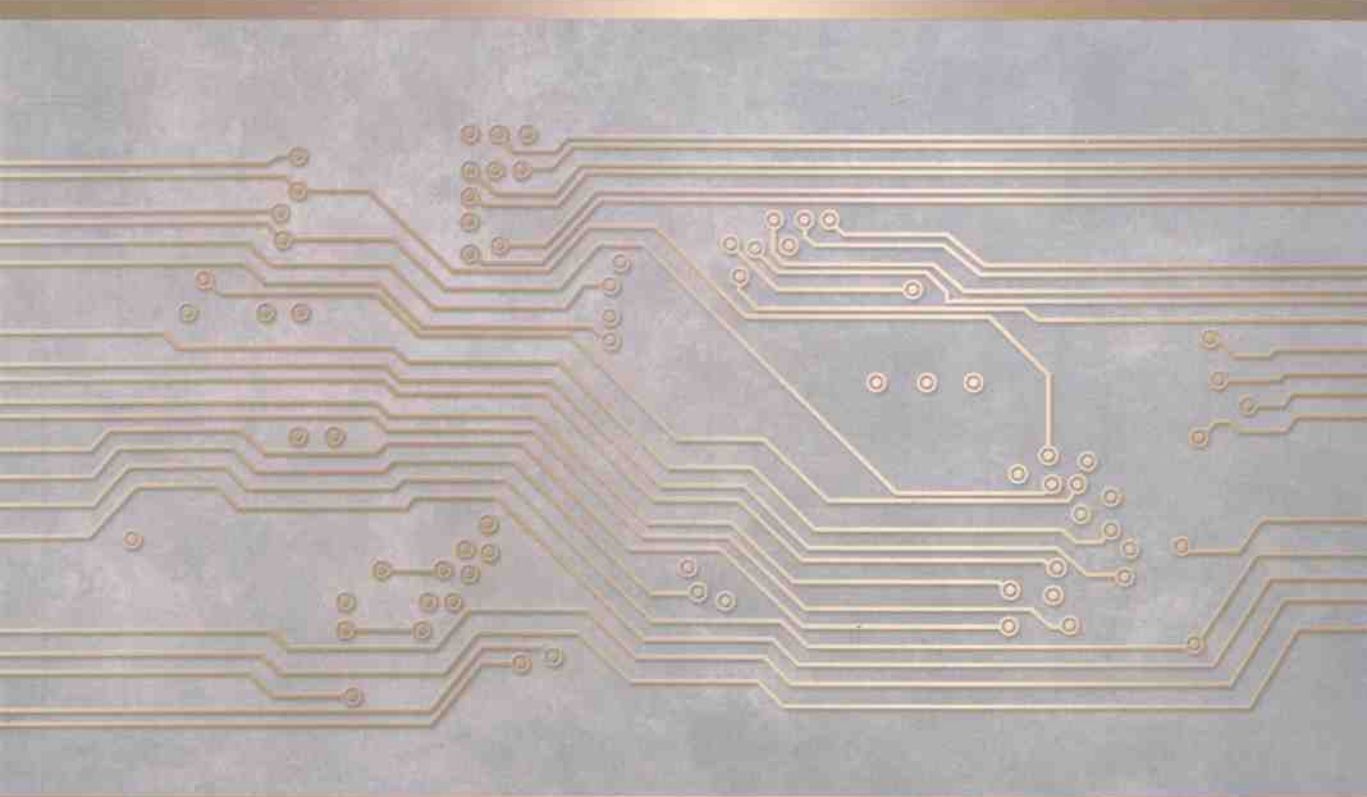


新编电气与电子信息类本科规划教材

信息论与纠错编码

(第2版)

孙丽华 陈荣伶 编著



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

新编电气与电子信息类本科规划教材

信息论与纠错编码

(第2版)

孙丽华 陈荣伶 编著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书重点介绍了信息论与纠错编码的基础内容,全文共分10章。内容包括信息及信息的度量、离散信源及信源熵、离散信道及信道容量、信源编码定理和信道编码定理、平均失真测度和信息率失真函数、率失真编码定理、纠错编码代数基础、线性分组码、循环码和卷积码。

本书文字通顺,深入浅出,概念清晰,对一些较难理解的概念,辅有更多的例题,并配有免费电子课件、习题解答等教辅资料。

本书适合作为高等院校理工类本科电子技术、信息工程、通信工程、雷达、计算机、自动化、仪器仪表等相关专业的教材,也可作为信息科学及系统工程等专业教学人员及科研人员的参考书。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

信息论与纠错编码/孙丽华,陈荣伶编著. —2版. —北京:电子工业出版社,2009.8
新编电气与电子信息类本科规划教材
ISBN 978-7-121-09369-2

I. 信… II. ①孙…②陈… III. ①信息论—高等学校—教材②信源编码—编码理论—高等学校—教材
③信道编码—编码理论—高等学校—教材 IV. TN911.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第133392号

策划编辑:王羽佳

责任编辑:秦淑灵

印 刷: 北京京师印务有限公司
装 订:

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编:100036

开 本:787×1092 1/16 印张:14.5 字数:371千字

印 次:2009年8月第1次印刷

印 数:4000册 定价:25.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

前 言

信息论是应用近代概率统计方法研究信息传输、交换、存储和处理的一门学科,也是源于通信实践发展起来的一门新兴应用科学。当前人类已步入信息社会,随着信息概念的不断深化,信息在科学技术上的重要性也早已超越了狭义的通信工程的范畴,受到越来越多的关注。

在高等院校中,信息工程类专业是最热门的专业之一,信息技术已经改变了很多传统电子类专业的知识结构。在这种形式下,许多高校都在相关专业开设了信息论课程,作为本科生、研究生的必修或选修课程。一方面,这门课是电子类专业的核心课程,很多学校都把它作为必修课或必选课;但另一方面,这门课程涉及多门工程数学理论,例如概率统计论、线性代数、近世代数等,一直有教师难教、学生难学的说法。本书力求在内容筛选及编排上以读者最易接受的方式介绍信息理论的知识。

本书包括“信息论与纠错编码”的基本内容及应用。

第1章为“信息论基础”,介绍了信息论的基本概念,以及本书的研究对象——各种信源和信道。

第2~6章为信息论部分,介绍了信息的度量,内容主要围绕香农三大定理展开,研究在不允许失真的情况下信息传输率的极限值,以及给定信源并且允许一定失真的条件下信息速率的极限值,并研究在误码率小于给定值的条件下如何最有效地利用信道的传输能力。

第7章讲述了纠错编码所必需的数学知识。

第8~10章为纠错编码部分,纠错编码是后人沿着香农指明的可行方向,为寻求有效而可靠的编译码方法而发展起来的一门学科,主要研究在有噪信道条件下各种可行的编码方案及实施技术。

与现有的各种“信息论与编码”教材相比,本教材特色如下。

(1) 本书力图在编排上由浅入深,循序渐进,希望读者以易于掌握的方式接受信息论与纠错编码方面的基本理论知识;

(2) 对于部分具有结论性、指导性的定理,教材省去了冗长烦琐的定理证明,注重物理概念的阐述以及对后人工作的指导意义;

(3) 增加了纠错编码部分的内容。教材第8、9章和第10章分别论述纠错码中最基本的线性分组码、循环码和卷积码的编译码理论,并列举了几种常用的码,如汉明码、BCH码和卷积码,介绍了它们主要的编译码方法。

(4) 对一些难以理解的概念,本书配有较多的例题,以帮助学生理解抽象定理。各章后面配有较多难易程度不等的思考题和习题,以供选用。

(5) 在第1版的基础上,收集了使用该书师生的反馈意见,对一些较难理解的概念,增加了较多的例题、思考题和习题,并将第1版中第5章和第6章的内容做了一些调整,使之更趋合理。

本书全部内容约需 62 学时，不同专业可根据需要进行调整。

本书配有教学课件和配套辅助文件，需要者可到华信教育资源网 <http://www.hxedu.com.cn> 免费注册下载。

本书第 1, 7, 10 章、附录 1 和附录 2 由陈荣伶编写，第 2~6 章、第 8 章和第 9 章由孙丽华编写，由孙丽华负责全书的策划、修改和统编。

本书在编著过程中参阅了一些国内外相关著作，这些著作已在参考文献中一一列出，在此谨向有关作者表示深深的谢意！

在此也向第 1 版的合作者谢仲华表示深深的谢意！

本书在编写过程中得到电子工业出版社的大力支持，王羽佳和秦淑灵编辑做了大量的工作，使本书得以顺利出版，在此一并表示衷心的感谢！

本书涉及知识领域广泛，知识变化日新月异，由于时间和水平的限制，难免有差错和不足之处，敬请读者指正！

孙丽华

2009 年 6 月

于南昌

目 录

第 1 章 信息论基础	1
1.1 信息的概念	2
1.2 数字通信系统	3
1.3 信源及其数学模型	5
1.3.1 离散无记忆信源	5
1.3.2 离散有记忆信源	6
1.3.3 波形信源	8
1.4 信道及其数学模型	9
1.4.1 离散无记忆信道	9
1.4.2 离散无记忆扩展信道	11
本章小结	12
思考题与习题	12
第 2 章 信息的度量	13
2.1 自信息量和互信息量	14
2.1.1 自信息量和条件自信息量	15
2.1.2 互信息量和条件互信息量	18
2.2 离散集的平均自信息量	22
2.2.1 信息熵	22
2.2.2 熵函数的性质	26
2.3 离散集的平均互信息量	31
2.3.1 平均互信息量	31
2.3.2 平均互信息量的性质	33
2.3.3 有关平均互信息量的两条定理	36
2.4 N 维扩展信源的熵和平均互信息量	40
2.4.1 N 维扩展信源的熵	40
2.4.2 N 维扩展信源的平均互信息量	41
2.4.3 有关 N 维平均互信息量的两条定理	42
本章小结	44
思考题与习题	45
第 3 章 离散信源无失真编码	48
3.1 概述	49
3.1.1 码的分类	50
3.1.2 平均码长的计算	53
3.1.3 信息传输速率	55
3.2 等长码及等长编码定理	56

3.3 变长码及变长编码定理	59
3.3.1 变长码	59
3.3.2 克拉夫特不等式	60
3.3.3 变长编码定理	62
3.4 变长码的编码方法	67
3.4.1 香农编码法	67
3.4.2 费诺编码法	69
3.4.3 霍夫曼编码法	70
本章小结	75
思考题与习题	75
第4章 离散信道的信道容量	80
4.1 信道容量的定义	81
4.2 离散无记忆信道容量的计算	81
4.2.1 达到信道容量的充要条件	82
4.2.2 几类特殊的信道	86
4.3 组合信道的容量	93
4.3.1 独立并行信道	93
4.3.2 和信道	94
4.3.3 串行信道	95
本章小结	97
思考题与习题	98
第5章 有噪信道编码	100
5.1 信道编码的基本概念	101
5.2 译码规则及错误概率	104
5.3 信道编码定理	107
5.4 费诺引理及信道编码逆定理	111
5.4.1 费诺不等式	111
5.4.2 信道编码逆定理	112
本章小结	114
思考题与习题	114
第6章 率失真编码	117
6.1 失真测度与平均失真	118
6.2 信息率失真函数 $R(D)$	121
6.2.1 率失真函数的定义	121
6.2.2 率失真函数的值域、定义域	122
6.2.3 率失真函数的性质	124
6.3 率失真函数的计算	127
6.3.1 两种特殊情况下的求解	127
6.3.2 $R(D)$ 的参数表示法	130
6.4 率失真信源编码定理	135

本章小结	135
思考题与习题	136
第 7 章 纠错编码代数基础	139
7.1 基本概念	140
7.1.1 整数	140
7.1.2 多项式	141
7.1.3 线性空间	142
7.2 群与环	142
7.2.1 群的定义	144
7.2.2 子群	145
7.2.3 环	146
7.3 域	146
7.3.1 域的定义	148
7.3.2 有限域的本原元	149
7.3.3 有限域的结构	153
本章小结	153
思考题与习题	155
第 8 章 线性分组码	156
8.1 纠错码的基本概念	156
8.1.1 信道纠错编码	156
8.1.2 差错类型	157
8.1.3 差错控制系统模型及分类	158
8.1.4 纠错码的分类	159
8.2 线性分组码的编码	159
8.2.1 生成矩阵、校验矩阵	163
8.2.2 系统码	165
8.2.3 对偶码	166
8.2.4 编码的实现	168
8.3 线性码的纠错能力	168
8.3.1 码的距离和重量	169
8.3.2 线性码的纠错、检错能力	172
8.4 标准阵列和译码	172
8.4.1 标准阵列	173
8.4.2 陪集分解	176
8.4.3 译码	177
8.5 汉明码	177
8.5.1 汉明码的构造	179
8.5.2 汉明限与完备码	180
本章小结	180
思考题与习题	180

第 9 章 循环码	183
9.1 循环码的一般概念	184
9.1.1 循环码的定义	184
9.1.2 循环码的多项式描述	184
9.2 循环码的生成多项式和生成矩阵	185
9.2.1 生成多项式	185
9.2.2 生成矩阵	188
9.3 循环码的校验多项式和校验矩阵	189
9.4 循环码的编码	192
9.4.1 利用 $g(x)$ 实现编码	192
9.4.2 利用 $h(x)$ 实现编码	194
9.5 循环码的译码	196
9.5.1 伴随式计算	196
9.5.2 循环码的纠错译码	198
9.5.3 Meggit 译码器	200
9.6 一些重要的循环码	202
9.6.1 循环 Hamming 码	202
9.6.2 BCH 码	203
本章小结	206
思考题与习题	206
第 10 章 卷积码	208
10.1 卷积码基本概念	209
10.2 卷积码的数学描述	210
10.2.1 卷积码的矩阵描述	210
10.2.2 卷积码的多项式描述	212
10.3 卷积码的图形表示方法	214
10.3.1 状态图	214
10.3.2 树图	214
10.3.3 网格图	216
10.4 Viterbi 译码	216
10.4.1 Viterbi 译码步骤	217
10.4.2 Viterbi 译码	217
本章小结	218
思考题与习题	219
附录 A $GF(2^m)$ 中元素的最小多项式和本原多项式 ($1 < m \leq 8$)	220
附录 B 熵函数计算用简明对数表	221
参考文献	222

第1章

信息论基础

内容提要

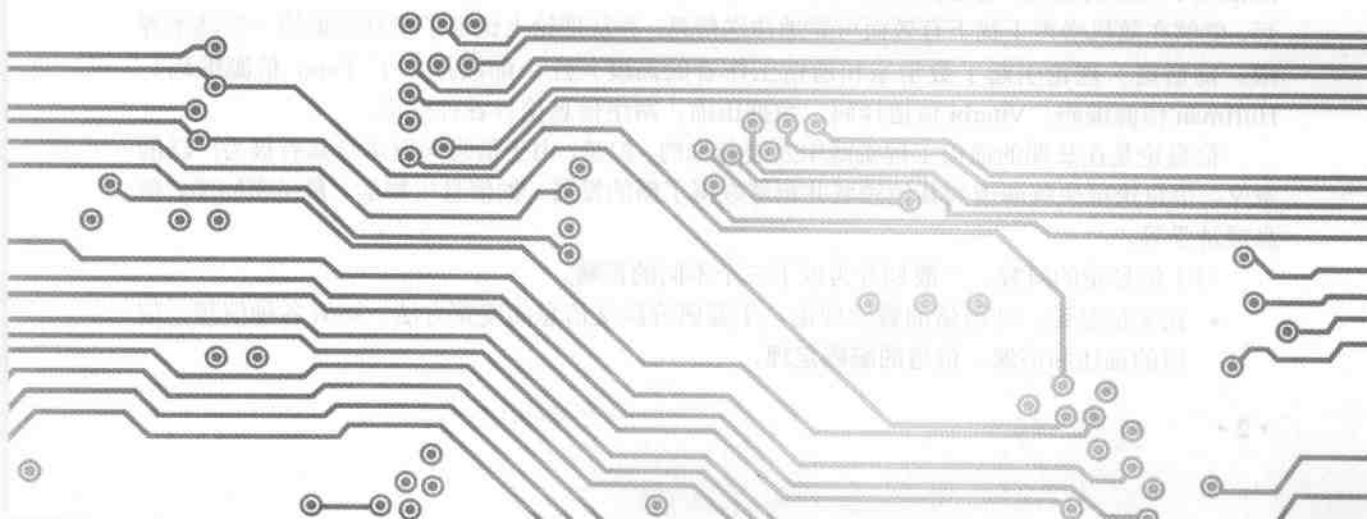
信息论是人们在长期的通信实践中发展起来的一门新兴应用科学,它应用近代概率统计方法来研究信息的传输、交换、存储和处理。自 Claude E.Shannon 发表《通信的数学理论》开始,随着信息概念的不断深化,信息理论在科学技术上的应用早已超越了狭义的通信工程范畴,受到越来越多的关注。本章首先引出信息、消息的概念,讨论信息论的研究范畴;然后简述数字通信系统的结构和特点,讨论离散信源、波形信源和离散信道的数学模型和特点;最后介绍几种常见的离散无记忆信源和离散无记忆信道。

知识要点

信息的定义、信息论的研究范畴、数字通信系统的组成、离散信源和离散信道的数学模型。

教学建议

本章是信息论的基本概念,后续信息的度量、信源编码及信道编码都是围绕本章的概念而展开的,建议学时数为3学时。



1.1 信息的概念

人们认为,物质、能量和信息是构成客观世界的三大要素。信息是物质和能量在空间和时间上分布的不均匀程度,或者说信息是关于事物运动的状态和规律。物质、能量和信息三者相辅相成,缺一不可。没有物质和能量就不存在事物的运动,也就没有运动状态和规律,当然也就没有信息;反过来,事物在运动,这种运动的状态和规律就成为信息。

因此可以说,没有了信息也就没有了一切!

那么,到底什么是信息呢?

信息有以下三种不同层次的定义。

- 语法信息:它是事物运动状态和规律的本身。它只研究事物运动可能出现的各种状态以及这些状态之间的关系,不涉及状态的含义和效用。
- 语义信息:它是事物运动状态和规律的具体含义。它研究各种状态和实体间的关系,即研究信息的具体含义。
- 语用信息:它是事物运动状态和规律及其含义对观察者的效用。它研究事物运动状态和规律与使用者的关系,即研究信息的使用价值。

语法信息是最抽象最基本的层次,通信工程中的信息传递问题正是基于语法信息。

我们知道,通信系统中形式上传输的是消息,消息与信息有何区别呢?

信息是一个抽象的概念,而消息是具体的,如一场足球赛事的状况,我们可以分别通过电视、广播和报纸来了解,这其中就涉及图像、语言、文字等不同形式的消息。可以说,消息是能被人们的感觉器官感知的客观物质和主观思维的运动状态(或存在状态)。在通信之前,收信者无法判断发信者将发送何种状态的消息。通过消息的传递,收信者知道了消息的具体内容,我们说收信者获得了信息。由此看来,通信系统中形式上传输的是消息,实质上传输的是信息。换句话说,消息中包含信息,消息是信息的载体,信息是消息中包含的有意义的内容。不同形式的消息可以包含相同的信息,如语言和文字发送同一天的天气预报,信息内容是相同的。

信息论是源于通信实践发展的一门新兴学科,从通信的角度讲,信息论是应用近代概率统计方法研究信息的基本性质及度量方法,研究信息的获取、传输、存储和处理的一般规律的科学。自1948年美国科学家香农(Claude E.Shannon)在Bell系统技术杂志上发表重要著作《通信的数学理论》开始,信息论就开启了迅猛发展的篇章。香农信息理论以概率论为工具,定量地描述了信息的含义,通过信源编码定理和信道编码定理指出,在通信系统中采用适当的编码后,能够在随机噪声干扰下有效而可靠地传送信息,并从理论上论证了信息传输的一些基本界限。随后这一理论引起了数学家和通信工作者的高度关注,陆续推出了Fano信源编码、Huffman信源编码、Viterbi信道译码、数据压缩、网络信息论等各种理论。

信息论是在长期的通信工程实践中发展起来的,但是,由于信息问题本身具有极为广泛的意义,信息论很快就渗透到其他领域并相继取得了新的发展,如信息生物学、量子密码学、信息经济学等。

对于信息论的研究,一般划分为以下三个不同的范畴。

- 狭义信息论:即通信的数学理论,主要研究狭义信息的度量方法,研究各种信源、信道的描述和信源、信道的编码定理。

- 实用信息论：研究信息传输和处理问题，也就是狭义信息论方法在调制解调、信息处理、检测与估计以及保密理论等领域的应用。
- 广义信息论：包括信息论在自然和社会中的新应用，如模式识别、机器翻译、自学习自组织系统、心理学、生物学、经济学、社会学等一切与信息问题有关的领域。

在信息时代，人们对于信息的理解远远超出了狭义信息论的讨论范围，要求进一步认识和发展信息概念和信息理论。信息科学的很多问题还在探索之中，本书只限于讨论在通信学科中已建立了完整理论并取得重大技术成就的狭义信息论。

1.2 数字通信系统

通信的基本问题是在彼时彼地精确地或近似地再现此时此地发出的消息。

消息分为两类：离散消息和连续消息。离散消息也称为数字消息，消息状态数是可数的或离散型的，如符号、文字等。连续消息又称为模拟消息，消息状态是连续变化的，如语音、图像等。通信中消息被转换成电信号，按信号特征的不同，通信系统分为数字通信系统和模拟通信系统。相比模拟通信系统，数字通信系统更能适应对通信技术的高要求，它具有以下优点：

- ① 抗干扰能力强，中继时可再生，可消除噪声积累；
- ② 差错可控制，可改善通信质量；
- ③ 便于加密和使用 DSP 技术处理；
- ④ 可综合传递各种消息，传送模拟消息时，只要在发送端增加模数转换器，在接收端增加数模转换器即可。

数字通信系统的主要性能指标如下。

(1) 有效性

一般用码元传输速率或信息传输速率来衡量通信的有效性。码元传输速率是每秒钟传送的码元个数，单位为波特。信息传输速率是每秒钟传送的信息量，单位为比特/秒。在二元通信系统中，这两种速率在数值上是相等的。

(2) 可靠性

用误码率或误信率表示。误码率是指错误接收码元在传送总码元数中所占的比例。误信率也称误比特率，指信息量被传错的概率。误码率和误比特率越低，可靠性越强。

各种数字通信系统，如电报、电视、遥控和雷达系统，虽然形式和用途各不相同，但从信息传输的角度来看，它们在本质上有许多共同之处。对有收、发两端的单向传输系统，一般可概括为图 1-1 所示的统计模型。

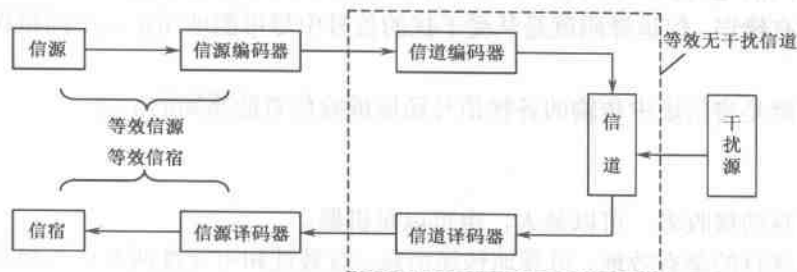


图 1-1 数字通信系统模型

这个模型包括以下五部分。

1. 信源

信源是产生消息的源。消息可以有多种形式，如语言、文字、图像等。消息可以是离散的，也可以是连续的。消息中包含着信息，或者说消息是信息的载体，通信的结果是为了获得信息。信源输出的消息是随机的，在没有收到这些消息之前，收信者所获得的信息的多少是不确定的。在信息论中用随机变量或随机过程来描述消息。

2. 编码器

编码器是将消息变换成适合于信道传送的信号的设备。编码器分为两种：信源编码器和信道编码器。

信源编码器对信源输出的消息进行适当的变换和处理，来提高信息传输的效率。信源编码常采取消除冗余或根据需要的质量标准去掉一些次要信息等措施。例如，在发中文电报时，需将每个汉字编码为 5 位等重码，为提高传输效率，可在不改变语意的情况下将词语或句子压缩。比如，“奥林匹克运动会”可压缩为“奥运会”，这样，原意不变，而冗余度大大减少。再如，电视信号只含 4% 的有效信息，采用无失真压缩编码可达 30 倍的压缩率，而多媒体会议采用有损压缩则可压缩上百倍。

经过信源编码的码字序列均被认为是重要信息，如果在传输中受到干扰发生错误或误差超过给定标准，则不满足接收者的质量要求。信道编码是为了抵抗信道的干扰，提高通信的可靠性而对信源编码器的输出进行的变换和处理。为了提高可靠性，可以扩展带宽，降低传输速率，等等，而最常用、最有效的措施是采用差错控制编码，增加冗余码元来自动纠错或检错重发。如奇偶检验码，通过增加一位奇/偶检验位可检验出奇数位错，该奇/偶检验位与信息的内容无关，是个冗余码元。

3. 信道

信道是信息传输和存储的媒介，如光纤、电缆、无线电波、磁盘、书籍等。信道上不可避免地存在各种干扰源，比如来源于无线发射机的无线电干扰、电气设备的工业干扰，以及宇宙射线的天电干扰及电子器件的内部干扰等。为了分析方便，我们将系统其他部分产生的各种干扰都等效地折合成信道干扰。信道的输出是信道输入信号和干扰的组合，由于干扰往往具有随机性，所以信道的特性也用一随机过程来描述。

4. 译码器

译码是编码的逆变换，分为信道译码和信源译码。由于信道干扰的影响，信道输出的信息序列中可能已有错误，信道译码就是从受干扰的信号中尽可能地纠正其中的错误，再现信源编码器的输出。

信源译码就是将信道中传输的各种信号还原成收信者能感知的消息。

5. 信宿

信宿是消息的接收者。可以是人，也可以是机器。

通信的最终目的是有效地、可靠地传递消息。有效性和可靠性两者往往相互矛盾，要提高有效性，就要减少信源的冗余度，缩短每个数据码元所占的时间，这样势必使波形变窄，能量

信源每次输出的符号消息 $x_i \in \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, 即 x_i 的取值必定是 k 个符号 $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ 中的某一个。

【例 1.1】二进制对称信源只能输出符号 0 或 1, 输出 0 的概率为 p , 输出 1 的概率为 $1-p$, 其概率空间可描述为

$$\begin{bmatrix} X \\ q(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

【例 1.2】随机掷一个无偏骰子, 可能出现的点数与其概率分布为

$$\begin{bmatrix} X \\ q(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

2. 离散无记忆扩展信源

在实际情况下, 信源输出的消息往往不是单个符号, 而是由许多不同时刻发出的符号所组成的符号序列。设序列由 N 个符号组成, 若这 N 个符号取自同一符号集 $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, 并且先后发出的符号彼此间统计独立, 则我们将这样的信源称为离散无记忆的 N 维扩展信源, 其数学模型为 N 维概率空间, 即

$$\begin{bmatrix} X \\ q(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{k^N} \\ q(x_1) & q(x_2) & \dots & q(x_{k^N}) \end{bmatrix}$$

式中, x 为各种长为 N 的符号序列, $x = x_1 x_2 \dots x_N$, $x_i \in \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $1 \leq i \leq N$, 序列集 $X = \{a_1 a_1 \dots a_1, a_1 a_1 \dots a_2, \dots, a_k a_k \dots a_k\}$, 共有 k^N 种序列, $x \in X$ 。由于序列中前后符号无关, 故序列的概率 $q(x) = q(x_1 x_2 \dots x_N) = \prod_{i=1}^N q(x_i)$, 说明符号序列的概率是序列中各个符号概率的乘积, 满足 $0 \leq q(x_i) \leq 1$, $1 \leq i \leq k^N$, 且 $\sum_x q(x) = 1$ 。

【例 1.3】将二进制对称信源进行三维扩展, 则信源序列共有 2^3 种: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111。由 $q(0) = p$, $q(1) = 1-p$ 可得序列的概率依次为

$$\begin{aligned} q(000) &= q(0) \cdot q(0) \cdot q(0) = p^3 & q(001) &= q(0) \cdot q(0) \cdot q(1) = p^2(1-p) \\ q(010) &= q(0) \cdot q(1) \cdot q(0) = p^2(1-p) & q(011) &= q(0) \cdot q(1) \cdot q(1) = p(1-p)^2 \\ q(100) &= q(1) \cdot q(0) \cdot q(0) = p^2(1-p) & q(101) &= q(1) \cdot q(0) \cdot q(1) = p(1-p)^2 \\ q(110) &= q(1) \cdot q(1) \cdot q(0) = p(1-p)^2 & q(111) &= q(1) \cdot q(1) \cdot q(1) = (1-p)^3 \end{aligned}$$

将这 8 种序列看成 8 个消息, 得到一个新的信源, 即

$$\begin{bmatrix} X \\ q(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \\ p^3 & p^2(1-p) & p^2(1-p) & p(1-p)^2 & p^2(1-p) & p(1-p)^2 & p(1-p)^2 & (1-p)^3 \end{bmatrix}$$

1.3.2 离散有记忆信源

汉字或英文字母组合成中、英文句子时, 往往要受到语法、习惯用语、修辞等的制约, 因此中、英文句子中前后出现的汉字、字母往往是有依赖性的。如英文字母 T 后面最常出现 H 和 R, 而根本不会出现 Q, F, X。这种依赖性我们称为有记忆。

离散有记忆信源的输出需要用联合概率空间 $\{X, q(X)\}$ 来描述, 信源输出的消息可表示为符号序列 $x = x_1 x_2 \dots x_i \dots$, 其中, x_i 表示在 i 时刻信源所发出的符号, i 的数值越小, 时间上越早。很明显, 有记忆信源在 i 时刻发出的符号与 i 时刻以前信源所发出的符号有关, 即由条

件概率 $p(x_i | \cdots x_{i-2} x_{i-1})$ 确定。

多数有记忆信源的记忆长度是有限的, 即某一时刻信源发出的符号只与前面已发出的若干个符号有关。为了描述这种有限的记忆关系, 常引入“状态”的概念。这样, 信源发出的符号与信源所处状态有关。

下面以马尔可夫信源为例来介绍有记忆信源。

设信源在 r 时刻发出的符号 x_r 与前 m 个符号 $x_{r-m}, x_{r-m+1}, \cdots, x_{r-1}$ 有关 (称为 m 阶), 这 m 个时间上依次相邻的符号组成一个状态 s , 若 $x_i \in \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, 则可能的状态有 k^m 种, 即 $s_1, s_2, \cdots, s_{k^m}$ 。用 e_r 表示 r 时刻符号 x_r 发出前的状态, $e_r = x_{r-m} x_{r-m+1} \cdots x_{r-1} = s_i$, 当符号 x_r 发出后, 状态将发生改变, 记为 $e_{r+1} = x_{r-m+1} x_{r-m+2} \cdots x_r = s_j$, 用 $p(s_j | s_i)$ 表示 s_i 状态到 s_j 状态的转移概率。

当状态转移概率和已知状态下发出符号的概率与时刻无关, 即 $p(e_{r+1} = s_j | e_r = s_i) = p(e_{t+1} = s_j | e_t = s_i) = p(s_j | s_i)$ 和 $p(x_r = a_i | e_r = s_i) = p(x_t = a_i | e_t = s_i) = p(a_i | s_i)$ 时, 称为时齐的。

若信源输出的序列消息与信源的状态满足下列两个条件, 则该信源就称为马尔可夫信源。

(1) 某一时刻信源的输出只与当时的信源状态有关, 而与以前的状态无关。

有
$$p(x_r = a_i | e_r = s_i, e_{r-1} = s_t, e_{r-2} = s_n, \cdots) = p(x_r = a_i | e_r = s_i)$$

满足
$$\sum_{i=1}^k p(x_r = a_i | e_r = s_i) = 1$$

(2) 某一时刻信源所处的状态只由前一时刻的输出符号和前一时刻的状态唯一决定。

$$p(e_{r+1} = s_j | x_r = a_i, e_r = s_i) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

对于时齐马尔可夫信源, 满足

$$\begin{cases} p(s_j) = \sum_i p(s_i) p(s_j | s_i) \geq 0 \\ \sum_j p(s_j) = 1 \end{cases}$$

【例 1.4】某二阶时齐马尔可夫信源, 设信源符号集为 $\{a_1, a_2\}$, 状态集为 $\{s_1 = a_1 a_1, s_2 = a_1 a_2 \text{ 或 } a_2 a_2, s_3 = a_2 a_1\}$, 各状态之间的转移情况如图 1-2 所示, 求各状态的概率分布。

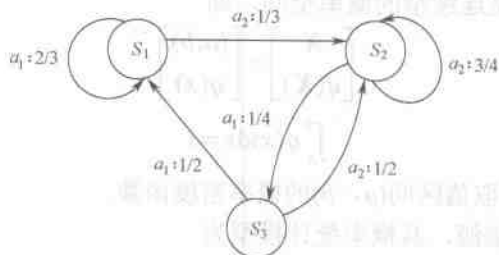


图 1-2 状态转移图

由图 1-2 可知, 已知状态下发出符号的概率分别为

$$p(a_1 | s_1) = \frac{2}{3} \quad p(a_2 | s_1) = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} p(a_1 | s_2) &= \frac{1}{4} & p(a_2 | s_2) &= \frac{3}{4} \\ p(a_1 | s_3) &= \frac{1}{2} & p(a_2 | s_3) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

状态转移概率分别为

$$\begin{aligned} p(s_1 | s_1) &= \frac{2}{3} & p(s_2 | s_1) &= \frac{1}{3} & p(s_3 | s_1) &= 0 \\ p(s_1 | s_2) &= 0 & p(s_2 | s_2) &= \frac{3}{4} & p(s_3 | s_2) &= \frac{1}{4} \\ p(s_1 | s_3) &= \frac{1}{2} & p(s_2 | s_3) &= \frac{1}{2} & p(s_3 | s_3) &= 0 \end{aligned}$$

由于系统是时齐的, 由方程组

$$\begin{cases} p(s_1) = \frac{2}{3}p(s_1) + \frac{1}{2}p(s_3) \\ p(s_2) = \frac{1}{3}p(s_1) + \frac{3}{4}p(s_2) + \frac{1}{2}p(s_3) \\ p(s_3) = \frac{1}{4}p(s_2) \\ p(s_1) + p(s_2) + p(s_3) = 1 \end{cases}$$

可进一步求出各个状态的分布概率, 得 $p(s_1) = \frac{3}{13}$, $p(s_2) = \frac{8}{13}$, $p(s_3) = \frac{2}{13}$ 。

1.3.3 波形信源

波形信源输出的消息在时间和幅度取值上都是连续的, 如语音、图像信号。对于这种信源输出的消息, 可用随机过程来描述。常见的波形信源输出的消息是时间上或频率上有限的随机过程, 根据取样定理, 它可以转换成时间上离散, 而每个取样值都连续的随机变量, 若对每个取样值再量化处理, 就可将连续的取值转换成有限的或可数的离散值。这样波形信源就可转换成离散信源来处理。

连续信源的数学模型是连续型的概率空间, 即

$$\begin{bmatrix} X \\ q(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a, b) \\ q(x) \end{bmatrix}$$

满足

$$\int_a^b q(x) dx = 1$$

式中, $q(x)$ 为随机变量 x 在取值区间 (a, b) 的概率密度函数。

【例 1.5】高斯分布信源, 其概率统计模型为

$$\begin{bmatrix} X \\ q(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\infty, +\infty) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \end{bmatrix}$$

1.4 信道及其数学模型

信道是信息传输的通道,如图 1-3 所示,信道有输入端和输出端。信息论中仅关心信道输入、输出之间的关系,而不研究信号在信道中传输的物理过程。因此可以将信道模型看成一个黑匣子。由于干扰的存在,信道的输入和输出之间一般不是确定的函数关系。数字通信系统中只讨论编码译码问题,可以将信道看成一个数字序列的变换器,它将输入消息 x 变换成输出消息 y ,以信道转移概率 $p(y|x)$ 来描述信道的统计特性。



图 1-3 信道模型

信道可以按不同的特性进行分类,根据输入和输出信号的特点可分为以下四类。

- 离散信道:信道的输入和输出都是时间上离散、取值离散的随机序列。离散信道有时也称为数字信道。
- 连续信道:信道的输入和输出都是时间上离散、取值连续的随机序列,又称为模拟信道。
- 半连续信道:输入序列和输出序列中一个是离散的,而另一个是连续的。
- 波形信道:信道的输入和输出都是时间上连续,并且取值也连续的随机信号。

与信源一样,其他信道都可以通过抽样或量化转化为离散信道。

根据统计特性,即转移概率 $p(y|x)$ 的不同,信道又可分为以下两类。

- 无记忆信道:信道的输出 y 只与当前时刻的输入 x 有关。
- 有记忆信道:信道的输出 y 不仅与当前时刻的输入有关,还与以前的若干个输入及输出消息有关。

实际上,卫星信道和深空信道可近似看成离散无记忆信道。在高频、散射和有线信道中,各种干扰所造成的错误往往不是单个地而是成群成串地出现,也就是一个错误的出现往往引起前后码元的错误,表现为错误之间的相关性,因此它是有记忆信道。

1.4.1 离散无记忆信道

离散无记忆信道 (Discrete Memoryless Channel, DMC) 的输入和输出消息都是离散无记忆的单个符号,设离散无记忆信道的输入符号 $x_i \in \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $1 \leq i \leq k$, 输出符号 $y_j \in \{b_1, b_2, \dots, b_D\}$, $1 \leq j \leq D$, 信道的特性可表示为转移概率矩阵,即

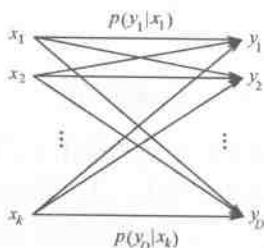


图 1-4 离散无记忆信道

$$P = \begin{bmatrix} p(y_1|x_1) & p(y_2|x_1) & \cdots & p(y_D|x_1) \\ p(y_1|x_2) & p(y_2|x_2) & \cdots & p(y_D|x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(y_1|x_k) & p(y_2|x_k) & \cdots & p(y_D|x_k) \end{bmatrix}$$

矩阵第 i 行第 j 列的概率 $p(y_j|x_i)$ 对应为已知输入消息为 x_i , 当输出消息为 y_j 时的信道转移概率, 满足 $0 \leq p(y_j|x_i) \leq 1$, 且 $\sum_{j=1}^D p(y_j|x_i) = 1$ 。

也可以将信道特性表示成图 1-4 所示的线状图形式。