



普通高等教育
电气工程与自动化类
“十一五”规划教材

NONLINEAR CIRCUITS THEORY

非线性电路理论

刘小河 编著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育电气工程与自动化类“十一五”规划教材

非线性电路理论

刘小河 编著
马西奎 主审



机械工业出版社

本书介绍非线性电路的基本理论和方法。全书各章内容分别为绪论,非线性电路元件及电路的基本性质,非线性电阻电路,非线性动态电路的基本概念,二阶电路与系统分析,非线性电路系统的稳定性,非线性电路系统的频域分析,非线性电路与系统中的分叉与混沌等。

本书在论证方面注重严谨而详尽。除传统内容外,对二阶电路奇点的分类,极限环及其稳定性,非线性电路系统的各种稳定性,非线性系统的分叉与混沌等,都做了较为详细的介绍,并以实例来说明理论方法的应用。

本书可作为电气工程、电子工程等学科研究生非线性电路理论课程的教材,也可作为大学高年级学生的教学参考书。对高校教师和工程技术人员,本书也具有较大的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

非线性电路理论/刘小河编著. —北京:机械工业出版社, 2009. 8

普通高等教育电气工程及其自动化类“十一五”规划教材

ISBN 978 - 7 - 111 - 27293 - 9

I. 非… II. 刘… III. 非线性电路—高等学校—教材
IV. TN711. 4

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第084880号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:王保家 责任编辑:王雅新

版式设计:霍永明 责任校对:吴美英

责任印制:乔宇

北京京丰印刷厂印刷

2009年7月第1版·第1次印刷

184mm×260mm·21.75印张·537千字

标准书号:ISBN 978 - 7 - 111 - 27293 - 9

定价:37.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

销售服务热线电话:(010) 68326294

购书热线电话:(010) 88379639 88379641 88379643

编辑热线电话:(010) 88379726

封面防伪标均为盗版

全国高等学校电气工程与自动化系列教材 编审委员会

主任委员 汪懋生 浙江大学

副主任委员 (按姓氏笔画排序)

王兆安 西安交通大学

王孝武 合肥工业大学

田作华 上海交通大学

刘 丁 西安理工大学

陈伯时 上海大学

郑大钟 清华大学

赵光宙 浙江大学

赵 曜 四川大学

韩雪清 机械工业出版社

委 员 (按姓氏笔画排序)

戈宝军 哈尔滨理工大学

王钦若 广东工业大学

吴 刚 中国科技大学

张纯江 燕山大学

张晓华 哈尔滨工业大学

邹积岩 大连理工大学

陈庆伟 南京理工大学

夏长亮 天津大学

萧蕴诗 同济大学

韩 力 重庆大学

熊 蕊 华中科技大学

方 敏 合肥工业大学

白保东 沈阳工业大学

张化光 东北大学

张 波 华南理工大学

杨 耕 清华大学

陈 冲 福州大学

范 瑜 北京交通大学

章 兢 湖南大学

程 明 东南大学

雷银照 北京航空航天大学

序

随着科学技术的不断进步，电气工程与自动化技术正以令人瞩目的发展速度，改变着我国工业的整体面貌。同时，对社会的生产方式、人们的生活方式和思想观念也产生了重大的影响，并在现代化建设中发挥着越来越重要的作用。随着与信息科学、计算机科学和能源科学等相关学科的交叉融合，它正在向智能化、网络化和集成化的方向发展。

教育是培养人才和增强民族创新能力的基础，高等学校作为国家培养人才的主要基地，肩负着教书育人的神圣使命。在实际教学中，根据社会需求，构建具有时代特征、反映最新科技成果的知识体系是每个教育工作者义不容辞的光荣任务。

教书育人，教材先行。机械工业出版社几十年来出版了大量的电气工程与自动化类教材，有些教材十几年、几十年长盛不衰，有着很好的基础。为了适应我国目前高等学校电气工程与自动化类专业人才培养的需要，配合各高等学校的教学改革进程，满足不同类型、不同层次的学校在课程设置上的需求，由中国机械工业教育协会电气工程及自动化学科教学委员会、中国电工技术学会高校工业自动化教育专业委员会、机械工业出版社共同发起成立了“全国高等学校电气工程与自动化系列教材编审委员会”，组织出版新的电气工程与自动化类系列教材。这类教材基于“**加强基础，削枝强干，循序渐进，力求创新**”的原则，通过对传统课程内容的整合、交融和改革，以不同的模块组合来满足各类学校特色办学的需要。并力求做到：

1. 适用性：结合电气工程与自动化类专业的培养目标、专业定位，按技术基础课、专业基础课、专业课和教学实践等环节，进行选材组稿。对有的具有特色的教材采取一纲多本的方法。注重课程之间的交叉与衔接，在满足系统性的前提下，尽量减少内容上的重复。

2. 示范性：力求教材中展现的教学理念、知识体系、知识点和实施方案在本领域中具有广泛的辐射性和示范性，代表并引导教学发展的趋势和方向。

3. 创新性：在教材编写中强调与时俱进，对原有的知识体系进行实质性的改革和发展，鼓励教材涵盖新体系、新内容、新技术，注重教学理论创新和实践创新，以适应新形势下的教学规律。

4. 权威性：本系列教材的编委由长期工作在教学第一线的知名教授和学者组成。他们知识渊博，经验丰富。组稿过程严谨细致，对书目确定、主编征集、资料申报和专家评审等都有明确的规范和要求，为确保教材的高质量提供了有

力保障。

此套教材的顺利出版，先后得到全国数十所高校相关领导的大力支持和广大骨干教师的积极参与，在此谨表示衷心的感谢，并欢迎广大师生提出宝贵的意见和建议。

此套教材的出版如能在转变教学思想、推动教学改革、更新专业知识体系、创造适应学生个性和多样化发展的学习环境、培养学生的创新能力等方面收到成效，我们将会感到莫大的欣慰。

全国高等学校电气工程与自动化系列教材编审委员会

汪植生 陈万时 郑大钟

前 言

近年来,非线性电路理论作为非线性科学的重要学科分支,取得了长足的进展。非线性电路与系统的基本理论,已经成为电气工程、电子工程、通信工程、自动化等专业研究生、工程技术人员所必须具备的研究基础之一。许多高校为研究生或高年级学生开设了非线性电路理论方面的课程。本书的目的是为电气工程、电子工程等工科研究生和高年级大学生相关课程提供一个合适的教材。同时也为工程技术人员提供在非线性电路与系统领域进行研究的入门性参考书。

本书介绍非线性系统电路理论的基本知识。全书分为8章。第1章为绪论,简要介绍了非线性电路理论的研究内容和方法。第2章介绍非线性电路元件与电路的基本性质,介绍了近代非线性电路元件理论体系的构架及电路的一些基本性质,为进行非线性电路研究准备必要的基础。第3章为非线性电阻电路分析,介绍了非线性电阻电路的基本分析方法,对电路解的存在和唯一性问题以及非线性电路的数值解法作了简明的介绍。第4章为非线性动态电路的基本概念,重点介绍了非线性电路状态方程的列写及解的存在唯一性问题。第5章为二阶电路与系统分析,对相平面法、平衡点的性质、极限环作了严谨而较为深入的讨论,并介绍了近似解析方法。最后对二阶非线性振荡电路的一些典型现象进行了分析。第6章为非线性电路与系统的稳定性分析,主要介绍了Lyapunov方法,并通过实例分析介绍了Lyapunov方法在非线性电路系统稳定性分析中的应用。第7章为非线性电路与系统的频域分析,介绍了非线性网络传递函数的概念和非线性网络频域分析的基本方法。第8章为非线性电路与系统中的分叉和混沌,介绍了非线性系统分叉和混沌的基本概念,并对非线性电路中的混沌现象进行了讨论。

本书力求做到体系完整,论述严谨,分析深入,结合应用。除传统内容外,以较多篇幅介绍了近年来非线性系统理论的新进展及在电路方面的应用。在论证方面尽量做到完备而详尽,对本书涉及到的多数定理,凡是不需要过多的数学预备知识的,我们都尽可能地给出了比较详尽的证明。作者认为:从事非线性科学研究,关键是掌握研究的思路与方法,一些定理的结论只是研究的具体结果。希望读者在阅读时掌握证明问题的思路,这样对读者以后开展研究工作将会很有帮助。为避免读者阅读的困难,对一些数学工具(例如泛函分析的基础知识等)给予了简明的介绍。这样,凡具有大学数学分析、线性代数、电路理论基础的读者都可以顺利阅读本书。

本书对非线性动态电路与系统分析讨论较为详细,其中对二阶电路与系统奇点的分类,极限环及其稳定性,非线性系统的各种稳定性,非线性系统的分叉与混沌等,都作了较为详细的介绍。在部分章节中也介绍了作者自己的一些相关研究成果。本书可作为电气工程、电子与通信工程、控制科学与工程等学科、专业研究生非线性电路与系统理论课程的教材或教学参考书,也可作为大学高年级学生相关课程的参考教材。对高校相关专业的专业教师 and 从事非线性系统研究的工程技术人员,本书也具有较大的参考价值。

本书承蒙西安交通大学马西奎教授主审,他认真审阅了本书的初稿,提出了宝贵的修改

意见，使本书增色不少。在此向马西奎教授表示衷心的感谢！

本书所涉及的作者本人的研究工作得到了国家自然科学基金（50277032）、北京市自然科学基金（4082010）项目的资助。在此向国家自然科学基金委员会、北京市自然科学基金委员会表示由衷的谢意。

在本书的立项、编写和出版过程中，得到了机械工业出版社的指导和大力支持，对此作者表示诚挚的感谢。

限于作者水平和能力，书中谬误之处在所难免，恳请各位专家、学者、读者给予批评指正。

刘小河

2009年1月于北京望京

目 录

序

前言

第 1 章 绪论 1

- 1.1 非线性电路与系统的特点 1
- 1.2 非线性电路理论的研究内容和方法 2
 - 1.2.1 非线性电路理论的研究内容 2
 - 1.2.2 非线性电路理论的基本研究方法 5
- 1.3 数学基础 6
 - 1.3.1 线性空间 7
 - 1.3.2 函数与映射 15
 - 1.3.3 算子及其范数 18

第 2 章 非线性电路元件及电路的基本性质 20

- 2.1 二端电路元件 20
 - 2.1.1 电路的基本变量 20
 - 2.1.2 基本二端代数元件 21
 - 2.1.3 高阶代数元件和动态元件 28
- 2.2 多端电路元件 31
 - 2.2.1 $(n+1)$ 端元件和 n 端口元件 31
 - 2.2.2 代数 n 端口和动态 n 端口 32
 - 2.2.3 变类器 37
 - 2.2.4 n 端口元件的几个定理 39
- 2.3 器件造型的概念 42
 - 2.3.1 器件造型的基本方法 42
 - 2.3.2 器件造型示例 43
- 2.4 电路的基本定理和基本性质 47
 - 2.4.1 电路的基本定理 47
 - 2.4.2 电路的基本性质 49

第 3 章 非线性电阻电路 63

- 3.1 非线性电阻电路方程 63
 - 3.1.1 非线性电阻电路的节点方程 63
 - 3.1.2 非线性电阻电路的混合方程 66
- 3.2 图解分析法 68
 - 3.2.1 非线性电阻电路的几个基本概念 68
 - 3.2.2 确定工作点的图解法 70

3.2.3 用图解法确定 DP 图 73

3.2.4 用图解法确定 TC 图 75

3.3 分段线性分析法 76

3.3.1 基本概念 76

3.3.2 工作点的确定 78

3.4 非线性电阻电路解的存在性和唯一性 79

3.4.1 概述 79

3.4.2 二端元件组成的电路解的性质 79

3.4.3 含晶体管的电阻电路解的性质 85

3.5 非线性电阻电路的数值解法 90

3.5.1 不动点的概念 90

3.5.2 牛顿-拉夫逊法 93

第 4 章 非线性动态电路的基本概念 95

4.1 非线性电路的状态变量描述 95

4.1.1 非线性动态电路的描述 95

4.1.2 状态变量法的概念 99

4.1.3 非线性电路状态变量的选取及元件特性 101

4.1.4 非线性电路状态方程的列写 105

4.1.5 基于状态平均的含开关器件非线性电路的状态方程 115

4.2 状态方程解的存在性和唯一性 118

4.2.1 基本概念 118

4.2.2 不动点定理 121

4.2.3 存在唯一性定理 123

4.3 非线性自治系统的轨线及平衡状态 127

第 5 章 二阶电路与系统分析 131

5.1 相平面法 131

5.1.1 相平面 131

5.1.2 等倾线法 133

5.1.3 Liénard 法 135

5.2 奇点附近轨线的性质 136

5.2.1 二阶线性自治系统奇点的分类 136

5.2.2 非线性自治系统奇点的分类	143	6.6.2 连续非对称神经网络的全局渐近 稳定性	236
5.3 周期解和极限环	152	6.6.3 一类非线性自治网络的全局指数 稳定性	239
5.3.1 极限环的概念	152	第7章 非线性电路系统的频域 分析	243
5.3.2 极限环的存在性	155	7.1 Volterra 级数	243
5.3.3 极限环的稳定性	160	7.1.1 非线性动态系统的 Volterra 级数 表示	243
5.3.4 Poincaré 指数	162	7.1.2 Volterra 级数的基本性质	247
5.4 近似解析法	165	7.2 非线性网络的传递函数	249
5.4.1 摄动法	165	7.2.1 多重拉普拉斯变换与非线性传递 函数	250
5.4.2 平均法	169	7.2.2 复合系统的非线性传递函数	251
5.5 二阶振荡电路	176	7.2.3 非线性网络的传递函数	255
5.5.1 自激振荡电路分析	177	7.3 非线性网络的频域分析	265
5.5.2 二阶非线性振荡电路的频率 特性	180	7.3.1 非线性网络的频率响应	266
5.5.3 二阶非线性电路的子谐波 振荡	183	7.3.2 非线性自治网络分析	268
第6章 非线性电路系统的稳定性	186	第8章 非线性电路与系统中的分叉和 混沌	273
6.1 稳定性的基本定义	186	8.1 动力系统基础	273
6.2 Lyapunov 直接法的基本定理	193	8.1.1 动力系统与流形	273
6.2.1 V 函数的定义及其性质	194	8.1.2 线性化流与双曲性	276
6.2.2 Lyapunov 直接法的几何思想	196	8.1.3 中心流形定理	279
6.2.3 自治系统的 Lyapunov 第二方法	197	8.1.4 离散动力系统与 Poincaré 映射	283
6.2.4 指数稳定性和全局稳定性	204	8.2 非线性电路与系统中的分叉现象	286
6.2.5 非自治系统的 Lyapunov 第二方法	207	8.2.1 结构稳定性和分叉的概念	286
6.3 按首次近似决定稳定性	211	8.2.2 静态分叉	289
6.3.1 线性自治系统的稳定性	212	8.2.3 Hopf 分叉	293
6.3.2 按首次近似决定稳定性	216	8.2.4 其他分叉简介	302
6.3.3 应用举例	221	8.3 非线性系统中的混沌现象	304
6.4 Lyapunov 直接法的推广	223	8.3.1 非线性系统混沌的概念	305
6.4.1 Lasalle 不变原理	223	8.3.2 混沌运动的识别方法	309
6.4.2 Hopfield 神经网络的稳定性	226	8.3.3 映射的混沌行为	312
6.5 Lyapunov 函数的构造和吸引域的 估计	229	8.3.4 Lorenz 系统	315
6.5.1 特殊类型自治系统的 Lyapunov 函数	229	8.4 非线性电路中的混沌运动实例	318
6.5.2 克拉索夫斯基方法	231	8.4.1 非线性电路的混沌	318
6.5.3 变量梯度法	231	8.4.2 一类神经网络的混沌	323
6.5.4 吸引域的估计	233	参考文献	333
6.6 非线性电路稳定性分析实例	234		
6.6.1 锁相环路的稳定性分析	234		

第1章 绪 论

电路是由电气、电子器件按某种特定目的而相互连接所形成的系统的总称。当电路中至少存在一个非线性电路元件时，我们称之为非线性电路。由于电路本身就是一类典型的系统，所以非线性电路与非线性系统的研究是密不可分的。当人们着眼于非线性电路的整体功能时，则是将电路看作一个系统，从而可以使用非线性系统科学中行之有效的数学工具与方法来分析非线性电路。但是，非线性电路又不等于非线性系统，非线性电路的元件模型、电路的基本约束与基本性质，都是非线性电路理论中所要关注的基本问题，而它们并不是非线性系统理论中所要注重研究的。近年来，非线性系统理论在非线形电路研究中的广泛应用极大地促进了电路理论的发展。反过来，非线性电路的研究又给非线性系统理论提供了一个典型的应用实例，给非线性系统科学的研究提出了若干新的问题，大大地促进了非线性系统理论研究的进程。因此，在非线形电路与系统理论中，人们往往交替使用电路、网络与系统这几个名词。当着眼于分析具体电路的电压、电流等物理量时，往往使用电路或网络来描述对象，而当着眼于电路的整体功能的特性时，往往又称之为系统。应当说系统一词具有更一般的含义。一般认为，系统是指由若干相互关联、互相作用的事物按一定规律组合而成的具有特定功能的整体。具体的系统可以通过一定的数学模型来描述，在许多情况下，系统的数学模型也成为区别不同系统的主要标志。在本书中，电路、网络、系统等名词是通用的。不过，当研究具体电路的特性时，我们常称之为电路或网络；在研究某些抽象的特征特别是数学特征时，我们常称之为系统。

一切实际存在的电路都或多或少地具有非线性的特性。当电路的工作范围不大时，常常可以忽略电路的非线性特性，将其作为线性电路进行分析，分析的结果一般能满足实际的需要。例如小信号放大电路就可以视为线性电路进行分析。但是，当电路工作范围较大时，采用线性电路的分析方法进行分析就会与实际结果产生较大误差，此时必须采用非线性电路的分析方法对电路进行分析。例如功率放大器就必须考虑晶体管的非线性特点来对其进行分析。不仅如此，有时人们还有意利用电路器件的非线性特性来达到其特殊的应用要求。例如：在工程中广泛应用的数字电子电路、通信电子电路，就是利用电子器件的非线性特性来达到设计要求的；电力电子电路被广泛应用于整流、逆变等以实现电能及频率变换的需要；近年来得到飞速发展的神经网络系统，更是一种本质非线性的大规模非线性系统。因此，对非线性电路的原理进行深入的分析，构建合适描述体系，是十分必要的。虽然目前在非线性电路理论的研究中尚有许多问题亟待解决，但是这一理论本身已经取得了许多重要成果，并形成了一个内容相当广博的学科。

本章简单介绍非线性电路与系统的特点，重点介绍非线性电路理论的主要研究内容及研究方法，对后续章节中所用到的基础数学知识，也作简洁而实用的介绍。

1.1 非线性电路与系统的特点

当电路中只含有线性电路元件时，其运动规律可以用线性微分方程或线性算子来描述，

该电路称为线性电路或线性系统。线性系统的一个基本性质是它满足叠加原理，由此产生了线性系统理论的基本分析方法：如时域中的卷积、频域和复频域中的传递函数方法等。

如果电路中至少含有一个非线性电路元件时（例如非线性电阻元件、非线性电感元件等），其运动规律就要由非线性微分方程或非线性算子来描述，我们称之为非线性电路或非线性系统。与线性系统相比，非线性系统具有如下特点：

1. 非线性系统不满足叠加原理

是否满足叠加原理是线性系统与非线性系统之间的最主要的区别。对于线性系统来说，由于可以使用叠加原理，使系统的分析较为简单，小信号和大信号作用下的结果，在基本性质上是一致的，系统的局部性质与全局性质是一致的。但由于非线性系统不满足叠加原理，因此线性系统中一系列行之有效的分析方法在非线性系统中就不再适用，必须另辟途径。

2. 非线性系统的解不一定唯一存在

对于仅由非线性电阻元件组成的电阻性电路，或考察非线性动态电路的稳态性质（例如平衡点）时，其电路的特性由一组非线性代数方程来描述。这组方程可能有唯一解，也可能有多个解，甚至可能根本无解。因此，在求解之前，应该对系统的解的性质进行判断。如果解根本不存在，求解它就没有任何意义；如果解存在但不唯一，就应对解的个数及位置在求解之前有一个大致的了解。

非线性动态电路的特性一般由一组非线性微分方程或状态方程来描述。对一个实际系统来说，它在一定初始条件下的解应该存在并且唯一。但由于系统的方程总是在对实际对象进行了某些简化或近似后而得到的，因此，这组方程不一定存在唯一解。对于不存在唯一解的非线性系统模型，用计算机来求其近似解就失去了意义。

3. 非线性系统平衡状态的稳定性问题

线性系统一般存在一个平衡状态，并且很容易判断系统的平衡状态是否为稳定的。而非线性系统往往存在多个平衡状态，其中有些平衡状态是稳定的，有些平衡状态则是不稳定的。工程中常常需要确定解的稳定区和不稳定区的分界线，有时还需要研究某些参数变化时解的稳定性变化规律。

4. 非线性电路中的一些特殊现象

在非线性电路中常常会发生一些奇特的现象，这些奇特的现象在过去和现在一直都是非线性电路理论的重要研究课题，促进了非线性理论的研究和发展。例如，非线性自治电路的自激振荡，非线性电路在周期激励作用下的次谐波振荡和超次谐波振荡；激励频率连续变化时，系统幅频响应的跳变现象；系统解的形式因为参数的微小变化而发生本质性改变的分叉现象；对于某些非线性电路和系统，还会出现一种貌似随机的混沌现象。分叉、混沌现象的研究大大丰富了非线性系统科学的理论，促进了系统科学的发展。

1.2 非线性电路理论的研究内容和方法

1.2.1 非线性电路理论的研究内容

非线性电路理论的研究内容是十分广泛的，这是因为不断问世的新型电子器件，就本质

上来说都是非线性的。对于由它们所组成的电路与系统，必须采用一定的数学工具对其进行定性及定量的分析研究，得出电路系统的稳态和动态特性、局部和全局特性。下面对非线性电路理论的主要研究内容作一简单介绍。

1. 器件造型

在经典电路理论中，对元件（Element）和器件（Device）无须作严格的区别。一个电阻器可以认为就是电阻元件，一个电容器也可以认为是电容元件。但对近年来出现的电子器件及电力电子器件，情况就不同了。这些多端器件在信号的不同频率、不同幅值下会呈现出不同的复杂特性。因此，如何为新型器件构造电路模型就成为一个必须解决的问题。许多电气、电子工程师往往习惯于用 R 、 L 、 C 元件的组合来表示一种新的器件，或仅仅注意器件的直流 U - I 特性。这样的方法难以解释新型器件的复杂特性，甚至可能导致人们产生错误的结论。遗憾的是，一些电路理论工作者对此也缺乏足够的认识。

事实上，许多新型电子器件往往具有下列一项或几项不寻常的特点：

- 1) 由于器件的几何尺寸越来越小，工作频率却越来越高，因而造成了在器件内部的高场强以及由此而产生的器件强烈的非线性特性。
- 2) 器件内部高度复杂的动力学过程将产生不可忽略的高阶响应，如集肤效应、边缘效应、非线性扩散效应等。
- 3) 由以上特点使一些电子器件产生一些奇特的现象，如频变现象、多值现象、滞回现象、振荡现象等。

对这些不断涌现的新型电子器件，必须定义一系列新的基本元件，使得由它们的组合能够在一定条件下来近似模拟器件的物理特性。此外，这些元件系列应该能够很好地对已有的器件进行分类，并为新型电子器件的模拟与综合指明方向。

2. 非线性电阻电路

非线性电阻电路分析是非线性电路理论的基础，也是非线性电路理论中比较成熟的部分。

非线性电阻电路研究的内容大体可分为理论定性分析和定量分析两大部分。理论定性分析主要研究非线性电阻电路解的存在性和唯一性问题。对于由无源电阻网络组成的网络，其无增益性质也是研究的重要内容之一。定量分析大体包含三个方面：一是经典的图解分析法和小信号分析法，二是数值分析方法，三是分段线性化方法。图解分析法用来解决简单非线性电阻电路的工作点分析、DP 图和 TC 图分析问题。小信号分析则是当交变信号激励幅值远小于直流电源幅值时，将非线性电路进行线性化处理的一种近似分析方法。小信号分析不仅适用于非线性电阻电路，也可用于非线性动态电路与系统的分析。在非线性的数值分析中，常用的有不动点方法和牛顿-拉夫逊方法。这些数值方法很早就已提出，只是在数字计算机广泛应用后才变为非线性电阻电路实用的数值分析技术。数值分析方法可以得到较精确的数值解，但在计算前需要估计解的个数及大致范围。分段线性化方法在 20 世纪 70 年代被提出，在 80 年代提出的规范型分段线性化方法很好地解决了减少内存、提高计算效率等问题。由于分段线性化分析方法的提出，人们普遍认为非线性电阻电路的分析已基本得到解决。

3. 非线性动态电路的基本分析方法

非线性动态电路的分析具有更加广泛的内容，目前人们对它的规律性还所知甚少。由于

非线性微分方程一般不存在闭式解,故非线性动态电路目前还不存在统一的分析方法。从研究内容来看,非线性电路分析研究的内容和方法大体可分为二阶系统相平面方法和近似解析方法,高阶电路系统的定性分析,基于 Volterra 级数的非线性系统的频域方法以及计算机辅助电路分析等。

对于二阶电路系统,通常采用相平面法进行分析。相平面法本质上是一种几何作图法,所用数学工具简单,可以看到系统特性的全貌,适合于定性分析。缺点是不够准确,且仅能应用于二阶系统。

近似解析法使用范围较为广泛,但一般用于研究具有“缓变”特点的非线性振荡电路系统,在一定范围内可以得到较准确的解答。主要方法有摄动法、慢变参数法、多尺度法、谐波平衡法等。这些方法的主要缺点是计算较为复杂,主要应用于二阶系统,很难应用于高阶系统。

高阶电路系统的定性分析来源于对动力学问题常微分方程的定性研究,即动力系统的理论。它可以看作为二阶系统定性分析方法向高阶系统的推广。动力系统理论研究系统的轨线的拓扑性质,研究系统随时间演化过程中系统的全局定性行为。其中,平衡点附近轨线的拓扑性质、周期轨道等不变集的性质都是研究的重点内容。

弱非线性系统的 Volterra 级数方法自 20 世纪 80 年代以来取得了长足的进展。这种方法适用于相当广泛的一大类弱非线性系统,可以对这类非线性系统进行频域分析,使得人们像使用拉普拉斯变换分析线性系统那样,使用基于 Volterra 级数的非线性传递函数分析一般的非线性系统。Volterra 级数方法已在非线性电路系统的频率响应、系统建模、灵敏度分析、失真分析和 Hopf 分叉等方面获得了广泛的应用,成为分析非线性动态电路系统的一种有力方法。

计算机辅助分析是分析非线性动态电路的一种重要方法,正是由于有了计算机,才使得分析复杂的非线性动态电路成为可能。非线性动态电路的计算机辅助分析主要有两方面的内容:一是非线性动态电路方程的建立,主要有状态变量法、混合法和稀疏表格法。二是非线性微分方程的数值解法,常用的有欧拉法、梯形法、龙格-库塔法、基尔法等。

4. 非线性动态电路系统的稳定性分析

任何实际的电路系统在工作时都必须考虑“稳定性”问题,只有稳定的系统才能保证系统在受到扰动后仍然能恢复到系统原来的工作状态,所以稳定性问题一直是非线性电路与系统研究的重点内容之一。

Lyapunov 意义下的稳定性是非线性系统稳定性分析的主要理论依据。此外,绝对稳定性、输入-输出稳定性、大系统的稳定性等方法都在非线性电路与系统稳定性分析中得到了应用。

非线性电路系统的稳定性分析研究主要包含以下几方面的内容:①平衡点的稳定性,包含平衡点的局部稳定性和大范围稳定性。②周期解的稳定性,主要是极限环的稳定性。③轨线结构的稳定性,这一类问题与分叉等问题密切相连。在稳定性研究中还有许多问题亟待解决。

5. 非线性振荡电路中的特殊现象

非线性振荡电路系统中的特殊现象是非线性电路经典理论研究的主要内容之一。研究非线性电路系统的许多经典方法是在研究非线性振荡电路的过程中提出来的,非线性振荡电路

中的特殊现象如自激振荡、次谐波振荡、高次谐波振荡、同步现象、非同步激励现象、拟周期振荡等引人入胜的现象曾在过去的几十年中激励了众多的学者、专家对此进行研究,对它们的研究大大丰富了经典的非线性电路与系统分析的理论。现在,人们往往将这部分内容作为非线性电路与系统理论的入门教程之一。

6. 非线性系统的分叉和混沌

分叉与混沌现象的研究自20世纪70年代后期以来得到非线性科学工作者的普遍重视,成为当代科学研究的热点之一。20世纪80年代以来,不断地有在一些简单的非线性电路中发现分叉及混沌现象的报道,这说明在非线性电路系统中,混沌现象是一个比较普遍的现象。

“分叉”这一概念是Poincaré首次提出的,他用这一术语来描述微分方程组平衡点的“分裂”现象。所谓混沌现象,通俗地讲是指具有整体稳定性的耗散系统由于其内部的不稳定性而出现的貌似随机的现象。混沌系统具有对初始条件的极度敏感依赖性,而系统的轨道又只能在有限范围内运动,这样就造成了轨道在有限的空间内缠绕往复而形成非常复杂的形状。一个非线性系统常常会通过倍周期分叉和准周期分叉的道路而通向混沌,因此分叉和混沌的研究是紧密联系的。

分叉和混沌的研究以动力系统理论为数学基础,涉及的数学工具较为艰深。其研究方法主要有拓扑学方法(如Cantor集合、分形几何、奇怪吸引子等)、数学分析方法(如Melnikov方法和Smale马蹄映射等)、数值方法(如功率谱法、Lyapunov指数等)、实验方法等。

1.2.2 非线性电路理论的基本研究方法

1. 定性分析法

定性分析法是非线性电路理论中非常重要的分析方法。定性分析大概涉及如下内容:

1) 解的存在性和唯一性。这个性质无论对于非线性电阻电路还是非线性动态电路都是十分重要的。解不存在,求解它就没有任何意义。对于非线性动态电路,还要求解是唯一存在的。

2) 工作点的可观测性和平衡点的稳定性。只有稳定的平衡点对应的工作点才是可以观测的。

3) 非线性动态电路系统轨线的全局结构及渐近性质。

定性分析所涉及的数学工具较为艰深,包括微分方程定性理论、稳定性理论、泛函分析中的不动点定理、动力系统理论等。定性分析侧重于电路解的特性、解的全局性质和渐近性质等方面,至于解的精确形式,则不太关心,往往用数值分析的方法去解决。

2. 近似解析法

近似解析法主要有分段线性化方法、微分方程的近似解析法和Volterra级数法等。其中,分段线性化方法主要应用于非线性电阻电路,而微分方程的近似解析法和Volterra级数法等则主要应用于非线性动态电路。

分段线性化方法的主要特点是:用较简单的分段线性函数来逼近非线性电阻的电压电流非线性关系,从而可以用解析的方法求出较简单的非线性电路的解,并能定量地考察一些参数变化对电路响应的影响。该方法也可应用于仅含有二端非线性电阻的非线性动态电路。

对于非线性动态电路，由于电路方程是非线性微分方程，而非线性微分方程一般难于求得闭式解析解，因而采用微分方程的近似解析法来求解非线性动态电路。微分方程的近似解析法的主要思想是取一阶近似、二阶近似、高阶近似等来逐步逼近系统的真实解。由于近似解析法的分析较为繁杂，所以一般仅对于二阶系统有了较为深入的结果。微分方程的近似解析法主要有摄动法、平均法和幂级数法。Volterra 级数法从理论上说可以应用于一般的非线性动态电路系统，且可以分析到任意阶核。但实际上，一般只分析到二阶或三阶核。尽管如此，人们已经获得了非常丰富的分析结果，大大加深了对非线性动态电路系统的认识。

近似解析法的缺点是计算、分析较为复杂，工作量较大。

3. 数值分析法

对于非线性微分方程，只是在一些极特殊的情况下才可以求出解析解。近似解析法一般用于二阶微分方程的求解，而在更多的情况下只能用数值方法求近似解。在非线性的电阻电路中，常常用数值方法确定工作点的具体位置。由于计算机技术的发展，数值方法已经成为非线性电路分析中最常用而且有效的方法。

对于非线性电阻电路，电路方程是一组非线性代数方程，必须用数值分析法才能得到精确的解答。常用的数值分析方法有不动点方法和牛顿-拉夫逊法，其中牛顿-拉夫逊法由于收敛快，应用更为广泛。

对于非线性动态电路，目前常采用两大类方法进行数值分析。其一是首先列出非线性电路的状态方程——通常这是一组联立的一阶非线性微分方程组，然后采用微分方程的数值解法求其数值解。其二是将非线性动态电路离散化，将求解时间分成若干个很小的时间间隔，在每个小时时间间隔内，将电感、电容等动态元件用伴随模型来代替，从而将非线性动态电路近似化为非线性电阻电路，对其列出电路方程，然后用牛顿-拉夫逊法等去求解。

除了求电路的数值解外，近年来数值分析法还作为一个有力工具应用到非线性电路的定性分析之中。例如稳定性的迭代数值分析、混沌现象研究中的 Lyapunov 指数计算、功率谱的计算等，使得数值分析法具有更重要的应用价值。

4. 实验方法

实验方法从来都是研究非线性电路与系统的重要方法。非线性电路理论的理论分析正确与否，应该以实验的事实为准则。近年来由于计算机技术的飞速发展，电路的数字仿真已经成为继理论分析、物理实验之后的第三类分析方法。但是数字仿真结果的正确性仍然要通过实验的结果或系统的运行状况来检验。由于现代科技的进步，实验分析手段发展很快，正在日益向智能化的方向发展。

1.3 数学基础

在非线性电路系统的分析过程中，常常要应用一些基本的数学工具来说明问题，其中包含泛函分析、稳定性的数学理论、微分方程的定性分析等内容。本节主要对泛函分析的一些基本内容作一简单介绍，以后相关章节还将就要用到的数学工具进行简要介绍。应该说明的是，我们的主要目的是利用现代数学工具及相应结论来分析非线性电路系统的实际问题，因此仅引述相关的定义、定理而不作详细论证。为了理解有关定理和结论，我们通过一些例子来说明。

1.3.1 线性空间

1. 线性向量空间

定义 1-1 线性向量空间 设 L 为一个集合, 假如在 L 中规定了线性运算——元素的加法运算以及实(复)数与 L 中元素的乘法运算, 满足下列条件:

1) L 关于加法成为交换群。即 $\forall x, y \in L$, 都存在 $u \in L$, 记 $u = x + y$, 称 u 是 x, y 的和, 这个运算满足:

$$\textcircled{1} x + y = y + x \quad (\text{加法交换律})$$

$$\textcircled{2} (x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y \in L \quad (\text{加法的结合律})$$

$\textcircled{3} L$ 中存在唯一的元素 O_L (称它为零元素。若从上下文看, O_L 是清楚的, 可用 0 表示), 使得

$$x + O_L = O_L + x = x \quad \forall x \in L \quad (\text{加法恒等式成立})$$

$\textcircled{4}$ 对每一个 $x \in L$, 存在一个元素, 用 $-x$ 表示, 使得

$$x + (-x) = O_L$$

2) 对任何 $x \in L$ 及任何实数(或复数) α , 存在元素 $\alpha x \in L$, 称 αx 是 α 和 x 的标量乘法, 这个运算满足:

$$\textcircled{1} 1 \cdot x = x$$

$$\textcircled{2} a(bx) = (ab)x \quad a, b \text{ 是实数(或复数)}$$

$$\textcircled{3} (a+b)x = ax + bx \quad a, b \text{ 是实数(或复数)}$$

$$\textcircled{4} a(x+y) = ax + ay \quad a \text{ 是实数(或复数)}$$

那么称 L 为线性实(复)向量空间, L 中的元素称为向量。

我们通过几个例子来说明上述的定义。

【例 1-1】 考虑 n 维空间 \mathbf{R}^n , 其中的向量 x, y 是由 n 个有序的实数构成的, 即 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 定义

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \quad \alpha \text{ 为实数}$$

那么, \mathbf{R}^n 成为实线性向量空间。换句话说, 两个 n 维向量之和可通过各个分量分别相加而得到, 而一个实数与一个 n 维向量之积可以通过此实数与 n 维向量的各个分量逐个相乘而得到。

【例 1-2】 设 $F[a, b]$ 代表定义于 $[a, b]$ 区间上所有实值函数的集合。 $F[a, b]$ 中的代表性元素就是将 $[a, b]$ 映射到实数集合 \mathbf{R} 的函数 $f(\cdot)$ 。定义函数的和及函数与数的积如下: 对于 $t \in [a, b]$, 令

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), \quad f(\cdot), g(\cdot) \in F[a, b]$$

$$(\alpha f)(t) = \alpha \cdot f(t), \quad f(\cdot) \in F[a, b], \alpha \text{ 是实数}$$

如果对任意 $f(\cdot), g(\cdot) \in F[a, b]$ 时, 给定任意实数 α, β 时有

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \in F[a, b]$$

那么 $F[a, b]$ 就成为实线性向量空间。

【例 1-3】 设 $L[y] = \frac{d^n y}{dt^n} + \alpha_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_{n-1} \frac{dy}{dt} + \alpha_n y = 0$ 是一常系数线性微分方程。 R