读考研书 找人大社

2010 人大考研

2010年考研
数学
模拟冲刺试卷(理工类)

主编 李恒沛 高文森 晓 卉

权威命题专家亲自编写 全真冲刺试题

前命题组长积多年命题经验与研究心得精心编制

依据最新大纲最新样题全新改版

数一、数二各八套试卷，临考全真模拟

中国人民大学出版社
004547
注册享受增值服务
注册网址:www.1kao.com.cn
刮开涂层

中国人民大学出版社

2010年考研数学模拟冲刺试卷(理工类)

▶主　编　李恒沛　高文森
晓　卉

正版查询及服务程序
←刮开涂层
←获取20位数字编码
←上 www.1kao.com.cn 注册
←登录增值服务进免费课堂

2010

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

2010年考研数学模拟冲刺试卷．理工类/李恒沛等主编．7版
北京：中国人民大学出版社，2009
ISBN 978-7-300-05030-0

Ⅰ．2…
Ⅱ．李…
Ⅲ．高等数学-研究生-入学考试-习题
Ⅳ．O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第169244号

2010年考研数学模拟冲刺试卷（理工类）
主编　李恒沛　高文森　晓卉

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　址	http://www.crup.com.cn http://www.1kao.com.cn(中国1考网)		
经　销	新华书店		
印　刷	北京鑫丰华彩印有限公司		
规　格	210 mm×285 mm　16开本	**版　次**	2003年11月第1版 2009年10月第7版
印　张	12.5	**印　次**	2009年10月第1次印刷
字　数	367 000	**定　价**	22.00元

版权所有　侵权必究　　印装差错　负责调换

目　录

2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一　模拟试卷(1)

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 必绝对收敛.　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 必收敛.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} - a_{2n-1})$ 必收敛.　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 必收敛.

[　　]

(2) 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微的充分条件是

① $f'_x(x_0,y_0)$ 与 $f'_y(x_0,y_0)$ 都存在.

② $f'_x(x,y)$ 与 $f'_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内都连续.

③ $\Delta f - f'_x(x_0,y_0)\Delta x - f'_y(x_0,y_0)\Delta y \to 0$,当 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$.

④ $\dfrac{\Delta f - f'_x(x_0,y_0)\Delta x - f'_y(x_0,y_0)\Delta y}{\rho} \to 0$,当 $\rho \to 0$.

$(\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0))$

上述四个命题中正确的是

(A) ①②.　　(B) ②③.　　(C) ①③.　　(D) ②④.

[　　]

(3) 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leqslant 0, \\ \ln(x+1), & x > 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则下述命题正确的是

① 在 $[-1,1]$ 上 $f(x)$ 存在原函数.

② 存在定积分 $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

③ 在点 $x=0$ 处,$g'(x)$ 连续.

④ 在 $[-1,1]$ 上 $g(x)$ 存在原函数.

(A)①②.　　(B)③④.　　(C)①③.　　(D)②④.

[　　]

(4) 设 $\sum$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$,$\sum_1$ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$,则有

(A) $\oiint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S = 2\iint\limits_{\Sigma_1} z\,\mathrm{d}S$.　　(B) $\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S = 0$.

(C) $\oiint\limits_{\Sigma} z^3\,\mathrm{d}S = 2\iint\limits_{\Sigma_1} z^3\,\mathrm{d}S$.　　(D) $\oiint\limits_{\Sigma} z^2\,\mathrm{d}S = 2\iint\limits_{\Sigma_1} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

[　　]

(5) 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$,则行列式 $|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$

(A) $\frac{1}{24}$.　　(B) 24.　　(C) $\frac{1}{120}$.　　(D) 120.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

[ ]

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 经过若干次初等行变换后的矩阵记成 $\boldsymbol{B}$，则

(A) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{b}$ 同解.

(B) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 不同解.

(C) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

(D) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大线性无关组的向量个数相同.

[ ]

(7) 设连续型随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上的值为零，在区间 $(0,+\infty)$ 内的值大于零且满足微分方程 $f'(x)=-2f(x)$，则 $E(X)$ 等于

(A) $\frac{1}{2}$.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 4.

[ ]

(8) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，其样本均值为 $\overline{X}$. 已知 $E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2(\sigma^2>0)$，则未知参数 σ^2 的无偏估计量为

(A) $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.　　(B) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

(C) $\frac{1}{2(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$.　　(D) $\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$.

[ ]

二、填空题(本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上)

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{2x}=$ ________.

(10) 平面 $Ax+By+Cz=0(C\neq 0)$ 与柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 相交所成椭圆的面积为________.

(11) 微分方程 $y'''+6y''+13y'=0$ 的通解为________.

(12) 设 $f_1(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$，$f_2(x)=\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$，则 $f_1(x)+f_2(x)=$ ________.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，有特征值 1,2,3，$f(x)=x^3-6x^2+11x-10$，则 $f(\boldsymbol{A})=$ ________.

(14) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，分别服从正态分布 $N(-1,\sigma^2)$ 和 $N(1,3\sigma^2)$. 如果 $E[(X+Y)^2+3(X+Y)-4]=0$，则 $P\{X+Y\geqslant 2\}=$ ________.(已知标准正态分布函数值 $\Phi(1)=0.841\,3$)

三、解答题(本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 10 分)

设 S 为锥体的侧面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0(0\leqslant z\leqslant b)$，计算 $\iint\limits_S\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}S$.

(16)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，且满足

$$x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=(x+1)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t,\ f(1)=2,\text{求 } f(x).$$

(17)(本题满分 10 分)

计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{2}{y}f(xy^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{1}{x}f(xy^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(x^2z+y^2z+\frac{z^3}{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $f(t)$ 具有连续导数，$\sum$ 为下半球面 $x^2+y^2+z^2=1(z<0)$ 的上侧.

(18)(本题满分 10 分)

求曲线 $y=\ln x$ 上某一点 $(t,\ln t)$ 的一条切线，使该切线与直线 $x=1,x=5$ 及曲线 $y=\ln x$ 所围图形的面积最小.

(19)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 连续，$x\in[a,b]$，且可导，试证在 (a,b) 内存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}$.

(20)(本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^3+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 化成标准形 $f=y_2^2+2y_3^2$，求 a,b 及所用的正交变换.

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_l$，且向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_l$ 线性无关，证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$ 也线性无关.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}, & -3<x<0,\\ \dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$Y=X^2+2X-1$，求：

(Ⅰ) Y 的概率密度 $f_Y(y)$；

(Ⅱ) X 与 Y 的协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设试验 E 成功的概率为 $p(0<p<1)$，将试验 E 独立地重复进行 5 次，以 X 表示试验成功的次数. 已知总体 X 的样本值如下：3,1,2,4,3,5，求概率 $q=P\{X=2\}$ 的最大似然估计值.

参考解答及分析

一、选择题

(1) **分析**：选项(A)、(B)、(C)都不对，可举反例说明，例如取 $a_n=(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散；$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散；$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n}-a_{2n-1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n}}+\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n}}{\sqrt{2n(2n-1)}}$，因 $\dfrac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n}}{\sqrt{2n(2n-1)}}>\dfrac{2\sqrt{2n-1}}{2n}=\dfrac{\sqrt{2n-1}}{n}>\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n}}{\sqrt{2n(2n-1)}}$ 发散.

选项(D) 对. 事实上，(D) 的前 n 项部分和 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1})=a_1-a_{n+1}$，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=a_1$.

解：应选(D).

(2) **分析**：$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微 $\Rightarrow f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可导，但反之未必成立，说明 ① 不对；② 正确，这是教科书上的一条定理；④ 正确，这是全微分存在(即可微) 的定义；③ 不对，例如，$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$

在点(0,0)处偏导数存在，$f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$，同理 $f'_y(0,0)=0$，$\Delta f=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}$，$\Delta f-f'_x(0,0)\Delta x-f'_y(0,0)\Delta y=\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}\to 0$（当 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$），但 $\dfrac{\Delta f-f'_x(0,0)\Delta x-f'_y(0,0)\Delta y}{\rho}=\dfrac{\sqrt{|\Delta x||\Delta y|}}{\rho}\not\to 0(\rho\to 0)$. 故应选(D).

解:应选(D).

(3) **分析**:若 $f(x)$ 在$[-1,1]$上存在原函数 $F(x)$，则由题设可知在$[-1,0]$上，

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+x+C_1;$$

在$(0,1]$上，

$$F(x)=x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)+C_2.$$

因在 $x=0$ 处，$F(x)$ 连续，故得 $C_1=C_2$.

于是

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+x+C_1, & x\in[-1,0],\\ x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)+C_1, & x\in(0,1].\end{cases}$$

由于 $F'_-(0)=1$，$F'_+(0)=0$，从而 $F'(0)$ 不存在.

故 $F(x)$ 在$[-1,1]$上不是 $f(x)$ 的原函数，此与题设矛盾，即说明 ① 不成立.

又 $f(x)$ 在$[-1,1]$上有界且只有 1 个间断点，故 $f(x)$ 在$[-1,1]$上可积.

即 $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$ 存在，② 正确.

因 $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)$ 不存在，而 $g'(0)=0$，故 ③ 不正确.

因在$[-1,1]$上 $g(x)$ 连续，故在$[-1,1]$上 $g(x)$ 存在原函数，即 ④ 正确.

解:应选(D).

(4) **分析**:记 D_{xy} 为曲面 $\sum$ 在 xOy 坐标面上的投影域，

$$\text{因}\oint\!\!\!\!\oint_{\Sigma}z\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_{上}}z\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_{下}}z\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1-x^2-y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_{xy}}(-\sqrt{1-x^2-y^2})\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$ 故选项(B)对，从而(A)，(C)不对，经运算，(D)也不对.

解:应选(B).

(5) **分析**:相似矩阵有相同的特征值，从而 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，$\boldsymbol{B}^{-1}$ 的特征值为 2,3,4,5，$\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}$ 的特征值为 1,2,3,4，而方阵的行列式等于其全部特征值的乘积，故 $|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|=24$.

解:应选(B).

(6) **分析**:因 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，$\boldsymbol{b}$ 没有动，故选项(A)不成立．至于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 应是同解，故(B)不成立．由 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\boldsymbol{B}$，$|\boldsymbol{A}|$ 与 $|\boldsymbol{B}|$ 可能相差一常数因子，故选项(C)也不成立. 选项(D)成立，事实上，由 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\boldsymbol{B}$，不改变矩阵的秩，即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$，从而 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 矩阵的列向量组的极大线性无关组的向量个数相同，即其列秩相同，也即矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的秩.

解:应选(D).

(7) **分析**:当 $x>0$ 时，微分方程 $f'(x)=-2f(x)$ 的通解为

$f(x)=Ce^{-2x}$，其中 C 是任意正数.

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} C\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = \frac{C}{2} = 1.$$

因此 $C = 2$. X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

所以

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} 2x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

解:应选(A).

(8) **分析:**由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,与总体 X 具有同一分布,$E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2(i = 1, 2, \cdots, n)$,因此

$$E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}E[(X_i - \mu)^2] = \frac{n\sigma^2}{n-1} \neq \sigma^2,$$

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right] = \frac{n-1}{n}E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right] = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2,$$

$$\begin{aligned} E\left[\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2\right] &= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}^2 + X_i^2 - 2X_iX_{i+1}) \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n-1}[(\sigma^2 + \mu^2) + (\sigma^2 + \mu^2) - 2\mu^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2, \end{aligned}$$

$$E\left[\frac{1}{2(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2\right] = \frac{1}{2(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}(2\sigma^2 + 2\mu^2 - 2\mu^2) = \sigma^2.$$

解:应选(C).

二、填空题

(9) **分析:**$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)^{2x}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to\infty}\left(1 + \sin\frac{2}{x}\right)^{x} \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(1 + \sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}\cdot\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}\cdot 2} \\ &= \mathrm{e}^2. \end{aligned}$$

解:应填 e^2.

(10) **分析:**$D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1, z = \frac{Ax + By}{-C}$.

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \mathrm{d}S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1} \sqrt{1 + \left(-\frac{A}{C}\right)^2 + \left(-\frac{B}{C}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \pi ab\sqrt{1 + \left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2} \\ &= \frac{\pi ab}{|C|}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}. \end{aligned}$$

解:应填$\frac{\pi ab}{|C|}\sqrt{A^2+B^2+C^2}$.

(11) **分析**:相应的特征方程为

$$r^3+6r^2+13r=0$$
$$\Rightarrow r(r^2+6r+13)=0$$
$$\Rightarrow r=0,-3\pm 2i.$$

于是原方程的通解为

$$y=C_1+e^{-3x}(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)\quad (C_1,C_2,C_3\text{ 为任意常数}).$$

解:应填 $y=C_1+e^{-3x}(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)\quad (C_1,C_2,C_3$ 为任意常数).

(12) **分析**:因$(f_1(x)+f_2(x))'=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}(-\frac{1}{x^2})=0$,

故 $$f_1(x)+f_2(x)=C(\text{常数})$$
$$\Rightarrow \arctan x+\arctan\frac{1}{x}=C.$$

令 $x=1$,可得 $f_1(x)+f_2(x)=\frac{\pi}{2}$.

解:应填$\frac{\pi}{2}$.

(13) **分析**:由 $f(x)=x^3-6x^2+11x-10=(x-1)(x-2)(x-3)-4$,知

$$f(\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})-4\boldsymbol{E} \qquad ①$$

由设,$\boldsymbol{A}$ 有三个互不相同的特征值 1,2,3,从而 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$,即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{B}$,使

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{B}^{-1}$,

代入式 ①,得

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{A})&=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{B}^{-1}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{B}^{-1}-3\boldsymbol{E})-4\boldsymbol{E}\\&=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\Lambda}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\Lambda}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}^{-1}-4\boldsymbol{E}\\&=\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}-4\boldsymbol{E}\\&=-4\boldsymbol{E}.\end{aligned}$$

解:应填$-4\boldsymbol{E}$.

(14) **分析**:由于 X 与 Y 是两个相互独立的正态随机变量,因此 $X+Y$ 服从正态分布,且有

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=-1+1=0,$$
$$E[(X+Y)^2]=D(X+Y)=D(X)+D(Y)=\sigma^2+3\sigma^2=4\sigma^2,$$
$$E[(X+Y)^2+3(X+Y)-4]=E[(X+Y)^2]+3E(X+Y)-4=4\sigma^2-4.$$

由 $E[(X+Y)^2+3(X+Y)-4]=0$,即 $4\sigma^2-4=0$,得 $4\sigma^2=4$,从而可知

$$X+Y\sim N(0,4),\frac{X+Y}{2}\sim N(0,1),$$
$$P\{X+Y\geqslant 2\}=P\{\frac{X+Y}{2}\geqslant 1\}=1-\Phi(1)=1-0.841\,3=0.158\,7.$$

解:应填 0.158 7.

三、解答题

(15) **分析**：按第一型曲面积分计算之.

解：$z^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2+y^2)\Rightarrow z=\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{b}{a}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\begin{aligned}\iint_S\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S&=\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\mathrm{d}r\\&=\frac{2}{3}\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

(16) **分析**：对等式两端求导变成微分方程. 利用初始条件，解出 $f(x)$，再由 $f(x)$ 的连续性，求出 $f(0)$，即得 $f(x)$ 的表达式.

解：等式两端对 x 求导，得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t+x(x+1)f(x)$$

$$\Rightarrow\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t+x^2f(x)$$

$$\Rightarrow f(x)=xf(x)+2xf(x)+x^2f'(x)$$

$$\Rightarrow x^2f'(x)+3xf(x)-f(x)=0$$

$$\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow\ln f(x)=-\frac{1}{x}-3\ln x+\ln C$$

$$\Rightarrow\ln f(x)=\ln(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}x^{-3}C)$$

$$\Rightarrow f(x)=Cx^{-3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$

当 $x=1$ 时，$f(x)=2,2=C\mathrm{e}^{-1}$，得 $C=2\mathrm{e}$，

故 $\qquad f(x)=2x^{-3}\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}\qquad(0<x\leqslant 1)$.

又 $\qquad \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)\qquad$ (由题设)，

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}2\mathrm{e}x^{-3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=2\mathrm{e}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x^3}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}2\mathrm{e}\lim_{t\to+\infty}\frac{t^3}{\mathrm{e}^t}=0.$$

故得

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

(17) **分析**：添加平面 $z=0$，使积分域成为封闭曲面，利用高斯公式计算.

解：添加平面 $P:z=0$，$\sum\cup P$ 为封闭曲面，

$$\iint_{\Sigma}=\oiint_{\Sigma\cup P}-\iint_P.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\oiint\limits_{\Sigma \cup P} \frac{2}{y}f(xy^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \frac{1}{x}f(xy^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(x^2z + y^2z + \frac{z^3}{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{2y^2}{y}f'(xy^2) - \frac{2xy}{x}f'(xy^2) + (x^2+y^2+z^2)\right]\mathrm{d}v$$

$$= -\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$$

$$= -\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2 \cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$= -\frac{2}{5}\pi.$$

而 $$\iint\limits_{P} = 0,$$

故 $$\iint\limits_{\Sigma} \frac{2}{y}f(xy^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \frac{1}{x}f(xy^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(x^2z + y^2z + \frac{z^3}{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{2}{5}\pi.$$

(18) **分析:**曲线 $y=\ln x$ 在点 $(t,\ln t)$ 处的切线为

$$y-\ln t = \frac{1}{t}(x-t),\text{即 } y-\ln t = \frac{1}{t}x-1 \quad (t>0),$$

利用定积分写出该切线与给定曲线所围成的图形面积,再求其最小值,最后求出相应的 t 值及相应的切线方程.

解:曲线 $y=\ln x$ 在点 $(t,\ln t)$ 处的切线为 $y-\ln t=\frac{1}{t}x-1$. 所围图形面积为

$$S = \int_1^5\left(\ln t - 1 + \frac{x}{t} - \ln x\right)\mathrm{d}x$$

$$= (\ln t - 1)x\Big|_1^5 + \frac{x^2}{2t}\Big|_1^5 - (x\ln x - x)\Big|_1^5$$

$$= 4\ln t + \frac{12}{t} - 5\ln 5 \quad (t>0).$$

求 t,使 S 最小:$S'=\frac{4}{t}-\frac{12}{t^2}=\frac{4}{t^2}(t-3)$,令 $S'=0$,得 $t=3$,$S''=\frac{24-4t}{t^3}$,当 $t=3$ 时,$S''>0$,故 $t=3$ 为极小值点,也是最小值点,因此所求切线方程为

$$y-\ln 3 = \frac{1}{3}(x-3).$$

(19) **分析:**欲证 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}$,

或 $$f(\xi)-f(a) = f'(\xi)(b-\xi),$$

即 $$f'(\xi)(b-\xi) - [f(\xi)-f(a)] = 0$$

$$\Rightarrow bf'(\xi) - [\xi f'(\xi) + f(\xi)] + f(a) = 0$$

$$\Rightarrow [bf(x)]'\Big|_{\xi} - [xf(x)]'\Big|_{\xi} + [f(a)x]'\Big|_{\xi} = 0$$

$$\Rightarrow [bf(x) - xf(x) + f(a)x]'\Big|_{\xi} = 0$$

$$\Rightarrow [(b-x)(f(x)-f(a)) + bf(a)]'\Big|_{\xi} = 0$$

$$\Rightarrow [(b-x)(f(x)-f(a))]'\Big|_{\xi} = 0.$$

取辅助函数

$$F(x)=(b-x)[f(x)-f(a)],$$

容易验证 $F(x)$ 满足罗尔定理的条件，即可证得.

证：

令 $F(x)=(b-x)[f(x)-f(a)]$，

由题设知 $F(x)$ 连续，$x\in[a,b]$，且可导，

又 $\quad F(a)=F(b)=0$，

故存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$.

由 $\quad F'(x)=(b-x)f'(x)-[f(x)-f(a)]$，

得 $\quad F'(\xi)=(b-\xi)f'(\xi)-[f(\xi)-f(a)]=0$，

即 $\quad f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi},\xi\in(a,b)$.

(20) **分析：**此类问题的关键在于正确地写出二次型的矩阵.

解：$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{bmatrix}$. 其标准形 $f=y_2^2+2y_3^2$ 的矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$. 显然有 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=0$，由此得 $a=b$.

又 1(或 2) 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，即 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$(或 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=0$)，由此得 $a=b=0$.

由 $(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，取特征向量 $\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$.

由 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，取特征向量 $\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$.

由 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，取特征向量 $\boldsymbol{P}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，

则所求正交变换为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$.

(21) **分析：**利用线性无关的概念证之.

证：设 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_l\boldsymbol{\beta}_l=\boldsymbol{0}$

$\Rightarrow (k_1+k_2+\cdots+k_l)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+\cdots+k_l)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_l\boldsymbol{\alpha}_l=\boldsymbol{0}$，

由设知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_l$ 线性无关，故有

$$\begin{cases} k_1+k_2+\cdots+k_l=0 \\ \quad k_2+\cdots+k_l=0 \\ \quad\quad \cdots \\ \quad\quad\quad k_l=0 \end{cases},即$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_l \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad ①$$

因系数行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}\neq 0$,从而方程组①只有零解　$k_1=k_2=\cdots=k_l=0$.

因此,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$ 线性无关.

(22) **分析**:因为 $Y=X^2+2X-1=(X+1)^2-2$,所以 Y 的分布函数

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{(X+1)^2-2\leqslant y\}=P\{(X+1)^2\leqslant y+2\}.$$

利用 X 的概率密度 $f_X(x)$ 算出 $F_Y(y)$,可得 $f_Y(y)=F'_Y(y)$. 要注意讨论 y 的取值情况. 根据协方差的性质和计算公式,可解得(Ⅱ).

解:(Ⅰ)由分析可知

$$F_Y(y)=P\{(X+1)^2\leqslant y+2\}.$$

当 $y\leqslant -2$ 时,有 $F_Y(y)=0$;

当 $-2<y<-1$ 时,有

$$F_Y(y)=P\{-1-\sqrt{y+2}\leqslant X\leqslant -1+\sqrt{y+2}\}=\int_{-1-\sqrt{y+2}}^{-1+\sqrt{y+2}}f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-1-\sqrt{y+2}}^{-1+\sqrt{y+2}}\frac{1}{6}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{y+2}}{3};$$

当 $-1\leqslant y<2$ 时,有

$$F_Y(y)=P\{-1-\sqrt{y+2}\leqslant X\leqslant -1+\sqrt{y+2}\}=\int_{-1-\sqrt{y+2}}^{0}\frac{1}{6}\mathrm{d}x+\int_{0}^{-1+\sqrt{y+2}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{5}{12}\sqrt{y+2}-\frac{1}{12};$$

当 $2\leqslant y<7$ 时,有

$$F_Y(y)=\int_{-3}^{0}\frac{1}{6}\mathrm{d}x+\int_{0}^{-1+\sqrt{y+2}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sqrt{y+2}+\frac{1}{4};$$

当 $y\geqslant 7$ 时,有 $F_Y(y)=1$.

由此可得 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{6\sqrt{y+2}}, & -2<y<-1, \\ \dfrac{5}{24\sqrt{y+2}}, & -1\leqslant y<2, \\ \dfrac{1}{8\sqrt{y+2}}, & 2\leqslant y<7, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

(Ⅱ)X 与 Y 的协方差为

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,X^2+2X-1)=\mathrm{Cov}(X,X^2)+2\mathrm{Cov}(X,X)$$
$$=E(X^3)-E(X)E(X^2)+2\{E(X^2)-[E(X)]^2\}.$$

由于

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{0}\frac{x}{6}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{x}{4}\mathrm{d}x=-\frac{1}{4},$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{0}\frac{x^2}{6}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{x^2}{4}\mathrm{d}x=\frac{13}{6},$$

$$E(X^3)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{0}\frac{x^3}{6}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{x^3}{4}\mathrm{d}x=-\frac{19}{8},$$

因此

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=-\frac{19}{8}-\left(-\frac{1}{4}\right)\times\frac{13}{6}+2\times\left[\frac{13}{6}-\left(-\frac{1}{4}\right)^2\right]=\frac{57}{24}.$$

(23) **分析**:由题设可知 $X\sim B(5,p)$. 根据已知的样本值,写出似然函数 $L(p)$,求出 p 的最大似然估计值 $\hat{p}$. 利用最大似然估计的性质,可求得 $\hat{q}=C_5^2\hat{p}^2(1-\hat{p})^3$.

解:由于总体 X 服从参数为 $5,p(0<p<1)$ 的二项分布 $B(5,p)$,即

$$P\{X=x\}=C_5^x p^x(1-p)^{5-x},x=0,1,2,3,4,5,$$

因此,对于已知的样本值 $x_1=3,x_2=1,x_3=2,x_4=4,x_5=3,x_6=5$,似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{6}C_5^{x_i}p^{x_i}(1-p)^{5-x_i}=\prod_{i=1}^{6}C_5^{x_i}p^{\sum\limits_{i=1}^{6}x_i}(1-p)^{30-\sum\limits_{i=1}^{6}x_i}$$
$$=C_5^3C_5^1C_5^2C_5^4C_5^3C_5^5p^{18}(1-p)^{12}.$$

取对数,得

$$\ln L(p)=\ln(C_5^3C_5^1C_5^2C_5^4C_5^3C_5^5)+18\ln p+12\ln(1-p),$$

将 $\ln L(p)$ 对 p 求导数并令其等于零,得

$$\frac{18}{p}-\frac{12}{1-p}=0,$$

解得 p 的最大似然估计值为

$$\hat{p}=\frac{18}{30}=0.6.$$

因为概率

$$q=P\{X=2\}=C_5^2p^2(1-p)^3,$$

所以根据最大似然估计的性质,得 q 的最大似然估计值为

$$\hat{q}=C_5^2\hat{p}^2(1-\hat{p})^3=\frac{5\times4}{2!}\times0.6^2\times(1-0.6)^3=0.2304.$$

2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一　模拟试卷(2)

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设 $f(x)=f(-x),x\in(-\infty,+\infty)$,且在 $(0,+\infty)$ 内,$f'(x)>0,f''(x)>0$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内必有

(A) $f'(x)>0,f''(x)>0$.　　(B) $f'(x)>0,f''(x)<0$.

(C) $f'(x)<0,f''(x)<0$.　　(D) $f'(x)<0,f''(x)>0$.

[　　]

(2) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数 $f'_x(x,y),f'_y(x,y)$ 连续是 $f(x,y)$ 在该点可微的

(A) 必要条件而非充分条件.

(B) 充分条件而非必要条件.

(C) 充分必要条件.

(D) 既非必要条件又非充分条件.

[　　]

(3) 下列论断正确的是

(A) 设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 可导,则 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 必可导.

(B) 设 $f(x)$ 在点 a 的某邻域 $U(a,\delta)$ 内有定义,且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$ 存在,则 $f'(a)$ 必存在.

(C) 设 $|a_n|\leqslant|b_n|$ $(n=1,2,\cdots)$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

(D) 设 $|a_n|\leqslant b_n$ $(n=1,2,\cdots)$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 也发散.

[　　]

(4) 设 $f(x)$ 连续,$x\in(-\infty,+\infty)$,则下述论断错误的是

(A) $\forall a>0,\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow f(x)$ 为奇函数.

(B) $\forall a>0,\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow f(x)$ 为偶函数.

(C) $\forall a>0$,常数 T,$\int_{a}^{a+T}f(x)\mathrm{d}x$ 与 a 无关 $\Leftrightarrow f(x)$ 有周期 T.

(D) $f(x+T)=f(x)$,$\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 有周期 $T\Leftrightarrow\int_{0}^{T}f(t)\mathrm{d}t=0$.

[　　]

(5) 设 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 皆为整数,则方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=\dfrac{1}{2}x_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=\dfrac{1}{2}x_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=\dfrac{1}{2}x_3\end{cases}$$

(A) 无解.　　(B) 有唯一解.

(C) 有无穷多解.　　　　　　　　(D) 解不定.

[　　]

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 中

(A) 任一行向量是其余各行向量的线性组合.

(B) 必有一行向量是其余各行向量的线性组合.

(C) 必有一行元素全为零.

(D) 必有两行元素对应成比例.

[　　]

(7) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2+6x-9}$，$-\infty<x<+\infty$，则 $D(X)$ 等于

(A) $\frac{1}{4}$.　　(B) $\frac{1}{2}$.　　(C) 2.　　(D) 4.

[　　]

(8) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. 设 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是不全相等的常数，$\overline{C}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}C_i$，则随机变量 $Y=\sum_{i=1}^{n}(C_i-\overline{C})(X_i-\overline{X})$ 服从正态分布

(A) $N(0,\sum_{i=1}^{n}C_i^2\sigma^2)$.　　　　(B) $N(\mu,\sum_{i=1}^{n}C_i^2\sigma^2)$.

(C) $N(0,\sum_{i=1}^{n}(C_i-\overline{C})^2\sigma^2)$.　　　　(D) $N(\mu,\sum_{i=1}^{n}(C_i-\overline{C})^2\sigma^2)$.

[　　]

二、填空题(本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上)

(9) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}(1+x\ln x)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

(10) 设函数 $f(x)$ 及其反函数 $f^{-1}(x)$ 都可导，且有 $\int_2^{f(x)}f^{-1}(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-9$，则 $f(x)=$ ________.

(11) 设有级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{x+1}{3}\right)^n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=2$，则该级数的收敛半径 $R=$ ________.

(12) 设 l 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 的右半部分，则 $\int_l(x+y)\mathrm{d}l=$ ________.

(13) 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,3，则 $\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}$ 的三个特征值分别为________.

(14) 设 $X\sim N(\mu,4)$，其中 μ 为未知参数. 从总体 X 中抽取样本容量为 n 的一组样本值，算得 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间中的最小长度为 0.98，则 $n=$ ________.

三、解答题(本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，$f(0)=0$，试证：

当 $x>0$，$F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 是单调增加的.

(16)(本题满分 10 分)

设 $u=z(x^2+3)$，求向量场 $\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}u$ 通过上半球面 $S:x^2+y^2+z^2=1(z>0)$ 的上侧的流量.

(17)(本题满分 10 分)

试在曲线族 $y=a(1-x^2)(a>0)$ 中选一条曲线，使这条曲线与其在 $(-1,0)$ 及 $(1,0)$ 两点处的法线所

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com