高等职业教育技能型紧缺
人才培养培训工程系列教材

高等数学

北京大学公共经济管理研究中心职业教育研究所 组编
傅延欣 韩 伟 王 德 主编

（下册）

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

高等职业教育技能型紧缺人才培养培训工程系列教材

高等数学

（下 册）

北京大学公共经济管理研究中心职业教育研究所　组编

傅延欣　韩　伟　王　德　主编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内容简介

本书以高等职业教育教学要求为目标，遵循“夯实基础，突出实用”的原则而精心编写。全书分上、下两册。上册主要内容包含：预备知识，函数，极限与连续，导数与微分，不定积分，定积分及其应用；下册主要内容包含：多元函数微积分，常微分方程，级数，行列式、矩阵与线性方程组，概率统计初步。每章节后配有A、B两类练习题，章末设有小结（包括主要内容回顾及学习指导）。

本书可作为高职高专基础课程教材，也可作为其他人员学习高等数学的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下册 / 傅延欣，韩伟，王德主编；北京大学公共经济管理研究中心职业教育研究所组编. —北京：电子工业出版社，2009.9

（高等职业教育技能型紧缺人才培养培训工程系列教材）

ISBN 978-7-121-09597-9

I. 高…　II. ①傅…②韩…③王…④北…　III. 高等数学－高等学校：技术学校－教材　IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 172311 号

责任编辑：刘文杰

印　　刷：
装　　订：北京京师印务有限公司

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036

开　　本：787×1092　1/16　印张：14.5　字数：371 千字

印　　次：2009 年 9 月第 1 次印刷

印　　数：9200 册　定价：28.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　　言

高等职业教育是高等教育的重要组成部分，而数学是高等职业教育的一门必修公共课。为了满足高等职业教育不同专业、不同类别的学生学习需要，我们以培养高素质应用型人才为目标，遵循“夯实基础，突出实用”的原则，组织了学术水平较高、教学实践经验丰富的第一线数学教师编写了本教材。

联合国教科文组织出版的《学会生存》一书的作者富尔指出：“未来的文盲，不再是不识字的人，而是没有学会怎样学习的人”。使学生学会自我学习是高等教育的重要任务。为了培养学生的自学能力，帮助学生学好本课程，本书在编排和设计上进行了创新，旨在使学生在上课前首先进行自我预习，对一般性问题通过自学就能够消化理解。在课堂上，教师根据精讲多练的原则，视学生自学情况规划授课内容，使教学更具有针对性，从而提高教学效果。

本书的编排结构有如下特点：

（1）本书采用模块式编写，适用不同专业、不同类别的高职高专学生学习需要。

（2）本教材不追求严格的论证和推导，概念、定理尽量采用学生容易理解的方式叙述。

（3）教材中“预备知识”一章，其内容包含了学习高职数学必需的初等数学知识。预备知识不是系统地复习初等数学，但完全可以满足学生进一步学习高职数学的需要。

（4）为了使学生能够有的放矢地自学，每章开始提出自学目标指导及重点、难点。

（5）对每章欲讨论的问题，多以生产、生活中的实例引入，以加强应用意识，展示数学应用的广泛性；选取与各类专业学习相关的基础知识作为必学内容，着重培养学生分析问题、解决问题的能力。

（6）例题部分给出详细分析，然后依据解题分析，进行简明规范的解答，必要时给以归纳小结，由教师灵活安排讲授。

（7）每章节后配有思考题，引导学生积极思考；A、B 两类练习题，以适应不同类别的学生使用，使学生在巩固基本概念的基础上提高数学能力。

（8）章末设有小结，包括主要内容回顾及学习指导。每章的主要概念、定理、性质、公式、方法等的回顾，由学生自己完成，以强化记忆；学习指导部分用浅显的、学生易于接受的语言，对本章较难掌握的主要概念、定理、性质、公式、方法等进行必要的解释。

教材内容包括预备知识、微积分、微分方程、级数、线性代数、概率论与数理统计。全书分上、下册，由北京大学公共经济管理研究中心职业教育研究所组编，傅延欣、韩伟、王德担任主编。参加本教材编写的有：王德、张建军、宋美英、张海清、孙军霞、焦凤莲、赵艳阁。前言、附录、预备知识由张建军编写，第 1、3 章由宋美英编写，第 2、4 章由张海清编写，第 5 章由张海清、宋美英编写。第 6 章由孙军霞编写，第 7、8、9、10 章由张建军、焦凤莲、赵艳阁编写。

海军航空工程学院于尚易副教授对本书进行了认真的审阅和统稿，并提出了许多宝贵建议；本书在编写过程中，得到青岛恒星学院有关领导的热情关心和指导，在此谨表示衷心感谢。

限于编者水平，不妥之处在所难免，恳请专家、教师批评指正。

编　者

2009 年 7 月

目　录

第6章　多元函数微积分

6.1　空间向量

自学目标指导：◆ 了解空间直角坐标系的概念和两点间的距离公式；
◆ 理解向量的概念，向量的模与向量的方向余弦的概念；
◆ 熟练掌握向量的坐标表示，用向量的坐标表示进行向量的加法、数乘、数量积与向量积的运算.

重点： 向量的模、向量的方向余弦、数量积、向量积的概念，用向量的坐标表示进行向量的加法、数乘、数量积与向量积的运算.

难点： 向量的数量积与向量积的概念与运算.

为确定直线上一点的位置，建立了数轴，用一个实数来决定该点的位置；为了确定平面上一点的位置，建立了平面直角坐标系，用两个有序的实数来决定该点的位置；若想确定空间中一点的位置，就需要建立新的坐标系，自然想到可以用三个有序实数来决定其位置.

6.1.1　空间直角坐标系

1. 空间点的直角坐标

过空间一点 O，作三条两两垂直的数轴所形成的坐标系叫做空间直角坐标系，记作 $O-xyz$．点 O 称为坐标原点，三条数轴 Ox,Oy,Oz 分别简称为 x 轴、y 轴、z 轴，或分别称为横轴、纵轴、竖轴（竖轴也简称立轴），统称为坐标轴.

通常把 x 轴、y 轴置于水平面上，z 轴置于铅直方向．规定三条坐标轴的正向符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手四指从 x 轴正向转向 y 轴正向时，拇指竖起的方向为 z 轴的正向.

三条坐标轴所确定的平面 xOy，yOz，zOx 叫做坐标面．这三个坐标面将空间分为八个部分，每一部分叫做一个卦限，如图 6-1 所示．这八个卦限分布如下：位于 xOy 坐标面的第一、二、三、四象限上方的部分依次叫做第一、第二、第三、第四卦限；而位于其下方的部分依次为第五、第六、第七、第八卦限，这八个卦限分别用字母 I、II、III、IV、V、VI、VII、VIII 表示.

建立空间直角坐标系后，就可以建立空间中的点与数组的一一对应关系.

设 M 为空间任意一点，过 M 分别作垂直于三个坐标轴的平面，与 x 轴、y 轴、z 轴分别交于 P,Q,R 三点．设 $OP=x$，$OQ=y$，$OR=z$，则点 M 惟一确定了一个有序实数组 (x,y,z)；反之，任给一个有序实数组 (x,y,z)，将上述程序颠倒，便可惟一确定空间中一点 M，

于是空间中一点 M 与一个有序实数组 (x,y,z) 建立了一一对应的关系（如图 6-2 所示）.

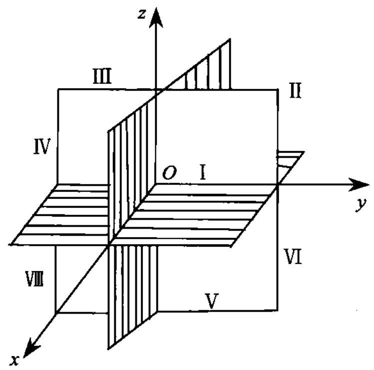

图 6-1

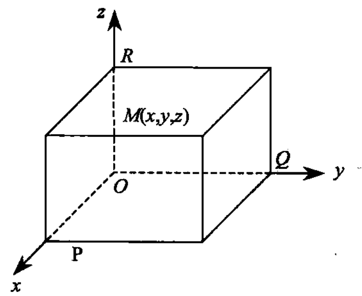

图 6-2

有序实数组 (x,y,z) 叫做点 M 的坐标，记作 $M\ (x,y,z)$，其中 x 叫横坐标，y 叫纵坐标，z 叫竖坐标（或立坐标）.

显然，坐标原点 O 的坐标是(0,0,0)；x 轴上点的坐标是 $(x,0,0)$；y 轴上点的坐标是$(0,y,0)$；z 轴上点的坐标是$(0,0,z)$；坐标面 xOy, yOz, zOx 上点的坐标依次为$(x,y,0)$，$(0,y,z)$，$(x,0,z)$.

2. 空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，过 M_1 与 M_2 各作三个分别垂直于三个坐标轴的平面，六个平面形成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体（如图 6-3 所示），它的各棱与坐标轴平行，其长度分别为

$$|M_1P| = |x_2 - x_1|,$$
$$|M_1Q| = |y_2 - y_1|,$$
$$|M_1R| = |z_2 - z_1|.$$

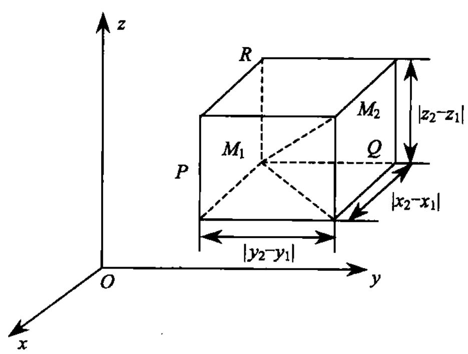

图 6-3

M_1 与 M_2 两点间的距离为

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{6-1}$$

这就是空间两点间的距离公式.

点 $M(x,y,z)$ 与原点 O 的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{6-2}$$

若点 M_1 与 M_2 位于 xOy 面内时，则 $M_1(x_1,y_1,0)$ 与 $M_2(x_2,y_2,0)$ 之间的距离为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

即是我们已知的平面上两点间距离公式.

【例 1】在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

解：因为所求的点 M 在 z 轴上，所以设该点为 $M(0,0,z)$，依题意有

$$|MA|=|MB|,$$

即 $\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}$

解得

$$z=\frac{14}{9},$$

所以所求的点为 $M\left(0,0,\dfrac{14}{9}\right)$.

【例 2】某公司放出甲、乙两只彩色气球，在某一时刻甲气球在公司东 300m，北 400m，高 300m 处；乙气球在公司的正南 200m，高为 500m 处，求此刻甲乙两气球之间的距离.

解：设公司的位置为空间直角坐标系的原点 O，正南方向为 x 轴的正向，正东方向为 y 轴的正向，向上为 z 轴的正向，于是在此坐标系中，甲、乙两彩色气球的坐标分别为（−400，300，300），（200，0，500），由两点间距离公式，得

$$d=\sqrt{(200+400)^2+(0-300)^2+(500-300)^2}=700$$

即此时刻甲、乙两气球的距离为 700m.

6.1.2　向量的坐标表示

我们曾学过向量的基本概念，现归纳如下.

(1) 向量：既有大小，又有方向的量，记作 $\boldsymbol{a}$ 或 $\overrightarrow{M_1M_2}$；

(2) 向量的模：向量的大小，记作 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$；

(3) 自由向量：不考虑起点，只考虑大小和方向的向量（可平行移动的向量）；

(4) 零向量：模等于零的向量，（它的方向可以是任意的）记作 0；

(5) 负向量：与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相反的向量，记作 $-\boldsymbol{a}$；

(6) 向量相等：大小相等方向相同的两个向量，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；

(7) 向量平行：方向相同或方向相反的两个向量，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；

(8) 向径：以坐标原点 O 为起点 M 点为终点的向量叫做向径，记作 $\overrightarrow{OM}$ 或 $\boldsymbol{r}$；

(9) 单位向量：模等于 1 的向量叫做单位向量，记作 $\boldsymbol{e}$；与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记作 $\boldsymbol{e}_a$.

显然，对任一向量$\boldsymbol{a}$，有$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$，即$\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

例如，作用于物体上的力$\boldsymbol{F}$，需表示为$\boldsymbol{F}=|\boldsymbol{F}|\boldsymbol{e}_F$，$|\boldsymbol{F}|$表示了这个力的大小，而$\boldsymbol{e}_F$这个单位向量就表示了力的方向.

1. 向量的坐标

在空间直角坐标系中，给定一向量$\boldsymbol{a}$，将$\boldsymbol{a}$平行移动，使它的起点与坐标原点重合，记$\boldsymbol{a}$的终点为M，则$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$（其实$\overrightarrow{OM}$就是前面定义的向径），如图 6-4 所示，设点$M$的坐标是$(a_x,a_y,a_z)$，则它由向量$\boldsymbol{a}$惟一确定，于是向量$\boldsymbol{a}$就惟一地对应着一个有序实数组$(a_x,a_y,a_z)$，反过来，任意给定一个有序的实数组$(a_x,a_y,a_z)$，在空间便惟一确定一点$M(a_x,a_y,a_z)$，于是也就惟一地确定了一个向量$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，这样空间向量$\boldsymbol{a}$与三元有序实数组$(a_x,a_y,a_z)$就建立了一一对应的关系，称$(a_x,a_y,a_z)$为向量$\boldsymbol{a}$的坐标. 记作

$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z).$$

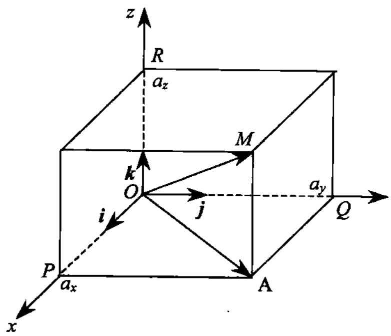

图 6-4

这就是向量的坐标表示. 可见，若$\boldsymbol{a}$的起点在原点，则$\boldsymbol{a}$的坐标即是终点的坐标.

为了便于计算，有时要用到向量$\boldsymbol{a}$的分解式.

在x轴、y轴、z轴的正向上分别取单位向量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，称它们为这一坐标系的基本单位向量，如图 6-4 所示. 设有 $OP=a_x,OQ=a_y,OR=a_z$，于是有 $\overrightarrow{OP}=a_x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=a_y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=a_z\boldsymbol{k}$.

根据向量的加法法则

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

就是 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，

或 $\overrightarrow{OM}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$.

上式称为向量$\boldsymbol{a}$按基本单位向量的分解式.

注意：量$\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OR}$分别叫做向量$\overrightarrow{OM}$在$x$轴、$y$轴、$z$轴上的分（向）量，与向量的坐标有本质的区别. 向量$\boldsymbol{a}$在坐标轴上的分向量是三个向量$a_x\boldsymbol{i}$，$a_y\boldsymbol{j}$，$a_z\boldsymbol{k}$；而向量$\boldsymbol{a}$的坐标是三个有序实数a_x,a_y,a_z.

【例 3】已知两点M_1,M_2，它们的坐标分别为(x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2)，求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$.

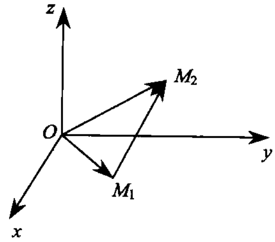

图 6-5

解：由图 6-5 可得

$$x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},$$

$$x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$

于是 $$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1},$$

或记为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

上式说明，任一向量的坐标就是向量的终点与起点坐标之差．例如，$M_1(1,2,3)$，$M_2(-2,3,1)$ 为已知两点，则向量

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(-2-1)\boldsymbol{i}+(3-2)\boldsymbol{j}+(1-3)\boldsymbol{k}=-3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$$

或写成 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-3,1,-2)$．

利用向量的坐标，便可以用代数的方法研究向量的加法、减法及向量与数的乘法运算．设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\text{，}\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$$

由向量加法的交换律与结合律，以及向量数乘的结合律与分配律，有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}\text{；}$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}\text{；}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}.$$

即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,\ a_y+b_y,a_z+b_z)\text{；}$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x,\ a_y-b_y,a_z-b_z)\text{；}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

由此可见，对向量进行加、减与数乘，只须对向量的各个坐标分别进行相应的数值运算．

利用向量的坐标还可得两向量平行的充要条件．

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$

当向量 $\boldsymbol{b}\neq 0$ 时，向量 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$ 相当于 $\boldsymbol{a}=\lambda\,\boldsymbol{b}$，用坐标表示就是

$$(a_x,a_y,a_z)=\lambda(b_x,b_y,b_z)=(\lambda b_x,\lambda b_y,\lambda b_z)\text{，}$$

得

$$a_x=\lambda b_x\text{，}\quad a_y=\lambda b_y\text{，}\quad a_z=\lambda b_z\text{，}$$

即

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

就是说 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 对应坐标成比例．反过来，若

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\text{，}$$

设比值为 λ，可得 $\boldsymbol{a}=\lambda\,\boldsymbol{b}$．

于是得结论：两向量平行的充要条件是两向量对应的坐标成比例．

注意：规定在上面比例式中，如果某个分母为零，表示相应的分子也为零，比如 b_y 为零，应理解为 a_y 也为零．

【例 4】设 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$ 为已知两点，而点 M 分向量 $\overrightarrow{AB}$ 为两个向量 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\overrightarrow{MB}$，且使它们的比值为数 λ $(\lambda\neq-1)$，即 $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}=\lambda$，求 M 点的坐标．

解：设 $M(x,y,z)$，

则 $\overrightarrow{AM}=(x-x_1)\,\boldsymbol{i}+(y-y_1)\,\boldsymbol{j}+(z-z_1)\,\boldsymbol{k}$，

$\overrightarrow{MB}=(x_2-x)\,\boldsymbol{i}+(y_2-y)\,\boldsymbol{j}+(z_2-z)$，

由 $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}=\lambda$，得 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$，于是

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),\quad y-y_1=\lambda(y_2-y),\quad z-z_1=\lambda(z_2-z),$$

即
$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{6-3}$$

如果 $\lambda=1$，则 M 为 A 与 B 的中点，其坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}. \tag{6-4}$$

公式（6-3）称为有向线段的定比分点公式．公式（6-4）称为有向线段的中点坐标公式．

下面研究如何用向量的坐标来表示向量的大小与方向．

设非零向量 $\boldsymbol{a}=a_x\,\boldsymbol{i}+a_y\,\boldsymbol{j}+a_z\,\boldsymbol{k}$，根据空间两点间距离公式得向量的模为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^{\,2}+a_y^{\,2}+a_z^{\,2}}\,. \tag{6-5}$$

公式（6-5）称为用向量坐标表示模的公式．

向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向如何确定呢？如图 6-6 所示，设 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴正向的夹角分别为 α,β,γ $(0\leqslant\alpha\leqslant\pi,0\leqslant\beta\leqslant\pi,0\leqslant\gamma\leqslant\pi)$，则 $\boldsymbol{a}$ 可用 α,β,γ 来表示方向，我们把这三个角叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角．方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦．由于 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，$0\leqslant\beta\leqslant\pi$，$0\leqslant\gamma\leqslant\pi$，方向余弦与方向角一一对应，为方便，实际中只求方向余弦．

从图 6-6 可以得到向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标 (a_x,a_y,a_z) 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的模 $|\boldsymbol{a}|$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 之间具有如下关系

$$a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,\quad a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,\quad a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma\,.$$

因此方向余弦可表示成

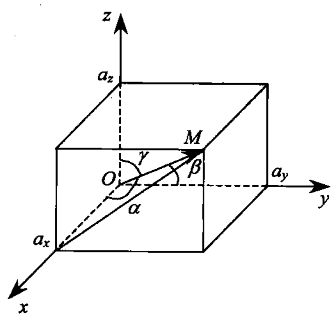

图 6-6

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^{\,2}+a_y^{\,2}+a_z^{\,2}}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^{\,2}+a_y^{\,2}+a_z^{\,2}}}, \tag{6-6}$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^{\,2}+a_y^{\,2}+a_z^{\,2}}}.$$

把上面三个等式两边分别平方后相加，得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

上式表明了三个方向余弦之间的关系．

综上所述：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= (a_x, a_y, a_z) \\ &= (|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,\ |\boldsymbol{a}|\cos\beta,\ |\boldsymbol{a}|\cos\gamma) \\ &= |\boldsymbol{a}|(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).\end{aligned} \tag{6-7}$$

式（6-7）清楚表明向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小是 $|\boldsymbol{a}|$，方向由 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 确定.

由于向量 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$，比较式（6-7）得

$$\boldsymbol{e}_a = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

即

$$\boldsymbol{e}_a = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}, \tag{6-8}$$

式（6-8）表明，单位向量 $\boldsymbol{e}_a$ 的坐标正是向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

【例 5】已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$，$M_2(1,3,0)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解：因为

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (1-2, 3-2, 0-\sqrt{2}) = (-1, 1, -\sqrt{2}),$$

所以

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2;$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2},\quad \cos\beta = \frac{1}{2},\quad \cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha = \frac{2}{3}\pi,\quad \beta = \frac{\pi}{3},\quad \gamma = \frac{3}{4}\pi.$$

【例 6】已知三力 $\boldsymbol{F}_1=(1,2,3)$，$\boldsymbol{F}_2=(-2,3,-4)$，$\boldsymbol{F}_3=(3,-4,5)$ 同时作用于一点，求合力 $\boldsymbol{F}$ 的大小与方向余弦.

解：由力学理论知道，共点力的合力为

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = (1-2+3, 2+3-4, 3-4+5) = (2,1,4).$$

故力的大小为

$$|\boldsymbol{F}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{21},$$

方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{21}},\quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{21}},\quad \cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{21}}.$$

【例 7】已知两点 $A(2,0,3)$ 和 $B(3,-1,5)$，求与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量及方向余弦.

解：因为

$$\overrightarrow{AB} = (3-2, -1-0, 5-3) = (1,-1,2).$$

所以

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

设 $\boldsymbol{e}_{AB}$ 为和 $\overrightarrow{AB}$ 方向一致的单位向量，则有

$$\boldsymbol{e}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{(1,-1,2)}{\sqrt{6}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right),$$

方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}},\quad \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{6}},\quad \cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

6.1.3 数量积和向量积

1. 两向量的数量积

设物体受重力 $\boldsymbol{F}$ 作用沿斜面下滑（如图 6-7 所示），位移是 $\boldsymbol{s}$. 由力学知道，重力所做的功可用下式表达

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta .$$

这里功 W 是一个数量，我们把这个数量称为向量 $\boldsymbol{F}$ 和位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积.

（1）数量积的定义：

定义 1 设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ ，它们的夹角为 θ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ ，将数值 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的数量积．记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ ，即

$$a\cdot b=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta . \tag{6-9}$$

因为两向量的数量积的记号是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中间加一黑点，所以又将数量积称为点积（也称内积）.

由数量积定义可知引例中重力所做的功为

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s} .$$

（2）数量积的几何意义：

如图 6-8 所示，向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合，从向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点 M 向向量 $\boldsymbol{b}$ 作垂线 MN ，则 $ON=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$. 称 ON 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影，它是一个数值，记作 $\boldsymbol{a}_b=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ ，于是有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}_b$ ，也有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}_a$.

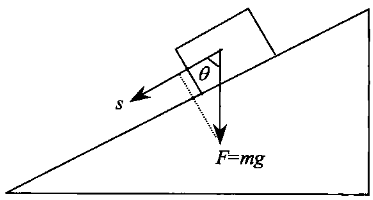

图 6-7

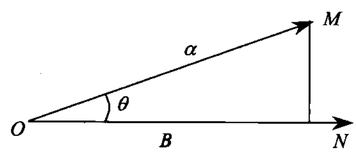

图 6-8

因此两向量的数量积的几何意义是一向量的大小与另一向量在其上的投影的乘积.

（3）数量积的性质：

① $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

因为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角 $\theta=0$ ，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2$.

②数量积满足交换律、分配律.

a．交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

b．分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

③数量积与数乘满足结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

④向量 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

因为对于两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ ，如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，由于 $|\boldsymbol{a}|\neq0$，$|\boldsymbol{b}|\neq0$，所以 $\cos\theta=0$ ，从而

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$．反之，如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\cos\theta=0$，于是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0.$$

由于零向量的方向是任意的，故可认为零向量与任何向量都垂直，因此上述结论对任意两向量均成立.

【例 8】试用向量的数量积证明三角形的余弦定理.

证：设在 ΔABC 中，$\angle BCA=\theta$（如图 6-9 所示），$|BC|=a$，$|CA|=b$，$|AB|=c$．记

$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=b$，$\overrightarrow{AB}=c$，则

$$|\boldsymbol{c}|^2=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}).$$
$$=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$
$$=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

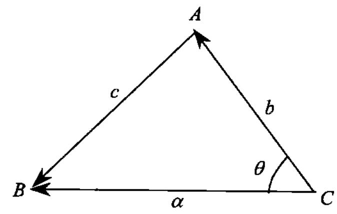

图 6-9

由 $|\boldsymbol{a}|=a$，$|\boldsymbol{b}|=b$，$|\boldsymbol{c}|=c$，即得

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta.$$

（4）数量积的坐标表示：

设　$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$

则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$$
$$=a_xb_x\,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+$$
$$a_yb_y\,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_zb_x\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k},$$

由于基本单位向量 i，j，k 互相垂直，所以

$$i\cdot j=j\cdot k=k\cdot i=0,$$
$$j\cdot i=k\cdot j=i\cdot k=0,$$

又　$i\cdot i=|i|^2=1$，$j\cdot j=|j|^2=1$，$k\cdot k=|k|^2=1$，

所以

$$a\cdot b=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\tag{6-10}$$

这就是两向量的数量积的坐标表达式，该式表明两向量的数量积等于它们对应坐标的乘积之和.

由于 $a\cdot b=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，所以当 $\boldsymbol{a}\neq 0$，$\boldsymbol{b}\neq 0$ 时，有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$
$$=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}\tag{6-11}$$

这就是两向量夹角余弦的坐标表示式.

【例 9】计算 $\boldsymbol{a}=(2,0,-3)$，$\boldsymbol{b}=(-4,1,1)$ 的数量积.

解：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times(-4)+0\times1+(-3)\times1=-11$.

【例 10】已知向量 $\boldsymbol{x}=x_1\,\boldsymbol{i}+x_2\,\boldsymbol{j}+x_3\,\boldsymbol{k}$ 与三个向量 $\boldsymbol{a}=i+j$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 的数量