求積儀和貫線圖

何 祚 豐 編 著

大東書局出版

求積儀和貫線圖

何 祚 豐 編著
沈 傳 艮 校閱

大東書局出版

求積儀和貫線圖內容提要

本書分爲兩編：第一編爲求積儀，用淺易數學說明其原理、使用法中包括極心點放在圖內及圖外兩種方法及實例。最末敍述各種常見的求積儀；第二編爲貫線圖，介紹使用貫線圖及設計簡單貫線圖的一些方法，包括倒向尺度、投影尺度、多平行線的貫線圖、N 形圖及其變形等。

求積儀和貫線圖　　書號：5029

編著者	何祚豐
校閱者	沈傳良
出版者	大東書局 上海福州路 310 號
印刷者	肇文印刷廠 上海威海衛路 357 弄

25 開　28 印刷頁　36,000 字　定價 3,500 元

一九五四年三月初版

(0001—3000)

上海市書刊出版業營業許可證出 043 號

上海市書刊發行業營業許可證發 061 號

目　次

第一編　求積儀

第二編　貫線圖

第一編　求積儀

第一章　概　論

(1·1)引言

在各種測量面積的方法中，動作簡單，施用順手，工作迅速，有高度精確度，收效最大的就首推施用求積儀的方法．求積儀的主要功用在測量一塊圖形面積的大小，利用機械的動作去博得精密的結果．在工程方面，無論是機械工程、電機工程、土木工程、水利工程或者市政工程和地政方面，都需要應用它，例如去量靜力率、惰率、功率的圖表，量土方或量一塊地形等等問題都是．

自從1854年Jacob Amsler首先創製極求積儀以來，各國競相設廠製造，改良推廣，於是求積儀的種類和樣式極為繁夥，日新月異，具見製造者的心巧，而各種求積儀亦各有其特點和它的適用範圍．近幾年來，國人已能自己製造，並且加以改良，使得能適合國情，這是非常值得慶幸的一件事，但是在另一方面，很多的從事技術工作者、工程初學者、青年學子們，都對求積儀很陌生或者不知道怎樣去正確地運用它．因此有詳細介紹它的必要．

(1·2)儀器各部份的名稱

圖1·1是一種最習見的極求積儀的外形，它主要的構成部份，可以解剖成圖1·2．

圖中p為極心點，是求積儀唯一固定在桌面上的一點，普通多用一重體和針製成，並使極臂能轉動為度．

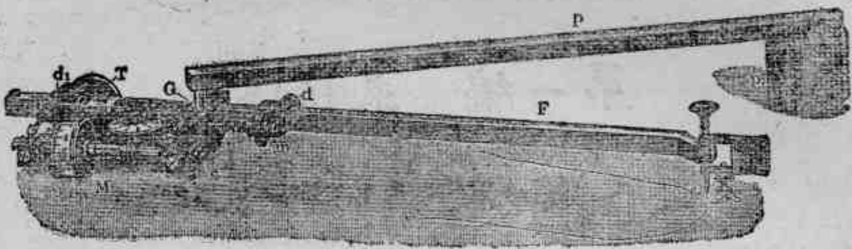

圖 1·1

P爲極臂，一頭爲極心錘p. 另一頭爲象心 G.

G 爲象心，是極臂與象臂連絡處的鉸點關節.

F 爲象臂，分定臂式及變臂式二種，圖 1·1 中所示的是變臂式. 象臂的長短可以調節，並用螺絲 d 固定它.

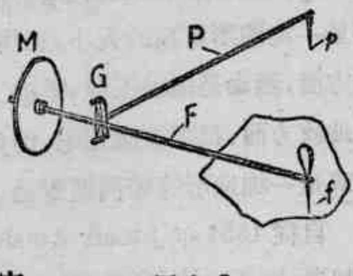

圖 1·2

f 爲指針，用來描繪圖形外框線邊緣的.

M 爲測輪，是儀器中最精緻最靈敏的部份，係用特別精確高度鎳鋼做成，並裝在精確的軸承上轉動的，輪旁並附有記數器，輪軸則平行於象臂.

T 爲導輪，輪面方向平行於象臂，使在此方向滑動時，得因以便利.

極心的構造，普通如圖 1·3.

Z 爲重錘，S 爲針，B 爲極臂，亦有球形極心，如圖 1.4 的柱形體，p 爲極臂P末端的重錘. 支於金屬

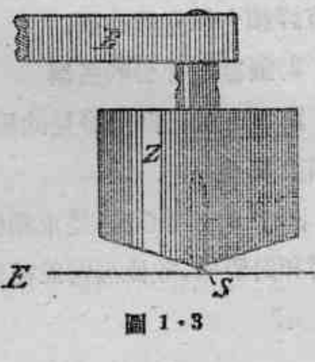

圖 1·3

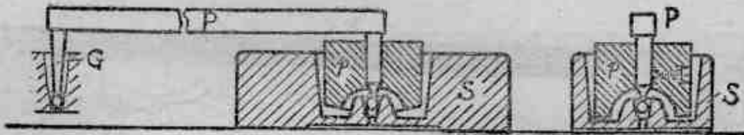

圖 1·4

板 S 的球形榫上.

後面 1·8 圖的極心,便是這種球形極心的外形. 球形極心的優點是可以避免針形極心的偶然損壞或折斷.

象心 G 在極求積儀中是一種固定的結構, 但在一種叫做補整求積儀的象心,却是一種鬆動的球形連接法,如圖 1·5 的 G. 這種鬆動的球形連結法,較之針形鉸點的固定連接,有着許多的優點,例如不會搖蕩, 並且在極臂聯動時能消除儀器的測輪軸偏差, 同樣的臂長之下有着較大的描繪範圍等.

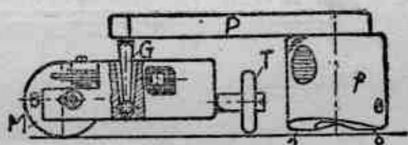

圖 1·5

極臂亦有變臂式可以調節長短的,如圖 1·6, 它的優點在適用於特別大的圖形或甚小的圖畫板上工作.

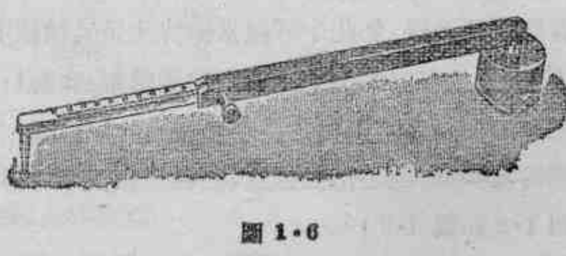

圖 1·6

定臂式象臂的極求積儀如圖 1·7.

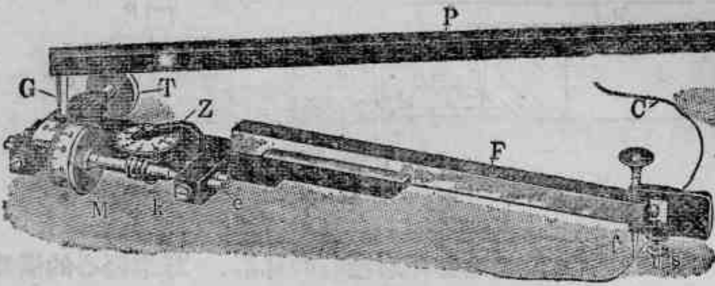

圖 1·7

變臂式而有着球形極心的求積儀如圖 1·8

圖 1·8

圖中 Z 爲一記數盤，用盤下的齒輪與測輪軸上螺紋式的蝸輪相連接，當測輪滾動時可以幫助記數.

測輪有着脆硬的邊緣，如此才可經常保持丈量的精確度，測輪並不放在象臂之下，而僅放在它的旁邊做成一個測輪架，如圖 1·9；這樣可使得人們觀察起來方便得多. 由白色賽珞璐做成的記數筒，便直接附在測輪上. 整個的記數器，便是由記數盤、記數筒和弧形的游標板組合而成.（參閱圖 1·8 和圖 1·9）

每個裝求積儀的盒子內，還附有校正尺和求積表. 校正尺，如圖

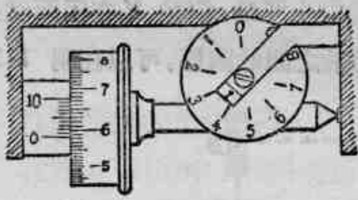

圖 1·9

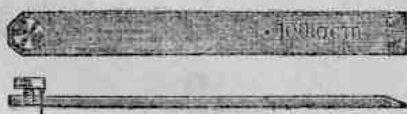

圖 1·10

1·10所示，在一端有着一枚小針，這小針是穿過尺而支持在螺旋釘的下面的，使用時將尺連釘撳在桌面上，使尺能平躺在桌上爲合格，再放鬆螺旋釘，而使尺可以以釘爲圓心而活絡的轉動． 校正尺旋轉一周所成的圓形，是一個已知的固定面積，例如圖 1·10 所示的便是 100cm^2 的面積． 校正尺應當保持平直． 小針常易損壞，亦應仔細保護．

求積表如表 1 所示，其中圖比例尺一項，是指所量圖形之比例尺．單位讀數表示測量値單位的相當値，分相對値同絕對値兩項，相對値與測量値的乘積乃圖形的實地面積，絕對値與測量値的乘積乃圖形的實在面積，測量値就是描繪圖形時讀數的差，在以後的實例中還要提到．象臂位置一項，表示象臂上游標的位置．

表 1

求積儀 第___號	圖比例尺	象臂位置	單位讀數 相對値	單位讀數 絕對値	校正尺面積 平方公里—市100毫
	1:1000	150	10平方公尺	10平方公厘	
	1: 500	120	2	8	
	1:2000	75	20	5	
	1:2500	96	40	6.4	
	1:4000	93.75	100	6.25	
	1:4500	100	200	8	

(1·3)記數器上的讀數

使用儀器時，當極心點 p 固定，以指針 f 描繪圖形邊緣時，(參考圖

1·2)則 G 在以 p 爲圓心，P 爲半徑的圓周上運動，測輪 M 亦因而產生了運動. 測輪的行動途徑，同它的轉動數之間的關係，可以在圖 1·11

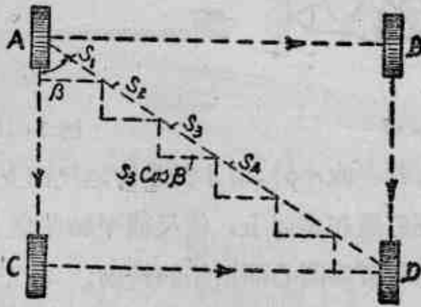

圖 1·11

中明顯地示出. 假設測輪按其軸的方向從 A 到 B 運動，則並未產生轉動；假設沿輪面方向從 A 向 C 運動，則由測輪輪周 U 所滾過的路程得轉動數$=\dfrac{AC}{U}$；假設測輪運動的路徑爲任意方向從 A 到 D，則除了直接從 A 到 D 的途徑外，亦可從 A 經 C 到 D 運動，由輪周滾過的路程，仍與 AC 相等，或利用 AD 及 $\measuredangle\beta$ 的關係得

$$AC=AD\cdot\cos\beta$$

式中 $\measuredangle\beta$ 指輪面方向與輪運動方向所夾的角，從這裏知道任意斜徑路程的轉動數，乃輪面方向投影段路程的轉動數.

轉動數由蝸輪傳動，表現在記數器上，可以讀到千分之一轉的精度.

千位的數字，在記數盤上，由斜臂上的刻劃指出(參考圖 1·9)．記數筒分爲十大格，並刻有數字，這便是百位的數字，每大格再分爲十小格刻劃，每刻劃爲十位的數字，個位數字則由拱形板的游標上的十個刻劃表示，看十個刻劃中那個刻劃與記數筒上的小刻劃相合，便讀出游標上那個刻劃的序位來代表個位數字，例如圖 1·9 中的讀數應爲 3584.

第二章 極求積儀的原理

(2·1)圖外極心法定面積

在圖 1·12(a)中 f 指針所描繪的圖形邊緣 $f_1f_2f_3f_4$，爲圓環形之一段，擬求其面積 F. 極求積儀的極心點 p 正放在圓環形的圓心上. 假設 $fG=a$，$pG=b$，$GM=C$，測輪輪周長爲 U，描繪圖形邊緣按時針方向而行動時，其總轉動數 n 乃是圖形邊緣各線段 f_1f_2，f_2f_3，f_3f_4，f_4f_1 的轉動數 n_1，n_2，n_3，n_4 的和，但在描繪時，從 f_1 經 f_2 到 f_3 段計數器

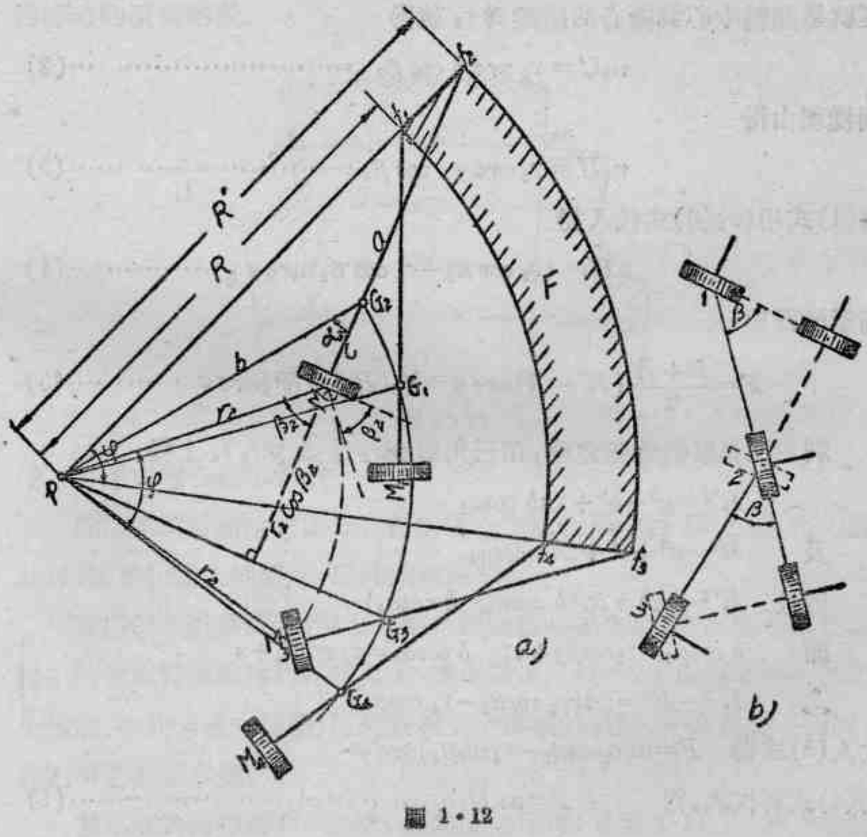

圖 1·12

上的數字，乃是漸漸增加的，而從 f_3 經 f_4 到 f_1 段，乃是漸漸遞減的，因此得

$$n=n_1+n_2-n_3-n_4$$

而 $f_1f_2=f_3f_4$，所以在忽視其符號時 $n_1=n_3$

而得
$$n=n_2-n_4 \cdots\cdots(1)$$

指針描繪 f_2f_3 線段時，測輪則行走 M_2M_3 弧．假想這段弧分成無限小的直線線段而觀察時，則從圖 1·12b 上可以看出，弧段的切線在其輪面方向的投影段，就是其弧段轉動數的計數段，命 f_2f_3 或 M_2M_3 弧相當的中心角爲 φ，測輪面與 M_2M_3 弧的切線所夾的角爲 β，M_2M_3 弧之半徑就是測輪中心到極心的距離爲 r_2 就得

$$n_2U=r_2\, arc\,\varphi\, \cos\beta_2 \cdots\cdots(2)$$

同樣理由得

$$n_4U=r_4\, arc\,\varphi\,.\, \cos\beta_4 \cdots\cdots(3)$$

將(1)式用(2)(3)式代入得

$$nU=(r_2\cos\beta_2-r_4\cos\beta_4)\,arc\,\varphi \cdots\cdots(4)$$

圓環的面積

$$F=\frac{R+R'}{2}(R'-R)\,arc\,\varphi={}^1/_2(R'^2-R^2)\,arc\,\varphi \cdots\cdots(5)$$

利用三角學的餘弦定理，在三角形 pG_2f_2 及 pG_4f_4 上得

$$R'^2=a^2+b^2+2ab\cos\alpha_2$$

及 $$R^2=a^2+b^2+2ab\cos\alpha_4$$

於是 $$R'^2-R^2=2a(b\cos\alpha_2-b\cos\alpha_4)$$

而 $$b\cos\alpha_2=r_2\cos\beta_2+c;\quad b\cos\alpha_4=r_4\cos\beta_4+c$$

$$\therefore\quad R'^2-R^2=2a(r_2\cos\beta_2-r_4\cos\beta_4)$$

代入(5)式得 $F=a(r_2\cos\beta_2-r_4\cos\beta_4)\,arc\,\varphi$.

將(4)式再代入，得
$$F=anU\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

所以 $f_1 f_2 f_3 f_4$ 圖形的面積，等於象臂的長度乘上測輪輪周滾延出線段的長度.

第(I)式的應用，看上去好似祇能適合於圓環的圖形，但在實際上此式亦可普遍用於任何圖形. 每一圖形俱可以假想分爲無限窄的圓環，如圖 1·13 所示，設分一圖形爲若干窄圓環，再按一定方向（例如順時針方向）描繪時，可以發現圖中之 AB、CD 及 EF 弧段，每段俱描繪二次，但方向却相反. 因是各窄圓環面積的和(卽總面積之大小)，僅須描繪圖形之邊緣線，而其面積之大小 $F=anU$，其中 n 乃描繪整個圖形邊緣時的滾動轉數.

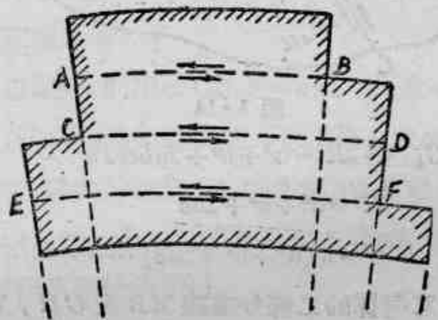

圖 1·13

(2·2)圖內極心法求面積

此法不同於前法的地方，在於極心點放在擬求面積之圖內（圖 1·14）遇着比較大的圖形，以此法爲便利.

設指針在游動時，輪面方向經常經過極心點 p，或者說極心點在象臂上的垂直投影點適巧在輪面上，要保持這一條件，則測輪必在一個周上運動，而並未產生轉動，這時候指針所描繪的軌跡，亦必然是一個圓，我們叫它爲基本圓.

基本圓的面積爲 $G=\pi R^2$，R 爲圓的半徑（見圖 1·14），利用餘弦

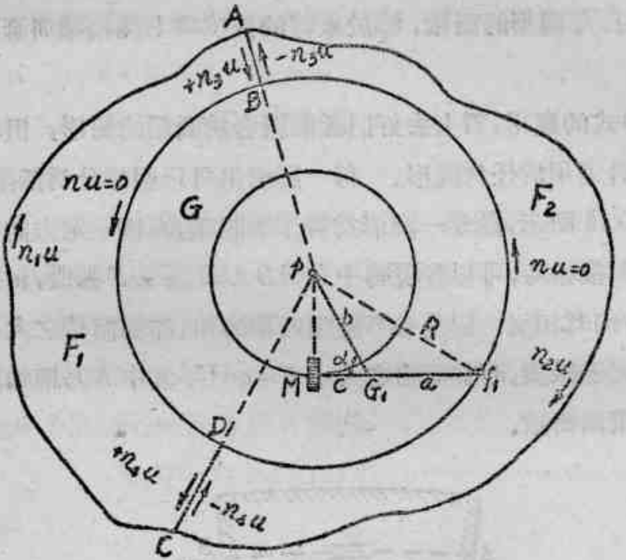

圖 1·14

定理於三角形 pf_1G_1，得 $R^2=a^2+b^2+2ab\cos\alpha$

或 $$R^2=a^2+b^2+2ac$$

基本圓的面積 $$G=\pi(a^2+b^2+2ac)\cdots\cdots(6)$$

從基本圓及任意選擇的二條分離線 AB 及 CD，可將擬求之一定面積 F 的任意圖形，分成三部份，即 F_1、F_2 及 G.

故 $$F=G+F_1+F_2\cdots\cdots(7)$$

面積 F_1 及 F_2 的求法，如前面的圖外極心法. 指針在基本圓上描繪時，測輪並不產生轉動，因而亦無轉動數. 命描繪 CA（面積 F_1）及 AC（面積 F_2）的測輪轉動數為 n_1 及 n_2，描繪 AB 及 CD 的轉動數為 n_3 及 n_4，則從(I)式得

$$F_1=a(n_1\pm n_3\pm n_4)U$$

及 $$F_2=a(n_2\mp n_3\mp n_4)U$$

於是 $$F_1+F_2=a(n_1+n_2)U$$

命 n_1+n_2，即描繪整個圖形邊緣時的轉動數，爲 n，則代入(7)式得

$$F=G+anU$$

又假如擬求面積之圖形較基本圓爲小時，則

$$F=G-anU$$

所以普遍適用的公式乃是　$F=G\pm anU$ ……………………………(II)

用文字來解釋時，就是說圖形面積的大小，乃基本圓的面積加上或減去兩條線段長度的乘積．所謂兩條線段的長度，就是象臂的長度和測輪所滚延出的線段長度．

第三章　求積儀的使用法

(3·1)極心點放在圖外法

設極心點放在圖外，則用(I)式，$F=anU$，此處 a 爲象臂的長度，n 爲測輪的轉動數，U 爲測輪的輪周長．普通經多次的描繪圖形，並每次在描繪之前及以後，俱將計數器上的讀數讀出，而定 n 值之大小．初學者往往喜歡在描繪之前，將計數器放在零上開始，實際上固無此種必要，任何讀數皆可作爲開始的數目．

欲求固定值 a 及 U，可用各種方式假定而求出，在儀器上直接量出 a 及 U 的大小，自無不可，但這種方法——雖然在多種儀器上，可以利用合適裝置，不須定出 a 的大小——亦不能具備需要上的精確度，比較適合的方法，爲描繪一已知面積 F（最好選一任意半徑的圓）描繪出的轉數爲 n，則得

$$aU=\frac{F_0}{n_0}$$

其中 n 乃面積 F 相當的滚動轉數．

爲方便起見，aU 最好爲一整數，例如 $100cm^2$；欲完成此目的，普通可將連接極臂及象臂的關節點，不直接放在象臂上，而祇放在套在象臂

上可以滑動的鞘套上，欲使 $aU=100cm^2$，則可將 a 按輪周 U 約略定為 $a=\frac{100}{U}$，精確的擬定則須賴多次試驗已知的一定的面積，方可達到目的． 許多種求積儀，俱在象臂上鐫有刻度，使在一定比例尺度下，得 aU 為各種不同之整數，在使用之前，試驗此種刻度，乃不可或少的手續．

量出 U 而計算 a，例如測輪半徑 $r'=1cm$ 時，$U=2\pi=6.283cm$． $a=\frac{100}{U}=15.9cm$，這樣的定 a 法，仍不是很精確的． 精確的定 a 法，要靠描繪一塊已知的校正面積，約略的量下 $a=15.9cm$，並在象臂上刻一記號，然後描繪一塊校正面積，譬如 $F=100cm^2$，並假設描繪的結果轉動數是 $97.6cm^2$ 換句話說，轉數太少了，從(I)式知道 $F=anU$，在不同的象臂長度 a_1 及 a_2 下，量同一面積時，轉動數為 n_1 及 n_2，那麼

$$F=a_1n_1U=a_2n_2U$$

$$\therefore \quad \frac{a_2}{a_1}=\frac{n_1}{n_2}$$

以是在調節象臂長度 a 時，得規則如下：

當校正描繪時，得結果太小，則應將象臂 a 縮短，如描繪結果太大，則應將象臂加長．

例：設用象臂 $a=15.9cm$，量一面積 $F=100cm^2$ 的圖形時，得描繪結果為 $97.6cm^2$，則應將象臂長度變為 $15.9\frac{97.6}{100}cm$ 的長短，或者將象臂縮短

$$\triangle a=15.9-15.9\frac{97.6}{100}=15.9\left(\frac{100-97.6}{100}\right)=\frac{2.4}{100}\times 15.9=0.38cm$$

最好的方法為比較面積法，用這方法時，a 及 U 可以根本無關，假設欲求的面積 F 描繪出的轉動數為 n，與一已知面積 F_0 相比較，已知面積的描繪轉動數為 n_0，按(1)式得 $F=anU$ 及 $F_0=an_0U$

二式相除時得 $\quad F=\frac{n}{n_0}F_0$