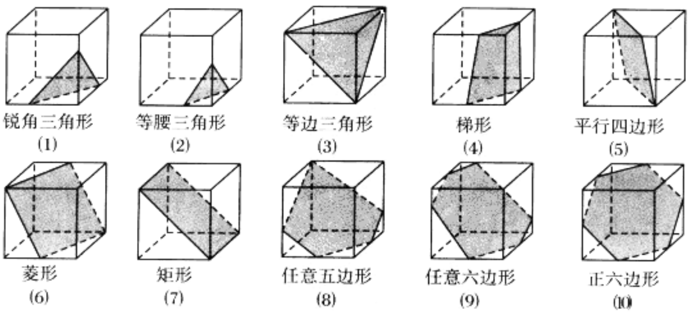
(1)截面可以是三角形，如图 1.1.1-17(1)(2)(3)所示；

(2)截面可以是四边形，如图 1.1.1-17(4)(5)(6)(7)所示；

(3)截面可以是五边形，如图 1.1.1-17(8)所示；

(4)截面可以是六边形，如图 1.1.1-17(9)(10)所示.

图形如下.



锐角三角形 (1)　等腰三角形 (2)　等边三角形 (3)　梯形 (4)　平行四边形 (5)

菱形 (6)　矩形 (7)　任意五边形 (8)　任意六边形 (9)　正六边形 (10)

图 1.1.1-17

2. 各种特殊的四棱柱

底面是平行四边形的棱柱，叫平行六面体，侧棱垂直于底面的平行六面体叫直平行六面体，底面是矩形的直平行六面体叫长方体，底面是正方形的直平行六面体叫正四棱柱，侧面是正方形的正四棱柱，是正方体.

其关系是：四棱柱 → 平行六面体 → 直平行六面体 → 长方体 → 正四棱柱 → 正方体

高手支招④ 典例精析

题型分类详解

题型一　有关棱台的定义

【例 1】下列四个命题：①棱台的侧棱延长后必交于一点；②棱台的上下底面多边形是相似的；③用一个平面去截棱锥，夹在底面和截面间的几何体是棱台；④棱台的上、下底面边长之比等于棱台的高与截得此棱台的棱锥的高的比. 其中正确的命题有________.（填写所有正确命题的序号）

高手点睛 根据棱台的定义及结构特征，可知①正确；②正确；③中截面不一定平行于底面，故错误；④上、下底面边长的比等于小、大棱锥的高之比，如图 1.1.1－18，$\triangle SA_1O_1 \backsim \triangle SAO$，故④错误.

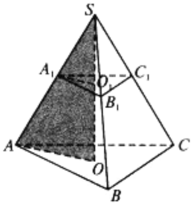


图 1.1.1－18

思维流程 棱台的定义 → 上、下底面平行 → 侧棱交于一点 → 上、下底面相似

答案：①②

技术螺钿 概念题要从概念入手考虑，有关计算要结合图形观察、分析、论证，不能凭空想象.

题型二　关于空间几何体的计算

【例 2】圆台侧面的母线长为 $2a$，母线与轴的夹角为 30°，一个底面的半径是另一个底面半径的 2 倍. 求两底面的半径与两底面面积之和.

高手点睛　将圆台还原为圆锥，研究圆锥的轴截面，结合题中所给条件可求得下底面圆的半径及面积，则上底面圆的半径及面积同理可求.

思维流程　如图 1.1.1-19，解 Rt$\triangle SAO$ → 求出 AO → 得出下底面圆面积 → 解 Rt$\triangle SA'O'$，同理可求出上底面圆的半径 $A'O'$ 及面积

解：设圆台上底面半径为 r，则下底面半径为 $2r$，

如图 1.1.1-19，$\angle ASO=30°$，

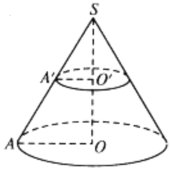


图 1.1.1-19

在 Rt$\triangle SO'A'$ 中，$\dfrac{r}{SA'}=\sin 30°$，

$\therefore SA'=2r$.

在 Rt$\triangle SOA$ 中，$\dfrac{2r}{SA}=\sin 30°$，

$\therefore SA=4r$.

又 $SA-SA'=AA'$，即 $4r-2r=2a$，$\therefore r=a$.

$\therefore S=S_1+S_2=\pi r^2+\pi(2r)^2=5\pi r^2=5\pi a^2$.

$\therefore$ 圆台上底面半径为 a，下底面半径为 $2a$，两底面面积之和为 $5\pi a^2$.

技术点拨　**解有关圆台的基本元素问题，一般要画出圆台的轴截面或将圆台还原为圆锥，有关元素之间的关系就体现出来了. 解空间几何体问题，要转化到平面上去，研究一个截面或截面上的一个三角形然后计算.**

【例 3】已知正三棱台上、下底面边长和侧棱的长分别为 a、b、c，求这个棱台的高和斜高.

高手点睛　画出图形解有关的直角梯形.

思维流程　如图 1.1.1-20，由两底面边长可求$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$的边心距 OE 和 $O'E'$ → 解直角梯形 $E'EBB'$ 和直角梯形 $O'E'EO$

解：如图 1.1.1-20，设正三棱台的两底面中心分别为 O' 和 O，$A'B'$ 和 AB 的中点分别为 E' 和 E，

连接 $O'O$，$E'E$，$O'B'$，OB，$O'E'$，OE，$O'A'$，OA，

则四边形 $E'EBB'$，$O'E'EO$ 都是直角梯形，

在正三角形 ABC 中，$AB=b$，则 $OE=\dfrac{\sqrt{3}}{6}b$，

在正三角形 $A'B'C'$ 中，$A'B'=a$，则 $O'E'=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$.

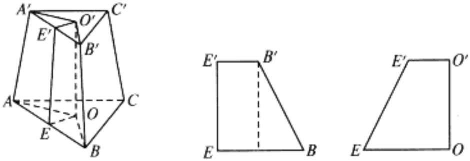


图 1.1.1－20

在直角梯形 $E'EBB'$ 中，

$E'E=\sqrt{B'B^2-(EB-E'B')^2}$

$=\sqrt{c^2-(\frac{b}{2}-\frac{a}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4c^2-(b-a)^2}$.

在直角梯形 $O'E'EO$ 中，

$O'O=\sqrt{E'E^2-(EO-E'O')^2}=\sqrt{c^2-\frac{(b-a)^2}{4}-(\frac{\sqrt{3}}{6}b-\frac{\sqrt{3}}{6}a)^2}$

$=\sqrt{c^2-\frac{(b-a)^2}{3}}$.

技术感悟 在求有关正棱台的问题时，正棱台两底面中心连线，相应边心距和斜高组成一个直角梯形；两底面中心连线，侧棱和两底面相应的外接圆半径组成一个直角梯形.

题型三　多面体的截面问题

【例 4】甲、乙两足球队决赛互罚点球时，罚球点离球门约 10 米，乙队守门员违例向前冲出了 3 米，扑住了球，结果被判犯规，扑球无效. 事实上乙队守门员违例向前冲出了 3 米时，其要封堵的区域面积变小了. 问此时乙队守门员需封堵区域面积是原来球门面积的 …………………………………………………………………… (　　)

A. $\frac{3}{10}$　　　　B. $\frac{7}{10}$

C. $\frac{9}{100}$　　　　D. $\frac{49}{100}$

高手点睛 如图 1.1.1－21，从罚球点 S 向球门 $ABCD$ 四角引线，构成四棱锥 $S-ABCD$，守门员从平面 $ABCD$ 向前移动 3 米至平面 $A'B'C'D'$，只需封堵 $A'B'C'D'$ 即可.

故 $\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}}=(\frac{7}{10})^2=\frac{49}{100}$.

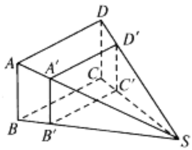


图 1.1.1－21

思维流程 $\boxed{\text{先求相似比}\frac{B'C'}{BC}}\xrightarrow{\text{面积比为相似比的平方}}$