

高等数学

GAODENG SHUXUE

学习指导

XUEXI ZHIDAO

张建华 曹菊生 王茂南 • 主编



苏州大学出版社

高等数学学习指导

张建华 曹菊生 王茂南 主编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/张建华,曹菊生,王茂南主编.
苏州:苏州大学出版社,2009.8
ISBN 978-7-81137-295-3

I. 高… II. ①张…②曹…③王… III. 高等数学-高等学校-教学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 150700 号

高等数学学习指导

张建华 曹菊生 王茂南 主编

责任编辑 谢金海

苏州大学出版社出版发行

(地址:苏州市干将东路 200 号 邮编:215021)

宜兴文化印刷厂印装

(地址:宜兴市南漕镇 邮编:214217)

开本 787×960 1/16 印张 21.75 字数 422 千

2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-81137-295-3 定价:26.00 元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话:0512-67258835
苏州大学出版社网址 <http://www.sudapress.com>

前 言

本书是与同济大学应用数学系编写的《高等数学(第六版)》相配套的辅导教材. 为了帮助读者在数学概念、计算技能和数学思维等方面得到充分的训练, 培养学生的空间想象能力、逻辑思维能力和科学表达能力, 我们根据多年的教学经验, 在对“工科类本科数学基础课程教学基本要求”和课程内容进行深入研究和理解的基础上编写了本书, 希望能为学习高等数学的读者提供辅导和帮助. 本书可供本科、专科、高职等全日制大学、电视大学、职工大学等的学生使用, 对考研复习也有较好的参考作用, 还可供高校教师作教学参考.

本书共十二章, 每章分为“主要内容和基本要求”、“典型例题解析”、“同步练习及解答”三个部分. “主要内容和基本要求”部分列出知识结构、教学基本要求, 并详细总结了主要内容——基本概念、重要定理和公式; “典型例题解析”部分精选了各类典型例题, 给出了详尽的解答, 许多题目还给出了多种解法, 并注意比较分析, 总结解析方法和技巧; “同步练习及解答”部分配置了一定量的同步练习题, 并给出了简明的解答. 另外, 按照通常的教学安排, 分第一章至第三章、第四章至第七章、第八章至第十章、第十一章和第十二章四个阶段各配置了两套阶段测试卷, 按上册、下册各配置了四套期末测验卷, 并提供了解答可供学生在期中、期末考试前复习测试之用.

本书第一、二、三、十二章由曹菊生编写, 第四、五、六、七章由王茂南编写, 第八、九、十、十一章由张建华编写, 参与同步练习与测试卷编写的有夏明汉、刘维龙、杨志荣、薛国民、费文滔、庄桂芬、方正、严洁、于水猛、王成敏、张筛艳、金锡嘉、秦云、张世唯、俞瑞娣等. 全书由张建华、曹菊生负责统稿.

本书由马恒新教授主审, 并提出许多宝贵意见, 本书编写过程中得到编者所在单位江南大学理学院的大力支持和帮助, 在此一并表示衷心感谢.

由于编者水平所限, 加之时间仓促, 书中缺陷和错误在所难免, 诚请广大专家、同仁和读者批评指正.

编 者

2009 年 9 月

目 录

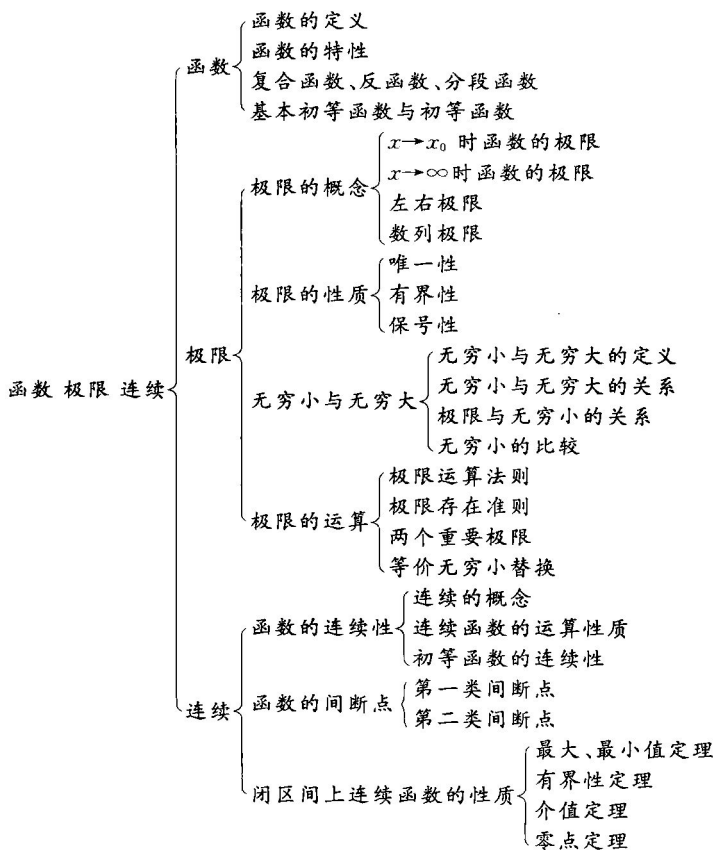
第一章 函数与极限	(1)
主要内容与基本要求	(1)
典型例题解析	(8)
同步练习	(23)
第二章 导数与微分	(27)
主要内容与基本要求	(27)
典型例题解析	(31)
同步练习	(48)
第三章 微分中值定理与导数的应用	(51)
主要内容与基本要求	(51)
典型例题解析	(56)
同步练习	(76)
阶段一测试卷	(80)
第四章 不定积分	(84)
主要内容与基本要求	(84)
典型例题解析	(88)
同步练习	(102)
第五章 定积分	(105)
主要内容与基本要求	(105)
典型例题解析	(109)
同步练习	(119)
第六章 定积分的应用	(123)
主要内容与基本要求	(123)
典型例题解析	(126)
同步练习	(134)

第七章 微分方程	(137)
主要内容与基本要求	(137)
典型例题解析	(141)
同步练习	(154)
阶段二测试卷	(157)
第八章 空间解析几何与向量代数	(161)
主要内容与基本要求	(161)
典型例题解析	(167)
同步练习	(174)
第九章 多元函数微分法及其应用	(177)
主要内容与基本要求	(177)
典型例题解析	(185)
同步练习	(199)
第十章 重 积 分	(203)
主要内容与基本要求	(203)
典型例题解析	(209)
同步练习	(217)
阶段三测试卷	(221)
第十一章 曲线积分与曲面积分	(225)
主要内容与基本要求	(225)
典型例题解析	(233)
同步练习	(246)
第十二章 无穷级数	(251)
主要内容与基本要求	(251)
典型例题解析	(259)
同步练习	(277)
阶段四测试卷	(282)
高等数学(上)测试卷	(286)
高等数学(下)测试卷	(294)
参考答案	(302)

第一章 函数与极限

主要内容与基本要求

一、知识结构



二、基本要求

(1) 在中学已有函数知识的基础上,加深对函数概念的理解和函数性质(奇偶性、单调性、周期性和有界性)的了解.

(2) 理解复合函数的概念,了解反函数的概念.

(3) 会建立简单实际问题中的函数关系式.

(4) 理解极限的概念,了解极限的 ϵ - N , ϵ - δ 定义.

(5) 掌握极限的有理运算法则,会用变量代换求某些简单复合函数的极限.

(6) 了解极限的性质(唯一性、有界性、保号性)和两个存在准则(夹逼准则与单调有界收敛准则),会用两个重要极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 求极限.

(7) 了解无穷小、无穷大、高阶无穷小和等价无穷小的概念,会用等价无穷小求极限.

(8) 理解函数在一点连续和在一区间上连续的概念.

(9) 了解函数间断点的概念,会判别间断点的类型.

(10) 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的介值定理与最大值、最小值定理.

三、内容提要

1. 映射的概念

设 X, Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 f ,使得对 $\forall x \in X$,按法则 f ,在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的映射,记为

$$f: X \rightarrow Y, y = f(x), x \in X,$$

其中 X 称为映射 f 的定义域,记为 D_f ,即 $D_f = X$; X 中所有元素的像组成的集合称为映射 f 的值域,记为 R_f ,即 $R_f = f(X) = \{y: y = f(x), x \in X\}$.

注 对每个 $x \in X$,元素 x 的像 y 是唯一的;而对每个 $y \in R_f$, y 的原像不一定唯一;映射 f 的值域 R_f 是 Y 的子集,即 $R_f \subset Y$.

2. 函数的概念

设数集 $D \subset \mathbf{R}$,则称映射 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数,记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为函数 f 的定义域,函数值全体 $R_f = f(D)$ 称为 f 的值域.

注 ① 确定函数的两个要素:定义域和对应法则.

② 两个函数相同的条件:定义域相同,且对应法则相同.

3. 函数的特性

(1) 有界性:设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subset D$. 如果存在正数 M , 使得 $|f(x)| \leq M$ 对任一 $x \in X$ 都成立, 那么称函数 $f(x)$ 在 X 内有界; 如果这样的 M 不存在, 那么称函数 $f(x)$ 在 X 内无界.

注 ① 正数 M 不是唯一的. 例如, 函数 $f(x) = \sin x$ 对任一 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都有 $|\sin x| \leq 1$, 也有 $|\sin x| < 2$, 故 $\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界. 这里可取 $M=1$, 也可取 $M=2$. 由于 M 不是唯一的, 所以定义中的 $|f(x)| \leq M$ 也可以换成 $|f(x)| < M$.

② 函数 $f(x)$ 是否有界与讨论的区间有关. 例如, 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上有界, 但在 $(0, +\infty)$ 内无界.

(2) 单调性:设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 与 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), 那么称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加(减少)的.

(3) 奇偶性:设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任一 $x \in D$ 都有 $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$), 那么称 $f(x)$ 为偶(奇)函数.

(4) 周期性:设函数 $f(x)$ 的定义域为 D . 如果存在一个正数 l , 使得对于任一 $x \in D$ 都有 $(x \pm l) \in D$ 且 $f(x+l) = f(x)$ 恒成立, 那么称 $f(x)$ 为周期函数, l 称为 $f(x)$ 的周期. 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

注 不是任何周期函数都有最小正周期. 例如 $f(x) = c$ (c 为常数), 任意正数都是它的周期, 但由于没有最小正数, 因此周期函数 $f(x) = c$ 没有最小正周期.

4. 反函数与复合函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 $f(D)$. 对于任一 $y \in f(D)$, 在 D 上必有唯一的数值 x 与 y 对应, 这个数值 x 适合关系 $f(x) = y$, 这时 x 也是 y 的函数, 称为 $y = f(x)$ 的反函数, 记做 $x = f^{-1}(y)$. 若 $y = f(x)$ 是单值单调增加(减少)的, 则 $x = f^{-1}(y)$ 也是单值单调增加(减少)的, 且有 $f^{-1}[f(x)] = x$.

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1 , 函数 $u = g(x)$ 在 D 上有定义, 且 $g(D) \subset D_1$, 则称函数 $y = f[g(x)]$ 为由函数 $u = g(x)$ 和函数 $y = f(u)$ 构成的复合函数, 它的定义域为 D , 变量 u 称为中间变量.

5. 基本初等函数与初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为基本初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合所构成并可用一个式子表示的函数称为初等函数.

注 ① 不能说“凡分段函数都不是初等函数”. 例如:

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

是一个分段函数,但它可用一个式子 $y = \sqrt{x^2}$ 表示,它是由 $y = \sqrt{u}$ 和 $u = x^2$ 复合而成的.

② 双曲正弦函数 $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$

双曲余弦函数 $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$

双曲正切函数 $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$

反双曲正弦函数 $y = \operatorname{arcs} h x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1});$

反双曲余弦函数 $y = \operatorname{arc} c h x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1});$

反双曲正切函数 $y = \operatorname{arc} t h x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$

6. 极限的概念

(1) 数列极限.

若 $\forall \epsilon > 0, \exists$ 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \epsilon$ 成立, 则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 或 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

注 ① ϵ 是任意给定的正数, 它的作用是用来刻画变量 x_n 与常数 a 的接近程度. 首先 ϵ 是任意的, 只有这样, 不等式 $|x_n - a| < \epsilon$ 才能刻画变量 x_n 无限接近常数 a ; 其次 ϵ 是给定的, 一经给定就相对固定下来了, 就可以找到 N , 否则验证工作无法进行.

② N 是正整数, 它的作用是用来刻画当 x_n 与 a 接近到某种程度时数列的项数 n 应大到什么程度, N 是随着 ϵ 的给定而确定的. 一般地, ϵ 越小, N 就越大, 但 N 不是唯一的. 若 N 能满足定义, 则大于 N 的正整数都能满足定义.

③ 当 $n > N$ 时 $|x_n - a| < \epsilon$ 都成立, 是指第 N 项后面所有项 x_n 都有 $|x_n - a| < \epsilon$, 即 n 充分大时, $|x_n - a|$ 任意小, 并保持任意小.

(2) $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限.

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 <$

$|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-A|<\epsilon$ 成立, 则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\rightarrow x_0$ 时的极限, 记为 $\lim_{x\rightarrow x_0} f(x)=A$ 或 $f(x)\rightarrow A(x\rightarrow x_0)$.

定义中, 若把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0-\delta<x<x_0$, 就是左极限 $\lim_{x\rightarrow x_0^-} f(x)=A$ 的定义; 若改为 $x_0<x<x_0+\delta$, 就是右极限 $\lim_{x\rightarrow x_0^+} f(x)=A$ 的定义.

注 ① 任意给定的正数 ϵ 的作用是用来刻画变量 $f(x)$ 与常数 A 的接近程度. 由于 ϵ 具有任意性, 所以 $|f(x)-A|<\epsilon$ 能刻画变量 $f(x)$ 无限接近于 A ; 由于 ϵ 具有给定性, 所以就可以找到 δ .

② δ 是正数, 它的作用是用来刻画 x 与 x_0 的接近程度, 定义中的 δ 是否存在, 说明函数 $f(x)$ 是否以 A 为极限. 若 δ 存在, 则 δ 与 ϵ 和 x_0 有关, 当 x_0 给定后, δ 依赖于 ϵ . 并且 δ 不是唯一的, 若 δ 满足定义, 则小于 δ 的正数都能满足定义.

③ 定义中 $|x-x_0|>0$ 即为 $x\neq x_0$, 它说明函数 $f(x)$ 当 $x\rightarrow x_0$ 时的极限与 $f(x)$ 在 x_0 点处的定义无关.

(3) $x\rightarrow\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限.

设函数 $f(x)$ 在 $|x|$ 大于某一正数时有定义, 若 $\forall \epsilon>0, \exists X>0$, 当 $|x|>X$ 时, 有 $|f(x)-A|<\epsilon$ 成立, 则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\rightarrow\infty$ 时的极限, 记为

$$\lim_{x\rightarrow\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\rightarrow A(x\rightarrow\infty).$$

定义中, 若把 $|x|>X$ 改为 $x>X$, 就是极限 $\lim_{x\rightarrow+\infty} f(x)=A$ 的定义; 若改为 $x<-X$, 就是极限 $\lim_{x\rightarrow-\infty} f(x)=A$ 的定义.

(4) 极限存在的充要条件:

$$\begin{aligned}\lim_{x\rightarrow x_0} f(x)=A &\Leftrightarrow \lim_{x\rightarrow x_0^-} f(x)=\lim_{x\rightarrow x_0^+} f(x)=A; \\ \lim_{x\rightarrow\infty} f(x)=A &\Leftrightarrow \lim_{x\rightarrow-\infty} f(x)=\lim_{x\rightarrow+\infty} f(x)=A.\end{aligned}$$

7. 极限的性质

(1) 极限的唯一性: 若数列或函数的极限存在, 则极限值一定唯一.

(2) 收敛数列的有界性: 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则数列 $\{x_n\}$ 一定有界; 反之, 结论不真.

(3) 函数极限的局部保号性: 如果 $\lim_{x\rightarrow x_0} f(x)=A$, 且 $A>0$ (或 $A<0$), 则存在点 x_0 某一去心邻域 $\dot{U}(x_0)$, 当 $x\in\dot{U}(x_0)$ 时, 有 $f(x)>0$ (或 $f(x)<0$). 特别地, 当 $A\neq 0$ 时, 存在点 x_0 某一去心邻域 $\dot{U}(x_0)$, 当 $x\in\dot{U}(x_0)$ 时, 有 $|f(x)|>\frac{|A|}{2}$.

(4) 保不等式性:如果在点 x_0 的某一去心邻域内, $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

8. 无穷小与无穷大

如果函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限为零, 那么称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小.

如果当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时 $|f(x)|$ 无限增大, 那么称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大.

在自变量的同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 反之, 如果 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

9. 无穷小的比较

(1) 设 α, β 是同一极限过程中的两个无穷小, 且 $\alpha \neq 0$,

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小, 记做 $\beta = o(\alpha)$;

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α 低阶的无穷小;

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 则称 β 与 α 是同阶无穷小, 这里若 $c = 1$, 则称 β 与 α 是等价无穷小, 记做 $\alpha \sim \beta$;

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0 (k > 0)$, 则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

(2) 等价无穷小的性质: 若 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

(3) 常用的等价无穷小: 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有

$$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n},$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a (a > 1, a \neq 1).$$

10. 极限的运算法则

(1) 有限个无穷小的和是无穷小.

(2) 有界函数与无穷小的积是无穷小.

(3) 有限个无穷小的积是无穷小.

(4) 若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则

① $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$;

$$\textcircled{2} \lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B;$$

$$\textcircled{3} \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0).$$

(5) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, 且在点 x_0 的某去心邻域内 $g(x) \neq u_0$. 若 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A.$$

把 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$ 换成 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, 同时把 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$ 换成 $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = A$, 可得与上述类似的结论.

11. 极限存在准则

(1) 单调有界原理: 单调有界数列必有极限.

(2) 夹逼准则: 若 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. 特别地, 若 $y_n \leq x_n \leq z_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

12. 两个重要极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ (或 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e).$$

13. 函数连续的概念

(1) 连续的定义.

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$), 那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 左(右)连续.

$f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在点 x_0 既是左连续的又是右连续的.

(2) 间断点的定义.

若函数具有下列三种情形之一: ①在 $x = x_0$ 没有定义; ②虽然 $f(x_0)$ 有定义, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在; ③虽然 $f(x_0)$ 有定义且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

(3) 间断点的分类.

若 $f(x)$ 在间断点 x_0 处 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 均存在, 则称 x_0 为第一类间断点.

特别地, 当 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 时, 称 x_0 为可去间断点; 当 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 时, 称 x_0 为跳跃间断点. 不是第一类间断点的间断点都称为第二类间断点.

14. 连续函数的性质

(1) 若 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续, 则 $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x_0) \neq 0$) 都在 $x=x_0$ 处连续.

(2) 若函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调且连续, 那么其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在对应区间 $I_y=\{y|y=f(x), x \in I_x\}$ 上也单调且连续.

(3) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, 函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$$

或

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)] = f(u_0).$$

(4) 若 $y=f(u)$ 在点 u_0 连续, $u=g(x)$ 在点 x_0 处连续, 且 $g(x_0)=u_0$, 则 $f[g(x)]$ 在点 x_0 连续.

(5) 初等函数的连续性: 基本初等函数在其定义域上是连续的, 初等函数在其定义区间(包含在定义域内的区间)上是连续的.

15. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最值定理: 闭区间上的连续函数一定有最大值和最小值.

(2) 介值定理: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, c 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何一个值($f(a) \neq f(b)$), 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi)=c$.

(3) 零点定理: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 即 $f(a)f(b) < 0$, 则在 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使 $f(\xi)=0$.

典型例题解析

一、函数的概念与特性

【例 1】 求下列函数的定义域:

(1) $y = \ln(x^2 - 1) + \arcsin \frac{1}{x+1}$;

(2) $y = f(\sin 2x)$, 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$;

(3) $f(x) = \sqrt{1-x}, g(x) = \sqrt{x-1}$, 求复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域.

解 (1) 要使 y 有意义, 必须
$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ x + 1 \neq 0, \\ \left| \frac{1}{x+1} \right| \leq 1, \end{cases}$$

由 $x^2 - 1 > 0$, 得 $x < -1$ 或 $x > 1$; 由 $\left| \frac{1}{x+1} \right| \leq 1$, 得 $x \leq -2$ 或 $x \geq 0$, 故定义域为 $(-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$.

(2) 由条件得 $0 \leq \sin 2x \leq 1$, 所以

$$2n\pi \leq 2x \leq (2n+1)\pi, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

故所求定义域为 $\left[n\pi, \frac{2n+1}{2}\pi \right], n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

(3) $f[g(x)] = \sqrt{1 - \sqrt{x-1}}$, 定义域满足

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{x-1} \geq 0, \\ x-1 \geq 0, \end{cases}$$

即

$$1 \leq x \leq 2.$$

【例 2】求函数 $y = \frac{1 - \sqrt{1+4x}}{1 + \sqrt{1+4x}}$ 的反函数.

解 令 $t = \sqrt{1+4x}$, 则 $y = \frac{1-t}{1+t}$, 得 $t = \frac{1-y}{1+y}$, 故

$$\sqrt{1+4x} = \frac{1-y}{1+y},$$

于是

$$x = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1-y}{1+y} \right)^2 - 1 \right] = -\frac{y}{(1+y)^2}.$$

由此可得反函数为 $y = -\frac{x}{(1+x)^2}$.

【例 3】求下列复合函数:

(1) 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & -\infty < x < 0, \\ 2^x, & 0 \leq x < +\infty, \end{cases}$ 求 $f(x-1)$;

(2) 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ x+2, & x > 0, \end{cases} f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $g[f(x)]$.

解 (1) 令 $x-1=u$, 则有

$$\begin{aligned} f(x-1) &= f(u) = \begin{cases} 1+u, & -\infty < u < 0, \\ 2^u, & 0 \leq u < +\infty \end{cases} = \begin{cases} x, & -\infty < x-1 < 0, \\ 2^{x-1}, & 0 \leq x-1 < +\infty \end{cases} \\ &= \begin{cases} x, & -\infty < x < 1, \\ 2^{x-1}, & 1 \leq x < +\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 令 } y=g(u)=\begin{cases} 2-u, & u\leq 0, \\ u+2, & u>0, \end{cases} \quad u=f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0, \\ -x, & x\geq 0, \end{cases}$$

当 $x<0$ 时, $u=x^2>0$, 则

$$g(u)=u+2=x^2+2;$$

当 $x\geq 0$ 时, $u=-x\leq 0$, 则

$$g(u)=2-u=2-(-x)=2+x.$$

故

$$g[g(x)]=\begin{cases} x^2+2, & x<0, \\ x+2, & x\geq 0. \end{cases}$$

注 要求两个分段函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的复合函数 $y=f[\varphi(x)]$, 实际上就是将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$. 而这里关键是要搞清 $u=\varphi(x)$ 的函数值 $\varphi(x)$ 落在 $y=f(u)$ 的定义域的哪一部分.

【例 4】 证明: 函数 $f(x)=\frac{x^2+1}{x^4+1}$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

$$\text{证 } |f(x)|=\frac{x^2+1}{x^4+1}\leq\frac{(x^2+1)^2}{x^4+1}=\frac{x^4+1+2x^2}{x^4+1}=1+\frac{2x^2}{x^4+1}\leq 1+1=2,$$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

【例 5】 判断下列函数的奇偶性:

$$(1) f(x)=\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}; \quad (2) f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1});$$

(3) 设 $f(0)=0$, 且 $x\neq 0$ 时 $f(x)$ 满足

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x} \quad (a, b, c \text{ 为常数}, |a|\neq|b|),$$

判断函数 $f(x)$ 的奇偶性.

解 (1) 因 $f(x)$ 的定义域为 $x\neq 1$ 的全体实数, 不关于原点对称, 故所给函数是非奇非偶函数.

$$\begin{aligned} (2) \text{ 因为 } f(x)+f(-x) &= \ln(x+\sqrt{x^2+1})+\ln[-x+\sqrt{(-x)^2+1}] \\ &= \ln[(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)] \\ &= \ln 1 = 0, \end{aligned}$$

所以 $f(-x)=-f(x)$, 从而所给函数是奇函数.

(3) 先求 $f(x)$. 当 $x\neq 0$ 时, 令 $x=\frac{1}{t}$, 得

$$af\left(\frac{1}{t}\right)+bf(t)=ct,$$

这等价于

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx.$$

把它与条件 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$ 联立, 消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$, 得

$$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right),$$

因此 $f(-x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left[\frac{a}{-x}-b(-x)\right]=-\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right)=-f(x)$.

又 $f(0)=0$, 故 $f(x)$ 为奇函数.

【例 6】 设 $f(x)$ 是定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 求证 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

证 设 x_1, x_2 为 $(-l, 0)$ 内的任意两点且 $x_1 < x_2$, 则 $-x_1, -x_2 \in (0, l)$, $-x_1 > -x_2$.

因为 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 所以 $f(-x_1) > f(-x_2)$. 又由题设 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 内是奇函数, 则有

$$f(-x_1) = -f(x_1), f(-x_2) = -f(x_2),$$

因而

$$-f(x_1) > -f(x_2).$$

即当 $x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) < f(x_2)$, 所以 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

二、用定义证明极限

【例 7】 (1) 用 ϵ - N 定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n-1} = \frac{3}{2}$;

(2) 用 ϵ - N 定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^3+2n} = 0$.

(1) **分析** 证明的关键是, $\forall \epsilon > 0$, 找出正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, $\left| \frac{3n-2}{2n-1} - \frac{3}{2} \right| < \epsilon$ 成立.

证 $\forall \epsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{3n-2}{2n-1} - \frac{3}{2} \right| < \epsilon$, 因为

$$\left| \frac{3n-2}{2n-1} - \frac{3}{2} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n-1} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}, \quad (*)$$

故只要 $\frac{1}{2n} < \epsilon$, 即只要 $n > \frac{1}{2\epsilon}$. 所以只要取 $N = \left[\frac{1}{2\epsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 就有 $\frac{1}{2n} < \epsilon$ 成立, 从而有 $\left| \frac{3n-2}{2n-1} - \frac{3}{2} \right| < \epsilon$ 成立.

这就证明了 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $N = \left[\frac{1}{2\epsilon} \right]$, 使得当 $n > N$, 恒有 $\left| \frac{3n-2}{2n-1} - \frac{3}{2} \right| < \epsilon$ 成立,