组合优化

陈光迪

南京大学出版社

组合优化

陈光迪

南京大学出版社
1993 · 南京

(苏)新登字 011 号

组合优化
ZUHE YOUHUA
陈光迪 编著

南京大学出版社出版
(南京大学校内)
江苏省新华书店发行　　江苏地质印刷厂印刷
*
开本 787×1092 1/32 印张 3 字数 67 千
1993 年 10 月第 1 版　1993 年 10 月第 1 次印刷
印数 1—1000
ISBN 7-305-01953-4/O·97
定价 3.50 元

序

离散数学特别是组合学和图论对于计算机科学的发展有着决定性的影响．所以，组合数学在近代日益显示它的重要性．于是吸引了许多数学工作者投身于它以及有关的研究领域．陈光迪同志原先主要兴趣在于几何学，但近些年来已多关注组合学的研究．早在1979年春已于南京大学数学系首次开设图论课程，并编写出版了《图论引论》一书．后应聘去淮海大学筹建应用数学系．教学中除开设图论课外，还讲授拓扑学、近世代数等课程．后又讲授组合优化课程．现将其讲稿整理加工成本书．虽篇幅不大，但对线性规划的讲述完整严格，处理方法新颖．对非线性规划的一般理论也有较详尽的叙述，其中二次规划的处理也具新意，而几何规划对应用工作者尤其是有意义的．由于书的特点已在作者的前言里有所叙述，我就不再赘言了．我认为这是一本有关规划的严谨且有启发性的读物，故乐于向读者推荐．

唐述钊

1991年10月

前 言

本书原为江苏省淮海大学应用数学系应用数学专业四年级下学期开设的规划优化课程而编写的讲义.由于作者已为这些学生开设了高等微积分、拓扑学、近世代数等先行课程,因而此书的内容处理注重于理论的严格推导.所以上述的那些预备知识是认为读者已经具有的.

鉴于书中第一章线性规划的讨论是采用组合的方法以及严格的凸集理论,故作者将书名定为"组合优化".

本书线性规划的计算方法是将原规划与对偶规划同列于一表,进行迭代.它是全新的,完全不同于通常的方法.其理论是十分完美的,即使出现如通常线性规划计算中的"恶性循环"现象,我们仍能有办法判断所给线性规划问题是否有解.

由于上述方法,二次规划的处理和计算自然亦是不同于通常的方法了.

一般非线性规划当然十分重要,所以书中亦作了严格的处理,并且证明了 **Slater** 定理,为最后的几何规划的讨论作好了理论准备.

几何规划是较新的分支,它在工程设计中极为有用.所以,作者对它的理论作了简明而严格的叙述,且给出了几何规划的基本定理的证明.

陈光迪

1991 年 10 月

目 录

第 1 章　线性规划

1.1 凸集、凸锥和闭凸锥的对偶集

我们在实数 n 维欧几里得空间 E_n 中讨论问题. 以希腊字母表示 E_n 中的点. 设 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)\in E_n$，则称 $|\alpha|=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$ 为 α 的长度或模. 称 $|\alpha-\beta|$ 为点 α 和点 β 间的距离，记为 $d(\alpha,\beta)$.

引理 1　设 C 是 E_n 中的凸集①. 让 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in C$，则 $\alpha=a_1\alpha_1+\cdots+a_m\alpha_m\in C$，其中 $a_i\geqslant 0$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i=1$.

证　对 m 用数学归纳法. $m=2$ 时，$\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2$，其中 $a_1,a_2\geqslant 0$ 且 $a_1+a_2=1$. 因 C 是凸集，故 $\alpha\in C$.

现设 $m=k$ 时，命题成立. 让

$$\alpha=a_1\alpha_1+\cdots+a_{k+1}\alpha_{k+1},$$

其中 $a_i\geqslant 0,i=1,\cdots,k+1$，且 $\sum\limits_{i=1}^{k+1}a_i=1$.

若 $a_1=0$ 或 1，则 $\alpha\in C$；若 $0<a_1<1$，则

$$\alpha=a_1\alpha_1+(1-a_1)\times(a_2\alpha_2+\cdots+a_{k+1}\alpha_{k+1})/(1-a_1)$$

据归纳法假设，有

$$\frac{a_2\alpha_2+\cdots+a_{k+1}\alpha_{k+1}}{1-a_1}=\frac{a_2}{1-a_1}\alpha_2+\cdots+\frac{a_{k+1}}{1-a_1}\alpha_{k+1}\in C$$

故 $\alpha\in C$.　□

---

①　请见参考书[1]或[2]

定义 1 设 C 是凸集,$\xi \in C$. 若不存在二个不同的点 $\alpha, \beta \in C$,使 $\xi = a\alpha + (1-a)\beta$,其中 $0 < a < 1$,则称 ξ 是 C 的顶点.

由此,$\xi \in C$ 是 C 的顶点当且仅当如存在式 $\xi = a\alpha + (1-a)\beta$,其中 $0 < a < 1$,$\alpha, \beta \in C$,则必有 $\alpha = \beta (= \xi)$.

定义 2 设 $u_1x_1 + \cdots + u_nx_n = u_0$ 是 E_n 的超平面. 我们将其左端简记为 $f(\xi)$,其中 $\xi = (x_1, \cdots, x_n)$. 即 $f(\xi) \equiv u_1x_1 + \cdots + u_nx_n$. 设 C 是凸集. 如若 $\forall\ \eta \in \overline{C}$,有 $f(\eta) > u_0$,则称超平面 $f(\xi) = u_0$ 是 C 的分界面. 设超平面 $f(\xi) = u_0$ 是凸集 C 的分界面,点 $\omega \in En$ 使 $f(\omega) < u_0$,则称超平面 $f(\xi) = u_0$ 是点 ω 和凸集 C 的分隔面,亦说其分隔 ω 和 C.

定义 3 设 $f(\xi) \equiv u_1x_1 + \cdots + u_nx_n = u_0$ 是超平面,C 是凸集. 若 $\forall\ \eta \in \overline{C}$,有 $f(\eta) \geqslant u_0$,且 $\inf\limits_{\eta \in \overline{C}} f(\eta) = u_0$,则称 $f(\xi) = u_0$ 是凸集 C 的支撑面.

例 1 在平面上给定凸集 $C: x^2 + (y-3)^2 < 2^2$,则直线 $y = 0$ 是 C 的分界面(线)(见图 1).

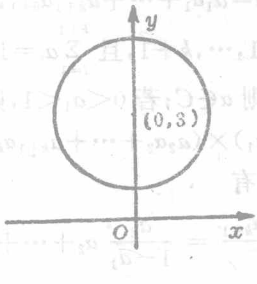

图 1

例 2 在平面上给定凸集 $C: x^2 + (y-2)^2 < 2^2$,则直线 y

$=0$ 是 C 的支撑面.

定义 4　设 C 凸集. 若 C 的内域 $\mathrm{int}C\neq\varnothing$,则称 C 为凸体.

定义 5　设 C 是凸集. 若 $\forall\ \xi\in C$ 和对任何非负实数 $b\geqslant 0$,有 $b\xi\in C$,则称 C 是凸锥.

定义 6　设 C 是凸锥,$\xi\in C$. 若有 $\xi=a\eta+(1-a)\zeta$,其中 $0<a<1$,$\eta,\zeta\in C$,则必存在二实数 $u,v\geqslant 0$,使 $\eta=u\xi$,$\zeta=v\xi$. 那么我们称 ξ 是凸锥 C 的顶点.

例 3　任给 $m\times n$ 阶矩阵 $A=(a_{ij})$. 按下面的元素排法:

$$(a_{11},\cdots,a_{1n},a_{21},\cdots,a_{2n},\cdots,a_{m1},\cdots,a_{mn})$$

则一切 $m\times n$ 阶矩阵构成 mn 维欧几里得空间 E_{mn},而一切元素为非负实数的 $m\times n$ 阶矩阵所成之子集是 E_{mn} 中的凸锥. 又双随机 n 阶方阵所成之集,即集

$$C=\{A=(a_{ij})\mid a_{ij}\geqslant 0\ ,\ \sum_{i=1}^{n}a_{ij}=1\ ,\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}=1\}$$

是 E_{nn} 中的凸集. 而 $n\times n$ 阶对称方阵的全体构成 E_{nn} 中的凸锥,$n\times n$ 阶半正定对称方阵的全体亦构成 E_{nn} 中的凸锥.

定理 1　设 C 是凸集,则 $\overline{C}$①亦是凸集.

证　设 $\xi,\eta\in\overline{C}$,则存在序列 $\{\xi_n\},\{\eta_n\}\subsetneq C$,使

$$\lim_{n\to\infty}\xi_n=\xi\quad,\quad\lim_{n\to\infty}\eta_n=\eta$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\{a\xi_n+(1-a)\eta_n\}=a\xi+(1-a)\eta,\text{其中 }0<a<1.$$

从而,$a\xi+(1-a)\eta$ 是 C 的极限点. 故 $\overline{C}$ 是凸集.

引理 2　设 X 是 E_n 的子空间,$A\subseteq X$. 则函数 $\varphi:X\to\mathrm{R}$(R 为实数空间),其定义为

---

① 请见参考书[1]

$$\varphi(\xi)=\operatorname{dist}(\xi,A)$$

$$\equiv\inf_{\alpha\in A}d(\xi,\alpha)\quad(\text{inf 表示下确界})$$

是连续的. 而且,若 A 是 X 中的闭集,则 $\varphi(\xi)>0,\forall\ \xi\in X\backslash A$.

证 设 $\xi,\eta\in X$. 对任何 $\alpha\in A$,我们有

$$d(\xi,\alpha)\leqslant d(\xi,\eta)+d(\eta,\alpha)$$

故

$$\operatorname{dist}(\xi,A)=\inf_{\alpha\in A}d(\xi,\alpha)\leqslant d(\xi,\eta)+\operatorname{dist}(\eta,A)$$

因而

$$\operatorname{dist}(\xi,A)-\operatorname{dist}(\eta,A)\leqslant d(\xi,\eta)$$

交换 ξ,η 的位置,有

$$\operatorname{dist}(\eta,A)-\operatorname{dist}(\xi,A)\leqslant d(\eta,\xi)$$

故

$$|\operatorname{dist}(\xi,A)-\operatorname{dist}(\eta,A)|\leqslant d(\eta,\xi)=d(\xi,\eta)\quad\text{即}$$

$$|\varphi(\xi)-\varphi(\eta)|\leqslant d(\xi,\eta)$$

故 $\varphi(\xi)$在 X 上连续.

又,$\varphi(\xi)\geqslant 0,\forall\ \xi\in X$. 设 $\xi_0\in X$,使 $\varphi(\xi_0)=\operatorname{dist}(\xi_0,A)=0$,则 $\xi_0\in\overline{A}$. 故若 A 是 X 中的闭集,则由 $\varphi(\xi_0)=0$ 知 $\xi_0\in A$. 所以,$\varphi(\xi)>0,\forall\ \xi\in X\backslash A$. □

定理 2 设 X 是 E_n 的子空间,A 是 X 的闭子集,C 是 X 的紧致子集①. 则存在 $\gamma_0\in C$,使 $\operatorname{dist}(C,A)=\operatorname{dist}(\gamma_0,A)$. 若 A 亦为紧致的,则存在 $\alpha_0\in A$,使 $\operatorname{dist}(C,A)=d(\gamma_0,\alpha_0)$.

证 由引理 2,$\varphi(\xi)=\operatorname{dist}(\xi,A)$是 X 上的连续函数. 故 φ 在 C 上的限制 $\varphi|C$ 取到最小值. 即存在 $\gamma_0\in C$,使. $\varphi(\gamma_0)=\inf$

---

① 请见参考书[1]或[2]

$\{\varphi(\gamma)|\gamma\in C\}=\inf\{\mathrm{dist}(\gamma,A)|\gamma\in C\}=\mathrm{dist}(C,A)$.（实则，因 $\varphi|C$ 在 C 上连续，且 C 是紧致子集，故 $\varphi|C$ 是 R 上的紧致子集. 因而，它是 R 的有界闭集. 所以，存在 γ_0，使 $\varphi(\gamma_0)=\inf\{\varphi(\gamma)|\gamma\in C\}$，即 $\mathrm{dist}(\gamma_0,A)=\varphi(\gamma_0)=\mathrm{dist}(C,A)$）.

设 A 亦为紧致的，则因 $\{\gamma_0(\in C)\}\subseteq X$ 是闭子集，故存在 $\alpha_0\in A$，使 $\mathrm{dist}(\gamma_0,A)=\mathrm{dist}(\gamma_0,\alpha_0)=d(\gamma_0,\alpha_0)$. 所以，$d(\gamma_0,\alpha_0)=\mathrm{dist}(\gamma_0,A)=\mathrm{dist}(C,A)$，其中 $\gamma_0\in C,\alpha_0\in A$. □

定理 3 设 C 是凸集，点 $\pi\overline{\in}\overline{C}$. 则存在 π 和 C 的分隔面.

证 在 C 中取定点 σ，则闭球 B：$|\xi-\pi|\leqslant|\pi-\sigma|\equiv r$ 是紧致的. 因 $\overline{C}$ 为闭集，故 $\overline{B}\cap\overline{C}$ 是紧致集①. 所以，据定理 2，存在 $\rho\in\overline{B}\cap\overline{C}$，使 $|\pi-\rho|=\mathrm{dist}(\pi,\overline{B}\cap\overline{C})=\mathrm{dist}(\pi,\overline{C})$. 我们证明，$\rho$ 是唯一的. 实则，若有二个不同的 ρ_1,ρ_2，使 $|\pi-\rho_1|=|\pi-\rho_2|=\mathrm{dist}(\pi,\overline{C})$，则三角形 $\pi\rho_1\rho_2$ 是等腰三角形. 故 π 同线段 $\rho_1\rho_2$ 的中点的距离$<|\pi-\rho_1|=\mathrm{dist}(\pi,\overline{C})$. 因 $\overline{C}$ 是凸集，故该中点属于 $\overline{C}$，得矛盾.

设 $f(\xi)\equiv u_1x_1+\cdots+u_nx_n=u_0$ 为线段 $\pi\rho$ 的垂直平分面，则值 $f(\pi)-u_0$ 和值 $f(\rho)-u_0$ 有相异的正负号.

当然，我们可以假设 $f(\pi)-u_0<0,f(\rho)-u_0>0$. 现只需证明超平面 $f(\xi)=u_0$ 不含 $\overline{C}$ 的点. 设 $\omega\in\overline{C}$，且 $f(\omega)=u_0$. 则 $|\omega-\pi|>|\rho-\pi|$. 故 ω 不是线段 $\pi\rho$ 的中点. 从而，三角形 $\rho\omega\pi$ 是非退化的等腰三角形，且 $\omega\rho=\omega\pi>|\rho\pi|$. 于是，三角形 $\rho\omega\pi$ 的三个内角均小于 90°. 故 π 到 $\omega\rho$ 的垂线交在 $\omega\rho$ 的内点 τ. 因 $\omega,\rho\in\overline{C}$，故 $\tau\in\overline{C}$. 但 $|\pi\tau|<|\pi\rho|$，故得矛盾. 从而，$f(\xi)=u_0$ 不含 $\overline{C}$ 的点. 因 $f(\rho)>u_0,f(\pi)<u_0$，故 $f(\eta)>u_0,\forall\ \eta\in\overline{C}$（若否，有 $\eta\in\overline{C}$，使 $f(\eta)<u_0$. 令 $F(\xi)=u_1x_1+\cdots+u_nx_n-u_0$.

---

① 请见参考书[1]

设 $\xi=(1-t)\rho+t\eta$，其中 $0\leqslant t\leqslant 1$，则

$$F[(1-t)\rho+t\eta]=(1-t)(u_1r_1+\cdots+u_nr_n)+t(u_1y_1+\cdots+u_ny_n)-u_0$$

是 t 的连续函数，此处 $(r_1,\cdots,r_n)=\rho$，$(y_1,\cdots,y_n)=\eta$，而 $t\in[0,1]$. 当 $t=0$ 时，$F(\rho)=f(\rho)-u_0>0$；当 $t=1$ 时，$F(\eta)\leqslant 0$. 故存在 $t_0\in(0,1)$，使 $F[(1-t_0)\rho+t_0\eta]=0$. 即超平面 $f(\xi)=u_0$ 含有 $\overline{C}$ 的点，矛盾). 从而，$f(\xi)=u_0$ 是 π 和 C 的分隔面. □

下面的定理 4 同定理 3 类似，但更为深刻.

定理 4 设 C 是凸集，点 $\pi\in\partial\overline{C}$（$\partial\overline{C}$ 表示集 $\overline{C}$ 的边界①），则 C 有一个支撑面，其通过 π.

证 因 $\pi\in\partial\overline{C}$，故 π 的任一邻域含有不属于 $\overline{C}$ 的点. 从而，可得序列 $\{\eta_m\}$，$m=1,2,\cdots$，$\eta_m\overline{\in}\overline{C}$，使 $\lim\limits_{m\to\infty}\eta_m=\pi$. 依定理 3，对每一 η_m 存在超平面序列 $f_m(\xi)=u_{m0}$，其分隔 η_m 和 C. 设

$$f_m(\xi)\equiv u_{1m}x_1+\cdots+u_{nm}x_n$$

其中 $u_{1m}^2+\cdots+u_{nm}^2=1$.

于是，$f_m(\eta)>u_{m0}$，$\forall\ \eta\in\overline{C}$. 因 $(u_{1m},\cdots,u_{nm})$ 属于单位球面，故其有子序列 $\{(u_{1m_j},\cdots,u_{nm_j})\}$，$j=1,2,\cdots$，收敛于点 $(u_1,\cdots,u_n)$，此处有 $u_1^2+\cdots+u_n^2=1$. 故有

$$\lim_{j\to\infty}f_{m_j}(\xi)=f(\xi)\equiv u_1x_1+\cdots+u_nx_n$$

令 $f(\pi)=u_0$. 因

$$f_{m_j}(\pi)>u_{m_j0}（因\ \pi\in\partial\overline{C}，故\ \pi\in\overline{C}）$$

$$f_{m_j}(\eta_{m_j})<u_{m_j0}$$

故

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}f_{m_j}(\pi)\geqslant\overline{\lim_{j\to\infty}}u_{m_j0}$$

---

① 请见参考书[1]

$$\underline{\lim_{j\to\infty}} f_{m_j}(\eta_{m_j}) \leqslant \underline{\lim_{j\to\infty}} u_{m_j 0};$$

但 $\lim\limits_{j\to\infty}\eta_{m_j}=\pi$，

故

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty} f_{m_j}(\eta_{m_j}) &= \lim_{j\to\infty}(u_{1m_j}x_{1m_j}+\cdots+u_{nm_j}x_{nm_j})\\ &= u_1p_1+\cdots+u_np_n=f(\pi)=u_0\end{aligned}$$

其中$(x_{1m_j},\cdots,x_{nm_j})=\eta_{m_j}$，$(p_1,\cdots,p_n)=\pi$

因此

$$u_0\leqslant \underline{\lim_{j\to\infty}} u_{m_j0}\leqslant \overline{\lim_{j\to\infty}} u_{m_j0}\leqslant u_0$$

所以

$$\lim_{j\to\infty} u_{m_j0}=u_0$$

又，对$\forall\ \eta\in\overline{C}$，有 $f_{m_j}(\eta)>u_{m_j0}$，故当 $j\to\infty$时，$f(\eta)\geqslant u_0$. 因此，超平面 $f(\xi)=u_0$ 是过点π 的 C 的支撑面. □

引理 3 设 C 是凸锥，点 $\pi\in\partial\overline{C}$. 则存在 C 的支撑面，其通过点π 和原点.

证 若π为原点，则据定理 4 命题成立. 若 $\pi\neq(0,\cdots,0)$. 设 $f(\xi)=u_0$ 是过π 的支撑面，则 $f(\pi)=u_0$. 又，对任何 $b>0$，有 $b\pi\in\overline{C}$（为什么?）. 故 $f(b\pi)=bf(\pi)\geqslant u_0$，$\forall\ b>0$. 即 $bu_0\geqslant u_0$，$\forall\ b>0$. 从而，$u_0=0$. 所以，支撑面 $f(\xi)=0$ 过π 及原点. □

定理 5 设 S 是任一非空向量集合，则向量集

$$T=\{\eta\,|\,(\xi,\eta)\geqslant 0,\forall\ \xi\in S\}$$

是闭凸锥. 此处，(ξ,η)表示二向量 ξ,η 的内积，有时亦将其记为 $\xi\cdot\eta$.

证 任给 $\eta_1,\eta_2\in T$，则对任何 $a,b\geqslant 0$，有

$$(\xi,a\eta_1+b\eta_2)=a(\xi,\eta_1)+b(\xi,\eta_2)\geqslant 0\quad\forall\ \xi\in S$$

故 T 是凸锥.

又，若

$$\lim_{m\to\infty}\eta_m=\eta,\text{且}(\xi,\eta_m)\geqslant 0,\forall\ \xi\in S,$$

则

$$(\xi,\eta)\geqslant 0,\forall\ \xi\in S$$

故 T 是闭凸锥. □

定义 7 设 C 是闭凸锥. 我们称闭凸锥 $C^*=\{\eta|(\xi,\eta)\geqslant 0,\forall\ \xi\in C\}$ 为 C 的对偶集.

定理 6 设 C 是闭凸锥，C^* 是其对偶集，则

$$(C^*)^*=C$$

证 据对偶集的定义，有

$$C^*=\{\eta|(\xi,\eta)\geqslant 0,\forall\ \xi\in C\}$$

$$(C^*)^*=\{\zeta|(\eta,\zeta)\geqslant 0,\forall\ \eta\in C^*\}$$

但内积是对称的，故若 $\xi\in C$，则有 $(\eta,\xi)\geqslant 0,\forall\ \eta\in C^*$. 所以，$\xi\in(C^*)^*$. 即 $C\subseteq(C^*)^*$. 反之，设 $\zeta\in(C^*)^*$，而 $\zeta\,\overline{\in}\,\overline{C}=C$. 由定理 3，存在 ζ 和 C 的分隔面 $f(\xi)=u_0$，使 $f(\zeta)<u_0$，而 $f(\xi)>u_0,\forall\ \xi\in C$. 因原点 $\theta=(0,\cdots,0)\in C$，故 $0=f(\theta)>u_0$. 即 u_0 是负数. 设 $f(\xi)=u_1x_1+\cdots+u_nx_n$，我们有 $v=(u_1,\cdots,u_n)\in C^*$. 但 $(v,\zeta)<u_0<0$，故 $\zeta\,\overline{\in}\,(C^*)^*$，得矛盾. 所以，有 $(C^*)^*\subseteq C$. 故 $C=(C^*)^*$. □

1.2 线性不等式

现在我们来叙述线性不等式的理论. 本书采用以下约定：设 $\xi=(x_1,\cdots,x_m)\in E_m,\theta=(0,\cdots,0)\in E_m$. 若 $x_i\geqslant 0,i=1,\cdots,m$，则我们记 $\xi\geqslant\theta$；若 $x_i>0,i=1,\cdots,m$，则记 $\xi>\theta$；若 $\xi\geqslant\theta$，但 $\xi\neq\theta$，则记 $\xi\gg\theta$.

给定二个向量 $\xi,\eta\in E_m$，则以 $\xi-\eta$ 同 θ 的上述关系式来分别定义关系式 $\xi\geqslant\eta,\xi>\eta$ 和 $\xi\gg\eta$.

设给定 $m\times n$ 阶矩阵 $A=(a_{ij}), i=1,\cdots,m; j=1,\cdots,n$. 则向量集

$$C=\{\xi A\mid\xi\geqslant\theta\}$$

是凸锥,其中 $\xi=(x_1,\cdots,x_m)$. C 由 A 的 m 个行向量完全决定. 实则,以 $\rho_1,\cdots,\rho_m$ 表示 A 的 m 个行向量,则

$$\xi A=x_1\rho_1+\cdots+x_m\rho_m$$

我们以 ω^t 表示行向量 $\omega=(w_1,\cdots,w_n)$的转置列向量,则

$$A\omega^t\geqslant\theta^t \text{ 当且仅当}(\rho_i,\omega)\geqslant 0, i=1,\cdots,m$$

由于内积满足分配律,故若 $\omega=(w_1,\cdots,w_n)$使 $A\omega^t\geqslant\theta^t$,则有$(\eta,\omega)\geqslant 0, \forall\ \eta\in C$. 因而,$\omega\in C^*$. 反之,若 $\omega\in C^*$,则$(\eta,\omega)\geqslant 0, \forall\ \eta\in C$. 故$(\rho_i,\omega)\geqslant 0, i=1,\cdots,m$. 因而,$A\omega^t\geqslant\theta^t$. 所以,集$\{\omega\mid A\omega^t\geqslant\theta^t, \omega=(w_1,\cdots,w_n)\}=C^*$.

下面我们要证明 $C=\{\xi A\mid\xi\geqslant\theta\}$是闭凸锥. 为此,我们给出

定义 若 $\nu_1,\cdots,\nu_k$ 是线性独立的,则称凸锥

$$\{p_1\nu_1+\cdots+p_k\nu_k\mid p_j\geqslant 0, j=1,\cdots,k\}$$

为由 $\nu_1,\cdots,\nu_k$ 生成的基本凸锥.

引理 设 $C=\{x_1\rho_1+\cdots+x_m\rho_m\mid x_i\geqslant 0, i=1,\cdots,m\}\neq\{\theta\}$. 且设 $C_1,\cdots,C_q$ 是$\{\rho_1,\cdots,\rho_m\}$中一切线性独立组所生成的全部基本凸锥. 则

$$C=C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_q$$

证 设 $\beta\in C$,则 $\beta=x_1^0\rho_1+\cdots+x_m^0\rho_m, x_i^0\geqslant 0, i=1,\cdots,m$. 若 $\rho_1,\cdots,\rho_m$ 线性独立,则 $\beta\in C_1\cup\cdots\cup C_q$. 若 $\rho_1,\cdots,\rho_m$ 不是线性独立的,则有两种情况:

(i)若 $\beta=\theta$,则 $\beta\in C_1\cup\cdots\cup C_q$;

(ii)若 $\beta\neq\theta$,则不失一般性,可设 $x_1^0\rho_1+\cdots+x_k^0\rho_k=\beta$,其中 $k\leqslant m, x_1^0,\cdots,x_k^0>0$,且 $\rho_1,\cdots\rho_k$ 均不等于 θ. 若 $\rho_1,\cdots,\rho_k$ 线

性独立，则 $\beta\in C_1\cup\cdots\cup C_q$；若 $\rho_1,\cdots,\rho_k$ 线性相关，则存在数 $z_1,\cdots,z_k$，其中至少有一个为正的，使

$$z_1\rho_1+\cdots+z_k\rho_k=\theta$$

设 $l=\min\{x_j^0/z_j\,|\,z_j>0,j\in\{1,\cdots,k\}\}$，

则

$$\beta=(x_1^0-lz_1)\rho_1+\cdots+(x_k^0-lz_k)\rho_k,$$

其中 $x_h^0-lz_h\geqslant 0,h=1,\cdots,k$，且至少有一个 t，使

$$x_t^0-lz_t=0$$

于是，$\beta=(x_{m_1}^0-lz_{m_1})\rho_{m_1}+\cdots+(x_{m_s}^0-lz_{m_s})\rho_{m_s}$，其中 $s<k$，$\{\rho_{m_1},\cdots,\rho_{m_s}\}\subsetneqq\{\rho_1,\cdots,\rho_k\}$，$x_{m_a}^0-lz_{m_a}>0,a=1,\cdots,s$. 依此下去，经有限步知 $\beta\in C_1\cup\cdots\cup C_q$. 故 $C\subseteq C_1\cup\cdots\cup C_q$. 易见，$C_1\cup\cdots\cup C_q\subseteq C$，所以，$C=C_1\cup\cdots\cup C_q$. □

现在来证明：$C=\{x_1\rho_1+\cdots+x_m\rho_m\,|\,x_i\geqslant 0,i=1,\cdots,m\}$ 是闭集.

因 $C=C_1\cup\cdots\cup C_q$，其中 C_j 为基本凸锥，$j=1,\cdots,q$，故仅须证明，每一 C_j 为闭集即可.

为简便起见，设 C_j 由无关向量组 $\{\rho_1,\cdots,\rho_j\}$ 生成，即 $C_j=\{y_1\rho_1+\cdots+y_j\rho_j\,|\,y_s\geqslant 0,s=1,\cdots,j\}$.

设 $\{\beta_n\}\subseteq C_j$，且 $\beta_n\to\alpha$，当 $n\to\infty$ 时，我们证明 $\alpha\in C_j$.

证 设 $\mu=(u_1,\cdots,u_j)$，$|\mu|=1$，则函数

$$F(\mu)=\Big|\sum_{s=1}^{j}u_s\rho_s\Big|$$

在 $|\mu|=1$ 上连续. 实则

$$|F(\mu)-F(\mu')|=\Big|\,\Big|\sum_s u_s\rho_s\Big|-\Big|\sum_s u'_s\rho_s\Big|\,\Big|\leqslant\Big|\sum_s u_s\rho_s-\sum_s u'_s\rho_s\Big|=\Big|\sum_s(u_s-u'_s)\rho_s\Big|\leqslant\sum_s|u_s-u'_s|\,|\rho_s|$$

又因 $|\mu|=1$ 是有界闭集，故 $F(\mu)$ 在其上取到最小值，即存在

$\mu_0, |\mu_0|=1$，使 $F(\mu)\geqslant F(\mu_0)>0$. 亦即

$$|\sum_s u_s\rho_s|\geqslant F(\mu_0)>0, \forall\ \mu\in\{\mu\,|\,|\mu|=1\} \qquad (*)$$

令

$$\beta_n=\sum_{s=1}^{j}x_{ns}\rho_s, \beta_{n'}=\sum_{s=1}^{j}x_{n's}\rho_s$$

其中 $x_{ns}>0, x_{n's}>0, \forall\ s=1,2,\cdots,j$，

且置

$$r_{nn'}=[\sum_s(x_{ns}-x_{n's})^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$v_s=\frac{x_{ns}-x_{n's}}{r_{nn'}}$$

则

$$\sum_s v_s^2=1$$

故由式(*)有

$$|\sum_s v_s\rho_s|\geqslant F(\mu_0)>0$$

即

$$|\sum_s(x_{ns}-x_{n's})\rho_s|\geqslant F(\mu_0)r_{nn'}$$

因 $\beta_n\to\alpha$，当 $n\to\infty$ 时，故

$$|\beta_n-\beta_{n'}|\to 0, \text{当 } n,n'\to\infty \text{ 时}.$$

但

$$|\beta_n-\beta_{n'}|=|\sum_s(x_{ns}-x_{n's})\rho_s|\geqslant F(\mu_0)r_{nn'}$$

故

$$r_{nn'}\to 0, \text{当 } n\to\infty, n'\to\infty \text{ 时}$$

因而，对一切 $s=1,\cdots,j$，有

$$x_{ns}-x_{n's}\to 0, \text{当 } n,n'\to\infty \text{ 时}$$