ISBN7—81025—253—4/O·13
定价:6.80元

目 录

第一章　函数与极限

1. 什么是数学归纳法？具体如何推理论证？

答：数学归纳法是数学中一种重要的论证方法．具体推理论证步骤为：

第一步：验明 $n=k_0$ 时某命题是正确的；

第二步：在假设 $n=k$，命题也是正确的前提下，设法推出 $n=k+1$ 时命题仍是正确的；

第三步：断定此命题对一切大于 k_0 的自然数成立．

2. 什么是数学中的反证法？具体如何做？

答：欲证明某一结论 A 是正确的，但不直接证明，而是先去证明 A 的反面（非 A）是错误的，从而断定 A 是正确的。这就是数学中的反证法．具体步骤为：

第一步：先把要证明的结论 A 否定（即假定结论 A 的反面——非 A 是正确的）；

第二步：根据第一步中的假设和其他已知条件，进行正确的推理，直到推得一个与已知的事实相矛盾的结果为止；

第三步：指出第一步中"假设 A 的反面正确"是错误的；

第四步：断言原来欲求证的结论 A 正确．

3. 什么是数学中的综合推理法？

答：为了要论证某个结论，先由已知条件出发推得甲理，又由甲理推得乙理⟶丙理⟶丁理……，直到推得所要求证的某个结论为止的推理证明方法就叫综合推理法．

4. 什么是数学中的分析推理法？

答：从需要证明的结论 A 开始，利用已学过的公理、定理、定义或准则去倒推理. 看要证明结论 A 的成立需要些什么条件. 要么条件已由已知条件给出，于是分析推理结束；要么需要证明另一命题 B 成立才能得出条件. 若命题 B 成立或经证明成立，于是分析推理结束.

5. 在证明一个结论时，往往需要分析推理与综合推理结合使用吗？

答：是的. 一般推理思维过程是：欲证明某结论成立，往往在先假设结论成立的基础上，运用分析推理，得到结论成立的条件是已知的或是有可靠依据的. 而真正证明过程是倒过来，从已知条件和可靠的依据出发，去推出结论的成立. 比如数列极限和函数极限的证明就是先用分析推理，然后使用综合推理予以证明.

6. 为什么说函数是高等数学中心概念之一？

答：函数是一个变量对另一个（或多个）变量的依赖关系的抽象模型. 它是贯穿高等数学始终的一个重要概念. 极限与连续性描述了在给定过程中函数变化趋势或性态，而微分与积分则从不同的方向去研究了函数的性态，提供了讨论函数图形几何性态的方法及由函数的一些属性确定函数关系式的方法. 总之，没有函数概念，也就没有了高等数学.

7. 试问，应该如何深入理解函数定义的实质？

答：一个函数 $f(x)$ 实质上表现了对"输入"的"原料"的一种特定的加工过程。因而只要这种加工过程确定（即已知 $f(x)$），则不论"输入"何种"原料"，就应根据原已确定的加工程序得出应有的结果. 例如已知：$f(x) = x^2 + 1$，则

$$f(x^2) = (x^2)^2 + 1 = x^4 + 1$$

$$f(\sin x) = (\sin x)^2 + 1$$

$$f(f(x)) = f^2(x) + 1 = (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$$

8. 决定函数关系的三要素是什么?

答:定义域,对应关系和值域.

9. 判断下列各对函数是否相同,为什么?

(1) $f(x) = \sqrt{x^2}$ 与 $g(x) = |x|$

答:相同. 定义域都是 $(-\infty, +\infty)$;当 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ 时:

$$f(x)|_{x=x_0} = \sqrt{x_0^2} = |x_0|, \quad g(x)|_{x=x_0} = |x_0|$$

故对应关系相同,又值域均为 $[0, +\infty)$.

(2) $f(x) = x/x$ 与 $g(x) = 1$

答:不相同. 因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$;而 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

(3) $f(x) = \sqrt{x^2}$ 与 $g(x) = x$

答:不相同. 因为 $f(x)$ 的值域 $[0, +\infty)$,而 $g(x)$ 的值域为 $(-\infty, +\infty)$.

(4) $f(x) = \ln x^2$ 与 $g(x) = 2\ln x$

答:不相同. 因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0)$ 与 $(0, +\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

(5) $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sin(\arcsin x)$

答:不相同。因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域是 $[-1, +1]$.

10. 能否不涉及函数的定义域或定义域中的某区间,而泛泛地说某函数是单调增加或单调减少?试举例说明.

答:不能. 因为函数的单调性是相对于函数的定义域或定义域中的某区间而言的. 例如,$y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上既不是单调增加,也不是单调减少,但它在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上却是

单调增加，在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上是单调减少的.

11. 能否不涉及函数的定义域或定义域中的某区间而泛泛地说函数是有界或无界？请举例说明.

答：不能. 因为函数的有界性是相对其定义域或定域中某区间而言的. 例如：$y=\frac{1}{x}$ 在定义域 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上是无界的，但却在不包括原点的闭区间 $[a,b]$ 上是有界的.

12. 在理解函数奇偶性中应注意什么问题？

应该注意，函数奇偶性的定义是相应于在某对称区间上有定义(例如 $[-l,l]$，$(-\infty,+\infty)$)的函数而言的. 即是说，对于一个仅定义在数轴上的 $[a,b]$ 区间 $(a\neq -b)$ 的函数是无奇偶性可言的.

13. 试简述函数的周期性和求周期函数周期的步骤.

答：函数的周期性定义为：若对函数 $y=f(x)$ 存在一个正数 T，使得

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数. 易见这里 T 是满足上述关系的最小正数. 判断一个函数是否是周期函数和求周期函数的步骤是：

第一，列出方程 $f(x+T)-f(x)=0$；

第二，解上方程求出 T；

第三，若 $T>0$ 且为满足方程的最小值时，则 $f(x)$ 为周期函数，而其周期就是 T. 若 $T\leqslant 0$ 时，函数的周期不存在；若 T 与 x 有关，则函数周期也不存在，即是说；所得出的 $T\leqslant 0$ 或 T 与 x 有关时，函数 $f(x)$ 不是周期函数.

14. 试问，函数是周期函数，是否一定有最小正周期？试举例说明.

答：不一定，例如函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数时} \\ 0, & x \text{ 为无理数时} \end{cases}$$

是周期函数，且任何正有理数都是它的周期，但它却没有最小正周期.

15. 对于函数 $f(x) \equiv C$（常数），下列说法哪些是正确的？

A. 定义域是 $(-\infty, +\infty)$；*B*. 定义域无界，是无界函数；*C*. 是周期函数，但无最小正周期；*D*. 是偶函数.

答：正确的是：*A*、*C*、*D*.

16. 试问下列各组函数中，能复合成复合函数的是哪些？

A. $y = \operatorname{arc\,tg} u$，　$u = x^2 + 1$

B. $y = \ln u$，　$u = 1 - v$，　$v = x^2$

C. $y = \ln u$，　$u = -1 + v$，　$v = -e^x$

答：能复合成复合函数的是 *A*、*B*.

17. 能否说函数 $y = x^2$ 的反函数是 $x = \pm\sqrt{y}$，为什么？又应该如何定义？

答：不能. 因给定一个 y 值，对应 x 的两个值 $\pm\sqrt{y}$，这违反了函数的定义。正确的定义是：$y = x^2, x \in [0, +\infty)$ 时，其反函数为 $x = \sqrt{y}$；$y = x^2, x \in (-\infty, 0]$ 时，其反函数为 $x = -\sqrt{y}$.

18. 为什么说极限概念是微积分的基础，是高等数学中的基本推理工具？

答：回顾高等数学的整个内容，可以发现极限概念自始至终贯穿于高等数学之中. 从连续性、导数、定积分、级数及多元函数偏导数、重积分、曲线积分与曲面积分等概念都可以看出，它们都是借助于极限概念得以抽象化、严密化的. 所以，可以毫不夸张地说，极限概念是微积分的基础，是高等数学中的

基本推理工具.没有极限概念,就没有高等数学的严密结构.

19. 试指出以下错误结论的错误所在:

设 $\{a_n\}$ 为一数列,有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot na_n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty} na_n$$

$$= 0\cdot\lim_{n\to\infty} na_n = 0$$

即任何数列 $\{a_n\}$ 的极限均为 0.

答:其错误在于还未知数列 $\{a_n\}$ 的极限存在与否的前提下,就肯定 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在,其实

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot na_n\right) \neq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}(na_n)$$

20. 指出以下错误结论的错误所在:

设 $\{a_n\}$ 为一常数列,那么 $a = \dfrac{\overbrace{a+\cdots+a}^{n}}{n}$,则

$$\lim_{n\to\infty} a = \lim_{n\to\infty}\frac{a+a+\cdots+a}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{n}+\frac{a}{n}+\cdots+\frac{a}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{a}{n} + \cdots + \lim_{n\to\infty}\frac{a}{n} = 0$$

即

$$\lim_{n\to\infty} a = 0$$

答:错在极限的运算次数不能无限多.以上做法中项数 n 随 n 的增大而无限增大.

21. 收敛数列 $\{x_n\}$ 的任何子数列 $\{x_{k_n}\}$ 也收敛于同一极限,那么发散数列 $\{y_n\}$ 的子数列也一定发散吗?试举例说明之.

答:不一定.如数列:0,1,0,1,…… 发散,而其子数列:0,0,0 …… 及 1,1,1,1…… 却是收敛的。又如数列:1,0,0,1,

0,0,1,0,0,1,…… 发散,而子数列:1,0,1,0,1,…… 也发散.

22. 收敛数列必有界,如果数列无界就能断定它发散吗?

答:能断定. 因为数列收敛的必要条件是有界,如果数列无界就一定发散

23. 若数列 $\{a_n+b_n\}$ 有极限,则数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 也分别有极限吗? 举例说明.

答:不一定. 如 $\{a_n\}=\{1,0,1,0,\cdots\}$;$\{b_n\}=\{0,1,0,1,\cdots\}$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n+b_n\}=1$,但 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 都不存在. 又如 $\{a_n\}=\{1,1,1,1,\cdots\}$;$\{b_n\}=\{0,0,0,0,\cdots\}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n+b_n\}=1$. 而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

24. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 而 $\{y_n\}$ 为任意数列,能否断定 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,试举例说明.

答:不一定. 如

$$\{x_n\}=\{\frac{1}{n}\},\{y_n\}=\{\frac{1}{n^2}\},\text{则 }\lim_{n\to\infty}x_ny_n=0$$

$$\{x_n\}=\{\frac{1}{n}\},\{y_n\}=\{n\},\text{则 }\lim_{n\to\infty}x_ny_n=1$$

$$\{x_n\}=\{\frac{1}{n}\},\{y_n\}=\{n^2\},\text{则 }\lim_{n\to\infty}x_ny_n=\infty$$

25. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,问能否得出:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$ 试举例说明.

答:不一定. 如 $\{x_n\}=\{\frac{1}{n}\}$,$\{y_n\}=\{\frac{1}{n^2}\}$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$ 而此时 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$. 又如 $\{x_n\}=\{a\}$,$\{y_n\}=\{\frac{1}{n}\}$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

26. 若数列 $\{x_n\}$ 的极限为 A,去掉前有限项余下的数列

还有没有极限？如果有，是否还是 A？删去无穷多个项，余下还有无穷多项，余下的数列还有没有极限？如果有，还是 A 吗？

答：数列 $\{x_n\}$ 的极限为 A，去掉前有限项，余下的数列仍有极限，且极限值仍为 A；去掉无穷多个项，余下还有无穷多项的数列实际就是原数列的一子数列，当然仍以 A 为极限.

27. 如果 $\{x_n\}$ 是一个无穷大量，显然 $\{x_n\}$ 是一个无界数列. 反之，如果 $\{x_n\}$ 是一个无界数列，它一定是无穷大量吗？举例说明.

答：$\{x_n\}$ 是一个无界数列，它不一定是无穷大量。例如：$1,0,3,0,5,0,\cdots\cdots,\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}n,\cdots\cdots$ 是一个无界数列，但显然不是无穷大量.

28. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是函数极限的两种基本类型，试说明它们各自的特点？

答：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 型是在 x_0 的附近小区间上研究自变量 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 的变化趋势. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 型则是在无限区间 $(-\infty,a)$ 或 $(a,+\infty)$ 或 $(-\infty,+\infty)$ 上研究自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限变大时，函数 $f(x)$ 的变化趋势.

29. 在证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 时能否限定 x 在区间 $-a+x_0<x<x_0+a$（a 为一确定正数）内，为什么？

答：可以. 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是在 x_0 的邻近研究函数 $f(x)$ 的变化趋势，所以与 x_0 的邻近区间大小无关，重要的是看 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 变化趋势.

30. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的定义是：任给 $\varepsilon>0$，存在正数 δ，当 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立. 为什么要

要求 $0<|x-x_0|<\delta$，换成 $|x-x_0|<\delta$ 行吗？

答：不行．这由于我们关心的是 $f(x)$ 在点 x_0 附近的变化趋势，而不是 $f(x)$ 在 x_0 这一孤立点上的情况。在定义极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 时，$f(x)$ 在 x_0 可以有定义，也可以没有定义．而且极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是否存在与 $f(x)$ 在 x_0 点有无定义没有丝毫关系。另外，极限过程 $x\to x_0$ 是个无限趋近的过程，x 是不能达到 x_0 的．所以，$0<|x-x_0|<\delta$ 不能改为 $|x-x_0|<\delta$．

31. 用极限定义证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，用的是何种方法，一般可分为那几个步骤？

答：用的是综合分析法，即倒推的方法．一般可分以下三步：(1)给定任意小的正数 ε；(2)解不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，设法得到不等式：$|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$；(3)由 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 得出 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$．

32. $x=4$ 不在函数 $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}$ 的定义域内，所以不能研究极限 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$，这种说法对吗？

答：不对．此函数在 $x=4$ 处没有定义，但在它的邻近却有定义．当 $x\to 4$ 时，x 并不取 4．所以 $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ 与函数 $f(x)$ 在 4 处的状态无关．关心的是 $x\to 4$ 时函数 $f(x)$ 的变化趋势．所以仍可讨论极限 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$．

33. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义，则在此点必有极限，对吗？

答：不一定．因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的状态无关．所以，虽然函数 $f(x)$ 在 x_0 点有定义，并不能保证在这点必有极限．

34. 以下判断中哪些是正确的：

A. 零是无穷小量；B. 无穷小量就是零；C. 无穷小量是一个绝对值很小的数；D. 当 $x \to x_0$ 时，$f(x) - A$ 是无穷小量，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

答：正确的是 A、D.

35. "无穷大量是一个很大很大的数量"，这种说法对吗？为什么？

答：不对. 无穷大量是一个变量，它不是一常量. 无穷大量与想像中很大很大的数有着本质的原则差别.

36. 指出以下结论中哪些是正确的：

A. 无穷大量的倒数是无穷小量；B. 无穷小量的倒数是无穷大量；C. 无界的量就是无穷大量.

答：正确的是 A. B 不一定正确，但若所考虑的是恒不为零的变量时，无穷小量的倒数就一定是无穷大量.

37. 研究无穷小量有何特殊的重要意义？

答：在有极限的变量中，极限值是零的变量叫做无穷小量，它有着特殊的意义. 在高等数学产生与发展的历史上，它起过特殊的作用. 这是由于无穷小量不仅只是一种特殊的有极限的变量，而且也可以用来表征一般的有极限的变量. 一般地有以下结论：

变量 α 以 A 为极限的充要条件是 $\alpha - A$ 为无穷小量.

38. 下列函数当 $x \to \infty$ 时均有极限. 试将每个函数表示为它的极限值与一无穷小量的和的形式？

(1) $y = \dfrac{x^3}{x^3 - 1}$；(2) $y = \dfrac{x^2}{2x^2 + 1}$；(3) $y = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

答：

(1) $y=\dfrac{x^3}{x^3-1}=1+\dfrac{1}{x^3-1}$;

(2) $y=\dfrac{x^2}{2x^2+1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4x^2+2}$;

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=-1+\dfrac{2}{1+x^2}$;

39. 应该如何深刻理解两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

答：对于上述两个重要极限，千万不要从表面上死记其形式，而要深刻理解其实质，灵活地加以运用.

对于重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

应着重理解：

(1)记住形式 $\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$ 而在符号"□"内可以不是变量 x 本身，但一定要保证出现"□"的三个地方是一致的. 当然，在"□→0"的位置上应从本质上认识，只要实质一样形式不同也可以. 例如，可以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x^3}=\lim_{x^3\to 0}\frac{\sin x^3}{x^3}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+x)}{x^2+x}=\lim_{(x^2+x)\to 0}\frac{\sin(x^2+x)}{x^2+x}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x/2^n}{x/2^n}=\lim_{x/2^n\to 0}\frac{\sin x/2^n}{x/2^n}=1 \text{ 等等}$$

(2)为了利用此重要极限，往往需要对函数式进行变形. 一种渠道是利用三角公式使分子(或分母)出现正弦函数. 另一种渠道是在出现正弦函数后，利用乘除因子，使之凑出正弦符号后的函数形式.

(3)一定要注意趋近方式是"$\square \to 0$",或与此等价的趋近方式.

(4)在利用此重要极限的场合,往往也是可用洛毕达法则求未定型极限的情形.

例如,求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{1-\cos x}$ 时,由于

原式=

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x)+\cos x\cos 2x(1-\cos 3x)}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{1+\cos x\cdot\frac{1-\cos 2x}{1-\cos x}+\cos x\cdot\cos 2x\cdot\frac{1-\cos 3x}{1-\cos x}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{1+\cos x\cdot 4\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{x}{2}}+\cos x\cdot\cos 2x\cdot 9\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\sin^2\frac{3x}{2}}{\left(\frac{3x}{2}\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{x}{2}}\right\}=1+4+9=14$$

对于重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

也应着重理解:

(1)记住形式

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}\ ,\ \lim_{\triangle\to 0}(1+\triangle)^{\frac{1}{\triangle}}=\mathrm{e}$$

而符号"$\square$"或"$\triangle$"内可以不是变量本身,但一定要保证"$\square$"或"$\triangle$"的地方的一致性. 如不一致,应变为一致后,才能应用此极限,否则不能应用.

(2)在具体变形中,对于括号内的形式可采取作代换的方式化成需要的规定格式,而指数上的形式则多借助于指数运

算来达到目的.

(3)也往往可采用洛毕达法则求极限.

例如,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2nx+x^2}{2n^2}\right)^{-n}$ 时,有

$$原式=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2nx+x^2}{2n^2}\right)^{\frac{2n^2(2nx+x^2)(-n)}{(2nx+x^2)2n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n^2}{2nx+x^2}}\right)^{\frac{2n^2}{2nx+x^2}}\right]^{\frac{(2nx+x^2)(-n)}{2n^2}}=e^{-x}$$

40. 常用求极限的方法有哪些?

答:求极限的方法很多,常用的方法有:

(1)利用自然数、等差级数、等比级数等求和公式求极限;

(2)利用部分分式法求和式极限;

(3)化成商式以求乘积的极限;

(4)利用适当的不等式求极限;

(5)利用各种平均值(算术平均值、几何平均值、调和平均值、加权算术平均值等)求极限;

(6)利用单调有界法则求数列极限;

(7)利用夹挤定理求极限;

(8)连续函数直接代入求极限;

(9)约简分式后求极限;

(10)直接利用结论:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\begin{cases}0, & m>n \text{ 时}\\ a_n/b_m, & m=n \text{ 时}\\ \infty, & m<n \text{ 时}\end{cases}$$

求有理分式函数在 $x\to\infty$ 时的极限(m ,n 为正整数);

(11)利用两个重要极限求极限；

(12)利用有界变量乘无穷小量的积为无穷小量的定理求极限；

(13)利用函数极限与数列极限的联系求极限；

(14)利用洛毕达法则求未定式极限；

(15)利用等价无穷小量求极限；

(16)利用泰勒展开式求极限；

(17)利用级数收敛的必要条件求极限；

(18)利用定积分求和式极限；

41. 利用洛毕达法则求未定式极限时应注意些什么问题？

答：洛毕达法则是求未定式极限的一种简便而有力的方法. 对于满足洛毕达法则条件的 $\frac{0}{0}$ 型、$\frac{\infty}{\infty}$ 型可直接应用法则；对于 $0 \cdot \infty$ 型、$\infty - \infty$ 型要想法先将其化成 $\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$ 型后再应用此法则；而对于 1^∞、0^0、∞^0 型则要先取对数使之成为 $0 \cdot \infty$ 型再化成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

在应用洛毕达法则时应该注意以下三点.

(1) 只有确属 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式时，才能直接应用法则，其他未定型必须先化成这两种型之一.

(2) 法则可连续使用，但应注意每应用一次后，一定要化简后检查是否仍属未定型，如已能定出极限而非未定型时，不能再继续使用法则.

(3) 利用洛毕达法则时，求导数是分子、分母分别求导数，而不是商的导数.

42. 以下函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的定义等价吗？

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$；$\lim\limits_{\triangle x \to 0} f(x_0 + \triangle x) = f(x_0)$；

$$\lim_{\triangle x \to 0} \triangle y = \lim_{\triangle x \to 0} f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = 0$$

答:等价.

43. 函数 $f(x)$ 在 x_0 点处有极限,则它在该点必连续吗?试举例说明.

答:不一定. 如函数 $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{2} = f(1)$, $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续. 但对于 $\varphi(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$, $\lim\limits_{x \to 4} \varphi(x) = 8$, 但 $\varphi(x)$ 在 4 处无定义,故 $\varphi(x)$ 在 $x = 4$ 处不连续.

44. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义,则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续吗? 试举例说明.

答:不一定. 如对于函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处有定义,但在此点却不连续.

45. 试简述函数连续性的具体判定方法?

答:由于已知初等函数在其定义区间内都是连续的,所以,判断函数连续性时多集中于分段函数问题上. 而这类问题基本上可以分成以下两种形式:

(1) 如果 $f(x)$ 在点 x_0 左右(两端)函数表达式相同,只是在 x_0 点处的值单独给定,欲判定其连续性,就需先判定 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限,再由连续性定义来作出结论.

(2) 如果 $f(x)$ 在点 x_0 左右函数表达式不同,则应先按左右极限定义判定 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限,而后再由连续性定义来判断其连续性.

46. 试研究