数学物理方程

（第2版）

王明新 编著

清华大学出版社

数学物理方程

（第2版）

王明新 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书首先系统地介绍数学模型的导出和各类定解问题的解题方法，然后再讨论三类典型方程的基本理论. 这种处理方式，便于教师授课时选讲和自学者选读. 书中内容深入浅出，方法多样，文字通俗易懂，并配有大量难易兼顾的例题与习题.

本书可作为数学和应用数学、信息与计算科学、物理、力学专业的本科生以及工科相关专业的研究生的教材和教学参考书，也可作为非数学专业本科生的教材(不讲或选讲第 6 章)和教学参考书. 另外，也可供数学工作者、物理工作者和工程技术人员作为参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程/王明新编著. —2 版. —北京：清华大学出版社，2009. 10

ISBN 978-7-302-20618-7

Ⅰ. 数…　Ⅱ. 王…　Ⅲ. 数学物理方程-高等学校-教材　Ⅳ. O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 119114 号

责任编辑：佟丽霞
责任校对：刘玉霞
责任印制：杨　艳
出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京四季青印刷厂
装 订 者：三河市金元印装有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：185×230　**印　张**：11.75　**字　数**：231 千字
版　次：2009 年 10 月第 2 版　**印　次**：2009 年 10 月第 1 次印刷
印　数：1～4000
定　价：20.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103　　产品编号：028943-01

第二版前言

经过几年的教学实践和体会, 作者认为有必要对本书的部分内容进行调整和改写. 又因为 2007 年年底出版的教学辅导书《数学物理方程学习指导与习题解答》（王明新, 王晓光编著）一书中, 包含了第一版的所有习题的解答. 这给教师在教学过程中布置作业带来了困难. 鉴于此, 经与出版社协商, 决定对本书进行修订. 这一版与第一版比较, 有以下方面的改动:

除个别作为重要结论和公式的习题外, 更换了几乎所有的习题.

第 1 章基本没有改动, 只是修改了个别词语和第一版中的印刷错误.

第 2 章的改动较大. 因为分离变量法和特征展开法实质上是一回事, 读者在该课程的先修课程“微积分”和“常微分方程”中已经掌握了幂级数展开和幂级数解法. 因此, 特征展开法和分离变量法相比较, 在理论上前者更系统、直观, 容易接受, 在计算方面前者更简单、直接. 又因为特征展开法和分离变量法都是求解有界区域上的定解问题的基本方法, 所以在第二版中, 分别系统介绍了特征展开法和分离变量法, 并把特征展开法放在了前面, 更加强调和突出了此方法. 又考虑到篇幅和课时的因素, 在特征展开法一节只介绍双曲型方程和抛物型方程, 在分离变量法一节只介绍 Laplace 方程. 为了让读者也能够掌握用分离变量法求解双曲型方程和抛物型方程的初边值问题的方法, 本章安排了几个这方面的习题.

因为特征展开法的基础是特征值问题的基本理论和结果, 所以在这一版中, 加强了特征值的内容. 又因为在特征展开法中将直接用到常微分方程的常数变易公式, 而不再利用偏微分方程的齐次化原理（Duhamel 原理), 并且常微分方程的常数变易公式与偏微分方程的齐次化原理的叙述和证明完全相同. 所以在预备知识部分, 把常微分方程的常数变易公式用齐次化原理的形式表述并证明, 把偏微分方程的齐次化原理留做了习题.

对第 3 章中的部分内容重新进行了整合. 同时在 Fourier 变换部分, 增加了 Fourier 变换的两个性质和利用 Fourier 变换求解位势方程和积分方程的例子. 在 Lapalce 变换部分, 增加了利用 Laplace 变换求解微分积分方程的例子.

在第 4 章中, 改写和简化了球面平均法和降维法.

在第 5 章中, 虽然静电源像法是求解对称区域上的 Green 函数的基本方法, 并且在三维情形有明显的物理背景和物理直观, 但是静电源像法的理论基础是对称原理, 并且利用静电源像法求解 Green 函数的步骤比较复杂. 因此, 在求解三维球域上的 Green 函数时, 我们利用静电源像法, 让读者有一个直观的认识. 在求解其他对称区域上的 Green 函

数时, 利用对称原理. 在这一章中, 还改写了 Green 函数的性质并给出了证明, 增加了求解 Green 函数的两个例子 (四分之一平面和半球域).

在第 6 章中, 删去了双曲型方程的“弱间断线与广义解”一节.

在第二版的编写过程中, 李慧玲博士、陈文彦博士、陈玉娟博士、石佩虎博士和作者的几位研究生王鲁欣、魏云峰、杜玲珑等同学认真检查了书稿, 提出了许多宝贵的修改建议. 使用第一版作为教材的部分教师, 也对第一版提出了一些有益的修改建议, 在此一并致谢. 由于作者学识所限, 错误和不足之处在所难免, 还望读者予以批评指正.

作　者

2009 年 7 月

第一版前言

数学物理方程是指自然科学和工程技术的各门分支中出现的偏微分方程, 这些方程给出了所考察的物理量关于自变量 (时间变量和空间变量) 的偏导数的关系. 例如连续介质力学、电磁学、量子力学等方面的基本方程都属于数学物理方程的范畴.

目前高校理工科均开设 "数学物理方程", 或 "偏微分方程" 课程. 但是, 两者的侧重点有所不同, 前者侧重于模型的建立和定解问题的解题方法, 而后者则侧重于其自身的数学理论.

由于偏微分方程所研究的数学问题多样而复杂, 本身不能自我封闭, 还没有一整套完整的理论, 所以不断地促进着许多相关联的数学分支的发展 (如泛函分析, 复变函数, 微分几何, 计算数学等), 并从中引进解决问题的方法.

本书主要介绍三类典型方程 (双曲型方程、椭圆型方程、抛物型方程) 的导出 (偏微分方程模型的建立)、定解问题的解法以及三类典型方程的基本理论. 鉴于部分高校在本科阶段不开设 "泛函分析" 课程, 有的院校把 "数学物理方程" 安排在 "实变函数" 之前, 而工科类专业也不开设 "实变函数", 同时考虑到授课时数的限制 (48, 54 或 64 课时), 因此本书没有涉及非线性偏微分方程的内容, 并避开了广义函数. 这样, 只要有较好的微积分基础就可以阅读和学习本教材. 一学期 48 个学时 (不包括习题课时间) 基本可以讲授完本教材. 书中选学内容以 $*$ 号标记. 对于非数学专业的学生, 可以不讲第 6 章. 书中配有大量难易兼顾的例题与习题供教师选择, 授课时不必讲授全部例题, 可留一部分作为习题课的补充让学生自己完成.

全书共分 6 章. 第 1 章从实际物理问题出发, 具体介绍了建立偏微分方程模型的基本方法 —— 微元法和变分原理, 以及如何根据物理背景确定定解条件. 最后给出了二阶方程的分类与化简.

第 2 章至第 5 章主要讨论三类典型方程的定解问题的解题方法, 详细介绍了分离变量法、积分变换法、特征线法 (行波法)、球面平均法、降维法和 Green 函数方法.

第 6 章介绍了三类典型方程的基本理论 —— 极值原理和能量估计, 并由此给出了解的惟一性和稳定性的相关结论. 对于非数学专业的学生, 这部分内容可以不讲或选讲.

本书的部分内容参考了国内出版的一些教材, 见本书所附的参考文献. 同时, 在编写讲义和成书的过程中, 得到了许多同志的帮助与支持. 管平教授、林支桂教授、许志奋同志都讲授过本书的讲义, 并提出了许多宝贵的修改建议. 李慧玲同学帮助我打印了部分书

稿, 作者的其他几位研究生帮助验算了部分例题和习题. 在此一并致谢. 由于作者学识所限, 错误和不足之处在所难免, 还望读者予以批评指正.

作　者

2005 年 3 月

目　录

第 1 章　典型方程的导出、定解问题及二阶方程的分类与化简

随着科学技术的进步和计算手段的提高,用数学方法研究自然科学和工程技术中的具体问题的领域越来越广. 用数学方法研究实际问题的第一步就是建立关于所考察的对象的数学模型,从数量上刻画各物理量之间的关系. 有时候所建立的数学模型是一个含有未知函数的偏导数的方程,即偏微分方程,也就是这门课程所讨论的数学物理方程.

本章首先从几个物理模型出发,利用两大物理定律 —— 守恒律和变分原理,以及两种数学基本方法 —— 微元法和 Fubini 交换积分次序定理,导出三类典型方程,并根据各种不同的物理和几何性质,确定相应的定解条件. 最后介绍二阶方程的分类与化简.

作为预备知识,我们先做几个记号上的推广并叙述本书中多处用到的分析学中的三个基本结论.

微积分中,通常把直线上的点记为 x,把平面上的点记为 (x,y),把空间(三维)中的点记为 (x,y,z). 利用数学语言,通常把直线记为 $\mathbb{R}^1$ 或者 $\mathbb{R}$,把平面记为 $\mathbb{R}^2$,把空间(三维)记为 $\mathbb{R}^3$. 实际上还有维数更高的空间,例如四维时–空空间. 为了书写方便,我们有时又把平面上的点记为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$,把空间中的点记为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$.

作为推广,对于正整数 n,我们用 $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间,把 $\mathbb{R}^n$ 中的点记为 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 Ω,用 $\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界.

连通的开集称为**区域**.

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集,k 是非负整数,或者 $k=\infty$. 分别用 $C^k(\Omega)$ 和 $C^k(\overline{\Omega})$ 表示在 Ω 内和 $\overline{\Omega}$ 上 k 次连续可微的函数构成的空间(集合),这里 $\overline{\Omega}$ 表示 Ω 的闭包. 当 $k=0$ 时,通常记 $C^0(\Omega)=C(\Omega)$, $C^0(\overline{\Omega})=C(\overline{\Omega})$. 设 $u\in C(\Omega)$. 集合 $\{\boldsymbol{x}\in\Omega: u(\boldsymbol{x})\neq 0\}$ 的闭包称为 u 的**支集**,记为 $\operatorname{supp}u$. 如果 $\operatorname{supp}u$ 是 Ω 内的紧集(有界闭集),则称 u 具有**紧支集**,记为 $u\in C_c(\Omega)$ 或 $u\in C_0(\Omega)$. 记 $C_0^k(\Omega)=C^k(\overline{\Omega})\bigcap C_0(\Omega)$,或者说 $C_0^k(\Omega)$ 是在 Ω 内 k 次连续可微且有紧支集的函数的全体.

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 Ω,用 $\displaystyle\int_\Omega f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 表示函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上的 n 重积分

$$\underbrace{\int\cdots\int}_{n} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n,$$

用 $\int_{\partial\Omega} g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S$ 表示函数 $g(\boldsymbol{x})$ 沿封闭曲面 $\partial\Omega$ 的外侧的第二型曲面积分 $\oint_{\partial\Omega} g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S$. 当 $n=1,2,3$ 时, 我们在微积分中已经熟悉了这些记号和意义. 当 $n>3$ 时, 它们是 $n=1,2,3$ 的情形的推广.

命题 1.0.1 设开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, f 在 Ω 内连续. 如果对于任意的子集 $\Omega'\subset\Omega$, 都有

$$\int_{\Omega'} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0,$$

则在 Ω 上 $f\equiv 0$.

命题 1.0.2 设开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, f 在 Ω 内连续. 如果对于任意的 $v\in C_0^\infty(\Omega)$, 都有

$$\int_{\Omega} f(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0,$$

那么在 Ω 上 $f\equiv 0$.

命题 1.0.3 (Stokes公式, 也称散度定理或分部积分公式) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有界光滑区域, 那么对属于 C^1 的 n 维向量值函数 $\boldsymbol{v}$, 下面的积分等式成立:

$$\int_{\Omega}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\Omega}\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S, \tag{1.0.1}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量, $\mathrm{d}S$ 是 $\partial\Omega$ 上的面积元素. 当 $n=1,2,3$ 时, 公式 (1.0.1) 就分别是牛顿–莱布尼茨 (Newton-Leibniz) 公式, 格林 (Green) 公式和奥–高 (Ostrogradski-Gauss) 公式.

1.1 典型方程的导出

本节的内容实际上就是物理定律的数量形式 (数学表述). 这里所用到的两大物理定律是守恒律 (质量守恒, 能量守恒, 动量守恒) 和变分原理 (最小势能原理). 所用到的数学方法是微元法和 Fubini 交换积分次序定理.

1.1.1 守恒律

利用守恒律推导微分方程的基本方法如下:

守恒律 + Stokes 公式 + Fubini 交换积分次序定理 $\Longrightarrow$ 偏微分方程.

1. 弦振动方程

模型 一根拉紧的柔软细弦, 假定在外力的作用下, 弦在平面上作微小横振动 —— 振动方向与弦的平衡位置垂直.

问题 研究弦的振动规律.

建立坐标系 以弦的平衡位置为 x 轴, 在弦作振动的平面上取与 x 轴垂直的方向为 u 轴, 弦的一端为原点, 弦长为 l.

分析 (1) 细: 横截面的直径 $d \ll l$ (表示 d 远远小于 l), 运动状态在同一横截面上处处相同, 即弦可以看成无粗细的线;

(2) 拉紧: 指的是弦线在弹性范围内, 因此 Hooke 定律成立, 张力与弦线的相对伸长成正比;

(3) 柔软: 弦在每一点处, 该点两端的部分之间有相互作用力. 这个力的分量一般来讲有切向力和法向力. 柔软是指没有抗弯曲的张力, 张力只是沿切线方向;

(4) 横振动: 只有沿 u 方向的位移 u;

(5) 微小位移: 弦的位置只作了微小变化, 即 $|u_x| \ll 1$ (符号 $\ll 1$ 表示适当小或充分小, 下同).

我们将利用动量守恒来导出 u 的变化规律. 任取一小段弦 $[a,b]$ 以及小时段 $[t_1,t_2]$, 在 $[a,b]\times[t_1,\, t_2]$ 上研究弦的变化情况, 见图 1.1. 这时的动量守恒律可以写成:

$$\boxed{t=t_2\text{时的动量}} - \boxed{t=t_1\text{时的动量}} = \boxed{[a,b]\times[t_1,t_2]\text{内的冲量}}\,.$$

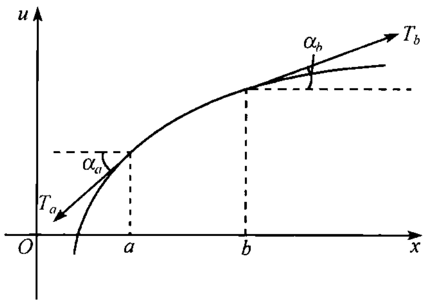

图 1.1

用 ρ 表示单位长度的质量 (密度), f_0 表示在 u 的正方向、单位长度上的外力密度, T 表示张力. 一般而言, $\rho=\rho(x,t)$, $T=T(x,t)$.

在 t 时刻, 位移为 u, 弦长 $s=\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+u_x^2}\mathrm{d}x \approx b-a$, 即弦并未伸长, 所以 ρ 与 t 无关. 在 $[a,b]$ 上, 由 Hooke 定律知, $T_t - T_{t_0} = k \times$ 弦长的伸长量 ≈ 0, 所以 T 与 t 无关.

沿水平方向, 由于弦没有位移, 所以速度为零. 从而动量为零, 冲量也为零. 由此知, 弦线在水平方向未受外力作用, 即 (见图 1.1)

$$T_b \cos\alpha_b = T_a \cos\alpha_a.$$

又因为

$$\cos\alpha_a = \left.\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}\right|_{x=a} \approx 1, \quad \cos\alpha_b = \left.\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}\right|_{x=b} \approx 1,$$

所以 $T_a = T_b$, 即 $T(x,t) \equiv T_0$ 与 x,t 无关.

沿垂直方向, 有

$$\boxed{\begin{array}{c}t=t_2\\ \text{时的动量}\end{array}}-\boxed{\begin{array}{c}t=t_1\\ \text{时的动量}\end{array}}=\boxed{\begin{array}{c}\text{外力在 }[a,b]\times[t_1,t_2]\\ \text{内产生的冲量}\end{array}}+\boxed{\begin{array}{c}\text{张力在垂直方}\\ \text{向产生的冲量}\end{array}},$$

即

$$\int_a^b \rho u_t|_{t=t_2}\mathrm{d}x-\int_a^b \rho u_t|_{t=t_1}\mathrm{d}x=\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b f_0\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}(T_b\sin\alpha_b-T_a\sin\alpha_a)\,\mathrm{d}t.$$

利用

$$\sin\alpha_a=\left.\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right|_{x=a}\approx u_x|_{x=a},\quad \sin\alpha_b=\left.\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right|_{x=b}\approx u_x|_{x=b},$$

可得

$$\int_a^b \rho\,[u_t(x,t_2)-u_t(x,t_1)]\,\mathrm{d}x=\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b f_0\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}T_0[u_x(b,t)-u_x(a,t)]\mathrm{d}t.$$

如果 u_{tt},u_{xx} 连续, 上式又可写成

$$\int_a^b\int_{t_1}^{t_2}\rho u_{tt}\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b f_0\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b T_0u_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

根据 Fubini 交换积分次序定理以及 a, b, t_1, t_2 的任意性得

$$\rho u_{tt}=T_0u_{xx}+f_0.$$

如果弦是均匀的, 则 ρ 为常数, 上式可改写成

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),\tag{1.1.1}$$

其中 $a=\sqrt{T_0/\rho}>0$, $f=f_0/\rho$. 不论弦上的初始状态和弦在两端的位置如何, 弦的振动规律都满足上述方程 (1.1.1). 方程 (1.1.1) 称为**一维弦振动方程**.

在平面上放置一个框架, 对于固定在该框架上作横振动的薄膜, 用类似的方法可导出膜的振动方程为

$$u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=f(x,y,t),\quad (x,y)\in\Omega\subset\mathbb{R}^2,\quad a>0,$$

通常称之为**二维波动方程**. n 维薄膜的横振动方程是

$$u_{tt}-a^2\Delta u=f(\boldsymbol{x},t),\quad \boldsymbol{x}\in\Omega\subset\mathbb{R}^n,\quad a>0,$$

通常称之为 **n 维波动方程**, 其中

$$\Delta u=u_{x_1x_1}+\cdots+u_{x_nx_n},\quad \boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n).$$

如果薄膜处于平衡状态, 那么位移与 t 无关, 所以 $u(\boldsymbol{x},t)=u(\boldsymbol{x})$, 方程变成

$$-a^2\Delta u=f(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\Omega\subset\mathbb{R}^n.$$

此方程称为 **Poisson 方程或位势方程**, 当 $f\equiv 0$ 时, 亦称为 **Laplace 方程或调和方程**.

注 1.1.1 通常说的弦和膜都有一个共同特点，就是充分柔软、只抗伸长、不抗弯曲. 也就是当它们变形时，反抗弯曲所产生的力矩可以忽略不计. 如果研究的对象没有这种特点，力学上就把它们改称为梁和板. 梁和板的振动方程及平衡方程与弦和膜的不同，一般来说会出现未知函数的四阶微商.

2. 热传导方程

模型 各向同性的物体; 内部有热源，与周围介质有热交换，求物体内部的温度分布.

物理规律 (1) 能量守恒: 在物体 Ω 内任取一部分 $V \subset \Omega$, 取任意时段 $[t_1, t_2]$, 则有（参见图 1.2）

$$\boxed{\begin{array}{l}[t_1,t_2]\text{时段内}\\ V\text{中增加的热量}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}[t_1,t_2]\text{时段内通过}\\ \text{边界 }\partial V\text{流入的热量}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{l}[t_1,t_2]\text{时段内由内}\\ \text{部热源产生的热量}\end{array}}.$$

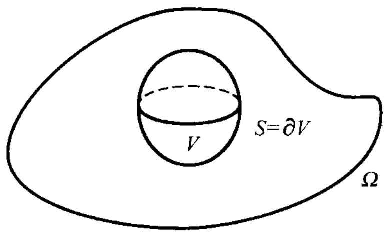

图 1.2

(2) Fourier 热力学定律: 热流密度 $\boldsymbol{q} = -k\nabla u$, 即热流量的大小与温度的梯度成正比，两者方向相反. 这里的 u 表示温度, $\boldsymbol{q}$ 表示热流密度, k 是热传导系数.

用 ρ 表示物体的密度, c 表示比热, f_0 表示热源强度. 我们假设物体的密度不随时间而变化. 因为物体是各向同性的，所以 $c(x,y,z,t) = c$ 为常数.

在 $[t_1, t_2]$ 时段内 V 中温度升高增加的热量为

$$Q = \int_V c\rho\,(u|_{t=t_2} - u|_{t=t_1})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_V \left(\int_{t_1}^{t_2} u_t \mathrm{d}t\right) c\rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

通过边界 $\partial V = S$ 流入 V 的热量是

$$Q_1 = -\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_S \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_S k\nabla u\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}t,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是边界 S 上的单位外法向量; 内部热源产生的热量为

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_V \rho f_0 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}t.$$

假设 u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz} 连续, 那么利用 Stokes 公式便推出

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_V \nabla \cdot (k\nabla u) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}t.$$

因此, 前面的能量守恒关系用数学公式表达出来就是

$$\int_V \left(\int_{t_1}^{t_2} u_t \,\mathrm{d}t \right) c\rho \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_V \nabla \cdot (k\nabla u) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_V \rho f_0 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}t.$$

利用 Fubini 交换积分次序定理以及 V 和 t_1, t_2 的任意性, 最后得到

$$c\rho u_t - \nabla \cdot (k\nabla u) = \rho f_0.$$

上式称为**三维热传导方程**. 如果物体是均匀的, 则 c, ρ 和 k 都是常数, 上式又可以写成

$$u_t - a^2 \Delta u = f(x, y, z, t),$$

其中 $a^2 = k/(c\rho) > 0$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$, $f = f_0/c$.

3. 流体力学基本方程组

考察理想流体 (忽略粘性), 即每个面上的应力都沿法线方向, 与面的方向无关.

物理量 密度 $\rho = \rho(x, y, z, t)$, 流速 $\boldsymbol{v}(x, y, z, t) = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$.

在所考察的区域 Ω 内任取一部分 V, 任取一时段 $[t_1, t_2]$.

(1) 质量守恒和流体的连续性方程

$$\boxed{\begin{array}{c} t = t_2\text{时} \\ V\text{的质量} \end{array}} - \boxed{\begin{array}{c} t = t_1\text{时} \\ V\text{的质量} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} [t_1, t_2]\text{内通过边界} \\ S = \partial V\text{流入的质量} \end{array}} + \boxed{\begin{array}{c} [t_1, t_2]\text{内由内部} \\ \text{源产生的质量} \end{array}}.$$

我们仅考虑内部无源的情形, 因此上式最后一项为零. 此时, 质量守恒的数学表述是

$$\int_V \rho|_{t=t_2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \int_V \rho|_{t=t_1} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_S \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S \right) \mathrm{d}t.$$

假设所讨论的函数都是连续可微的, 则有

$$\int_V \rho|_{t=t_2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \int_V \rho|_{t=t_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_V \left(\int_{t_1}^{t_2} \rho_t \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_S \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \right) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_V \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}t \quad (\text{Stokes公式}).$$

再利用 Fubini 交换积分次序定理以及 V 和 t_1, t_2 的任意性, 有

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0. \tag{1.1.2}$$

上式称为**流体的连续性方程**.

(2) 动量守恒与理想流体的运动方程组

$$\boxed{\begin{array}{c}[t_1,t_2]\text{时段}V\text{内}\\ \text{流体动量的增量}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}[t_1,t_2]\text{时段通过 }V\text{ 的边界}\\ S\text{流入的质量产生的动量}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}[t_1,t_2]\text{时段由外}\\ \text{力产生的冲量}\end{array}}.$$

外力有两个：一个是重力 $\boldsymbol{f}$, 另一个是周围流体对它产生的法向应力：$\boldsymbol{p}_n=-p\boldsymbol{n}$, 其中 p 为压力. 利用"动量 = 质量 × 速度", 可得动量守恒律的数学表述为

$$\begin{aligned}&\int_V(\rho\boldsymbol{v}\mid_{t=t_2}-\rho\boldsymbol{v}\mid_{t=t_1})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ =&-\int_S\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{v}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}t\mathrm{d}S+\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_V\boldsymbol{f}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_S(-p\boldsymbol{n})\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{1.1.3}$$

其中, $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}t$ 表示长度, $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}t\mathrm{d}S$ 表示体积, $\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}t\mathrm{d}S$ 表示质量. 如果所讨论的函数都是连续可微的, 则成立

$$\int_V(\rho\boldsymbol{v}\mid_{t=t_2}-\rho\boldsymbol{v}\mid_{t=t_1})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_V\left(\int_{t_1}^{t_2}(\rho\boldsymbol{v})_t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\tag{1.1.4}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_S(-p\boldsymbol{n})\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}t=-\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_V\nabla p\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}t\quad(\text{Stokes公式}).\tag{1.1.5}$$

把 $\boldsymbol{v}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ 写成分量的形式：$\boldsymbol{v}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=(u\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n},\ v\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n},\ w\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})$, 并利用

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(u\rho\boldsymbol{v})&=(\rho uu)_x+(\rho uv)_y+(\rho uw)_z\\&=\rho uu_x+\rho vu_y+\rho wu_z+u(\rho u)_x+u(\rho v)_y+u(\rho w)_z\\&=\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)u+u\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

及 Stokes 公式, 我们有

$$\int_S u\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_V\nabla\cdot(u\rho\boldsymbol{v})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_V[\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)u+u\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\tag{1.1.6}$$

同理可得

$$\int_S v\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_V[\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)v+v\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\tag{1.1.7}$$

$$\int_S w\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_V[\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)w+w\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\tag{1.1.8}$$

把 (1.1.4) 式～(1.1.8) 式代入 (1.1.3) 式得

$$\int_V\left(\int_{t_1}^{t_2}(\rho\boldsymbol{v})_t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_V[\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}t$$