面向21世纪高等数学改革教材

高等数学

GAODEN SHUXUE

重庆大学数学系 编

下册

重庆出版社

面向二十一世纪高等数学改革教材

高 等 数 学

（下册）

重庆大学数学系　编

重 庆 出 版 社
2000年8月

目　录

10%

可微的条件

公式的使用条件

第八章　向量与空间解析几何

在数学发展过程中，"数"与"形"总是形影不离。解析几何学的产生是数学史上一个划时代的成就。它通过点和坐标的对应，把抽象的"数"与空间的"点"统一起来，从而使得人们可以用代数方法研究几何问题，也可以用几何方法解决代数问题，同时也为数学的其它分支如分析学、方程学等提供了几何背景，促进了数学多分支的共同发展。"空间解析几何学"是我们认识空间图形，进一步学习数学其它问题的不可缺少的理论知识。

"向量"是对既有大小，又有方向的量的抽象。向量及其理论不仅在现代工程技术中有着十分广泛的应用，是一种重要的数学工具，同时也是研究许多数学问题(如空间解析几何学)的重要的基础。

本章首先建立空间直角坐标系，然后在空间直角坐标系中建立向量的概念，并研究向量的基本代数运算及乘法运算。在第四节中介绍了一元向量值函数及其分析运算。从第五节开始，讨论空间解析几何学的一般问题。先以向量为工具，讨论空间的平面和直线，然后讨论空间曲面、曲线的一般方程及其特点。

§8.1　空间直角坐标系与空间向量

一、空间直角坐标系

与平面的情形一样，要建立空间几何量与数之间的联系，就得建立坐标系。在空间中，常用的坐标系是直角坐标系。

过空间一定点 O，作三条相互垂直、具有相同单位长度的数轴 Ox、Oy、Oz，且这三条数轴的正向符合右手法则：以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴的正向转过 $\frac{\pi}{2}$ 角度后指向 y 轴的正向时，竖起的大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图 1.1 所示。这样就建立了一个空间直角(右手)坐标系，称为 $Oxyz$ **直角坐标系**(Space Vertical Coordinate)。点 O 称为坐标原点，Ox 轴称为横轴或 x 轴，Oy 轴称为纵轴或 y 轴，Oz 轴称为竖轴或 z 轴。

直角坐标系 $Oxyz$ 的三个坐标轴两两决定互相垂直的三个平面，称为坐标面。由 x 轴和 y 轴确定的坐标面称为 xOy 平面，同样还有 yOz 平面和 zOx 平面。这三个坐标面把空间分为八个部分，每个部分称为卦限，用大写罗马数字 Ⅰ、Ⅱ、…、Ⅷ 表示，如图 1.2 所示。在 xOy 平面之上，yOz 平面之前，zOx 平面之右的卦限称为第 Ⅰ 卦限。在 xOy 平面上方的其余三个卦限按逆时针方向依次称为第 Ⅱ 卦限、第 Ⅲ 卦限和第 Ⅳ 卦限。在 xOy 平面下方的四个卦限，规定第 Ⅴ 卦限在第 Ⅰ 卦限之下，其余三个卦限也按逆时针方向依次称为第 Ⅵ 卦限、第 Ⅶ 卦限、第 Ⅷ 卦限。

设 P 是空间任意一点，过 P 点分别作三个与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的平面，这三个平面与 x 轴、y 轴和 z 轴的交点分别为 Q、R、S(如图 1.3)。点 Q、R、S 在相应的坐标轴上的坐标依次为 x、

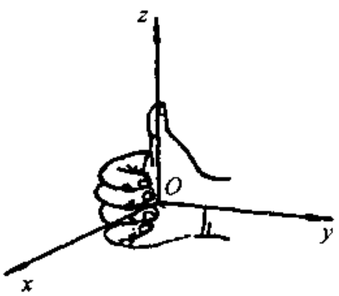

图 1.1

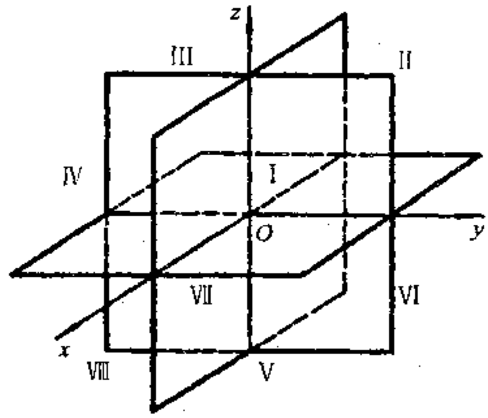

图 1.2

y、z，于是空间点 P 唯一确定了一个有序数组(x,y,z)。反之，对给定的有序数组(x,y,z)，若在 x 轴、y 轴和 z 轴上分别取坐标为 x、y、z 的点 Q、R、S，过点 Q、R、S 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的三个平面，这三个平面有且仅有唯一的交点 P，因而有序数组(x,y,z)唯一对应于空间一点 P。这样，通过空间直角坐标系，空间点 P 与有序数组(x,y,z)之间就建立起了一一对应的关系。有序数组(x,y,z)称为点 P 的**坐标**，并把点 P 记为 $P(x,y,z)$，其中第一个数 x 称为**横坐标**，第二个数 y 称为**纵坐标**，第三个数 z 称为**竖坐标**。

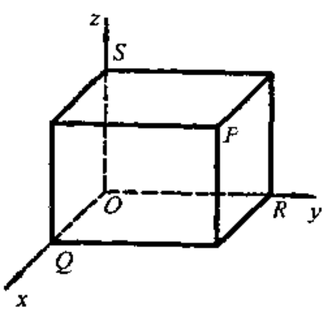

图 1.3

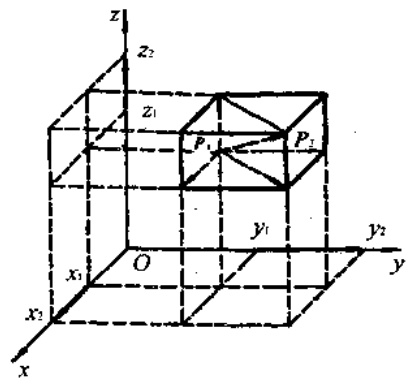

图 1.4

原点 O 的坐标是$(0,0,0)$，xOy 平面上点的坐标为$(x,y,0)$，yOz 平面和 zOx 平面上点的坐标分别为$(0,y,z)$、$(x,0,z)$，x 轴、y 轴和 z 轴上点的坐标分别为$(x,0,0)$、$(0,y,0)$和$(0,0,z)$。

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$是空间的两点，过 P_1 和 P_2 各作三个垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面，这六个平面构成一个以 P_1P_2 为对角线的长方体，如图 1.4 所示。该长方体三个边的长分别是

$$|x_2-x_1|,\ |y_2-y_1|,\ |z_2-z_1|,$$

由勾股定理知，点 P_1 与点 P_2 的距离 $|P_1P_2|$ 为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}。$$

这就是两点间的距离公式。

二、空间向量

在长期的社会实践和科学实践中，人们发现有些事物可用数量来刻画其特征，例如某物体的长、宽、高、质量、体积、重心，空间两点之间的距离，时间，物体的温度等等。我们把这类量称为标量。然而有一些事物对象仅仅用数量来描述是不够的。例如，用一个力拉动一块石头，如果只说明力的大小而不指明力的作用方向，就无法确定该作用力所产生的效果，如图 1.5(a)。又如要说明流体的流速，仅说明其大小也是不行的，还必须指出速度的方向，如图 1.5(b)。讨论由电流产生的电磁场，也必须指明由电流产生的电磁场的大小及方向，如图 1.5(c)。可见诸如此类的量，我们必须用一种既有大小又有方向的量来表示，这种量即为向量。其定义如下。

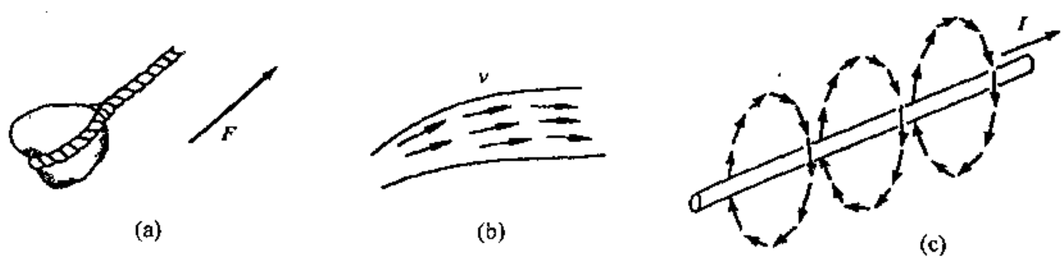

图 1.5

定义 1 既有大小又有方向的量称为**向量**或**矢量**(Vector)。

几何上，向量用有向线段来表示，如图 1.6。用有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向。如果向量的起点与终点分别为 A、B，那么向量记为 $\overrightarrow{AB}$。为简便起见，向量也可以用一个字母冠以箭头来表示，如 $\vec{a}$，或用黑体字母表示，如 $\boldsymbol{a}$。

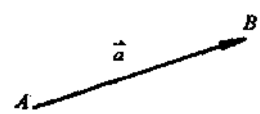

图 1.6

向量 $\vec{a}$ 的大小称为**模**(Vector Norm)，记为 $|\vec{a}|$。模为 1 的向量称为**单位向量**(Unit Vector)。模为 0 的向量称为**零向量**，记为 $\vec{0}$。规定零向量的方向是任意的。

定义 2 如果两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的大小相同，方向一致，则称向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 相等，记为 $\vec{a}=\vec{b}$。

根据定义 2，任何向量都与起点无关，只要其大小、方向确定了，向量的起点在空间什么位置都是一样的。这样的向量称为**自由向量**。自由向量可以在空间自由平行移动而不改变其性质。因此向量的大小和方向是向量的两个要素。与自由向量对应的是**非自由向量**，即起点不能移动的向量。本教材中如不加以特别申明，所研究的向量均为自由向量。

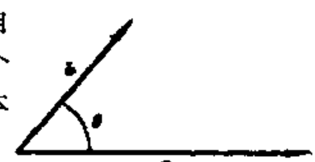

图 1.7

定义 3 设有两非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$，将它们平移使起点重合，这时两向量所在射线之间的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，记为 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$，如图 1.7 所示。

夹角为 0 或 π 的两个向量叫做**平行向量**，即方向一致或相反的两向量叫做平行向量。夹角为 $\frac{\pi}{2}$ 的两个向量叫做**垂直向量**。

三、空间向量的坐标

为了建立向量与数量之间的关系，我们把向量放在空间直角坐标系中进行研究。

首先建立向径的坐标。在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，以原点 O 为起点、任意点 $P(x,y,z)$ 为终点的向量称为点 P 的**向径**(或**矢径**)，记为 $\vec{r}$，即 $\vec{r}=\overrightarrow{OP}$。由于向径 $\vec{r}$ 的起点是固定的，因而向径 $\vec{r}$ 与其终点 P 之间构成一一对应关系，也就是向径 $\vec{r}$ 与其终点 P 的坐标 (x,y,z) 构成一一对应关系，如图 1.8 所示。故称 x、y、z 为向径 $\vec{r}$ 的坐标，并记向径 $\vec{r}$ 为

$$\vec{r}=\{x,y,z\}。$$

$\{x,y,z\}$ 称为向径的坐标表达式。

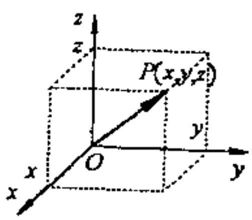

图 1.8

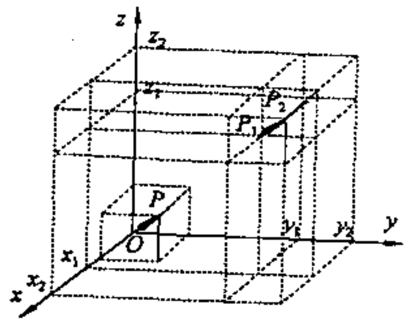

图 1.9

再建立空间向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标。设其起点坐标为 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，终点坐标为 $P_2(x_2,y_2,z_2)$。将 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 平移，使其起点 P_1 与原点 O 重合，则向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 唯一对应于一个向径 $\overrightarrow{OP}$，且 $\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP}$。如图 1.9 所示，经过平移后，$\overrightarrow{OP}$ 的终点 P 的坐标为 $(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，故有

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}。$$

由以上讨论知，任何一个向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 唯一对应于有序数组 $\{x_2-x_1,y_2-y_2,z_2-z_1\}$。反之，任意有序数组 $\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$ 唯一对应于一向径 $\overrightarrow{OP}$，在自由向量的意义上，也就是唯一对应于一个以 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 为起点、$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量即 $\overrightarrow{P_1P_2}$。故把 x_2-x_1、y_2-y_1、z_2-z_1 称为向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的**坐标**，$\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$ 称为以 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 为起点、$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标表达式，并记

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}。\tag{1.1}$$

上式表明，$\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标等于其终点的坐标减去其起点的坐标。

由于任意一有序数组 a_x,a_y,a_z 与一个(自由)向量是一一对应的，故向量也可表示为 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$。

例如，设有点 $P_1(1,2,3)$，$P_2(2,3,4)$，那么向量 $\overrightarrow{P_1P_2}=\{2-1,3-2,4-3\}=\{1,1,1\}$。

四、向量的模及其方向余弦

1. 向量的模

设向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的起点和终点的坐标分别为$P_1(x_1,y_1,z_1)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$，向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的模$|\overrightarrow{P_1P_2}|$即为点$P_1$与$P_2$的距离，所以

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}。\tag{1.2}$$

若向量为$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，则其模为

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}。\tag{1.3}$$

2. 向量的方向余弦

向量$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$与x轴、y轴、z轴的正向所成的夹角α、β、γ称为向量$\vec{a}$的方向角(Direction Angle)，方向角的余弦$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$称为向量的方向余弦(Direction Cosine)。

将向量$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$的起点平移至原点O，这样向量$\vec{a}$与向径$\overrightarrow{OP}$相对应，如图1.10所示。利用向径$\overrightarrow{OP}$与三个坐标轴之间的关系可得向量$\vec{a}$的三个方向余弦为

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_y^2}},\\
\cos\beta &= \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_y^2}},\\
\cos\gamma &= \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_y^2}}。
\end{aligned}\tag{1.4}$$

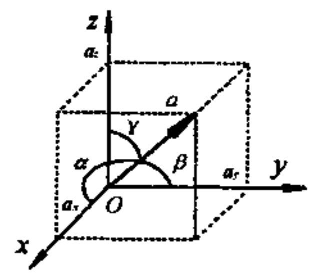

图1.10

容易证明：

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1,\tag{1.5}$$

即向量的三个方向余弦的平方和等于1。

由公式(1.3)和公式(1.4)可得以下结论：

1) 零向量的坐标为$\vec{0}=\{0,0,0\}$；

2) 单位向量$\vec{a}$的坐标就是其三个方向余弦，即$\vec{a}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$；

3) 设向量$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则$\vec{a}=\vec{b}$的充分必要条件是

$$a_x=b_x,a_y=b_y,a_z=b_z,$$

即两向量相等的充分必要条件是它们对应的坐标相等。

由公式(1.2)～(1.5)知，若给定了向量的坐标表达式，就可以完全确定出向量，即向量的模与方向。反之，若给定向量的模与方向余弦，就可以确定向量的坐标表达式。因此，无论是给定向量的坐标表达式还是给定向量的模与方向余弦都可以完全确定向量。

例　设在空间直角坐标系中有点$A(1,3,2)$，$B(2,-3,4)$，求向量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AB}$的模及$\overrightarrow{AB}$的方向余弦。

解　由公式(1.1)，得

$$\overrightarrow{AB}=\{2-1,-3-3,4-2\}=\{1,-6,2\},$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{41},$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{41}},\cos\beta=\frac{-6}{\sqrt{41}},\cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{41}}。$$

本节我们定义了空间向量并建立了空间向量的坐标。实际上，在许多场合下，还需要研究平

面向量，这时只需要把向量放在平面坐标系中，引入平面向量的坐标。如在平面直角坐标系 Oxy 中，由点 $P_1(x_1,y_1)$ 到 $P_2(x_1,y_2)$ 的向量为$\overrightarrow{P_1P_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1\}$，其模为$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，等等。在此基础上，还可以定义与下面两节同样的向量的各种运算。

习 题 8－1

1. 在空间直角坐标系中，描出下列各点：
   $A(1,3,2)$，$B(2,-3,4)$，$C(-3,2,-2)$，$D(3,2,0)$，$E(0,5,-3)$，$F(0,0,2)$。
2. 求点(a,b,c)关于
   (1) 各坐标面对称的点的坐标；
   (2) 各坐标轴对称的点的坐标；
   (3) 原点对称的点的坐标。
3. 确定空间直角坐标系中分别位于八个卦限中点的坐标的符号。
4. 已知点 $P_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $P_2(3,0,2)$，计算向量$\overrightarrow{P_1P_2}$及其模、方向余弦。
5. 已知一向量的模为 3，其方向角 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，$\beta=\dfrac{2\pi}{3}$，求该向量的坐标。
6. 若向量 $\vec{a}=\vec{b}$，问是否有$|\vec{a}|=|\vec{b}|$?反之，命题成立吗?为什么?

§8.2 向量的代数运算

向量的代数运算是指向量加法、向量减法及数量乘向量。应用向量的坐标可以方便地进行向量的代数运算，并讨论其性质。

一、向量的代数运算

1. 向量的加法

由物理学知道，两个力的合力、两个速度的合成速度等都符合平行四边形法则或三角形法则。这里我们在此基础上抽象出一般向量的加法运算概念。

定义 1 设有向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$，以任意点 A 为始点，作$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，以 AB、AD 为边作平行四边形 $ABCD$，规定对角线上的向量$\overrightarrow{AC}$ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，记为 $\vec{a}+\vec{b}$，如图 2.1(a) 所示。

图 2.1

这一规则叫做向量相加的平行四边形法则。但此法则不能进行两个平行向量的加法运算，因此我们再给出一个蕴含了平行四边形法则的加法三角形法则。

定义 1' 设有向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$，以任意点 A 为始点，作 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，以 $\vec{a}$ 的终点 B 为起点作向量 $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，规定向量 $\overrightarrow{AC}$ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，记为 $\vec{a}+\vec{b}$，如图 2.1(b) 所示。

不论是平行四边形法则还是三角形法则都只是从几何上定性地描述两个向量的加法，我们还无法从量上确定向量和的模及方向，为此还要用向量的坐标来刻画向量的加法。

设向量 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，其起点在原点 O，终点为点 A，向量 $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，其起点置于 A 处，终点为点 B，如图 2.2 所示。应用三角形法则得和向量 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OB}$。令点 B 的坐标为 (x,y,z)，则 $\overrightarrow{OB}=\{x,y,z\}$。一方面，以 A 为起点、B 为终点的向量 $\overrightarrow{AB}=\{x-a_x,y-a_y,z-a_z\}$；另一方面，向量 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，因而有

$$\{x-a_x,y-a_y,z-a_z\}=\{b_x,b_y,b_z\},$$

故

$$x=a_x+b_x,y=a_y+b_y,z=a_z+b_z,$$

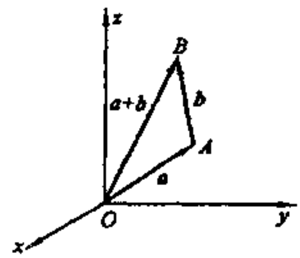

图 2.2

于是得向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 加法的坐标运算表达式：

$$\vec{a}+\vec{b}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\}, \tag{2.1}$$

即两向量之和等于两向量对应坐标之和。

向量的加法满足以下运算规律：

1) 交换律 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$；

2) 结合律 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$。

这两条运算规律可用向量加法的坐标运算进行证明，请读者自行练习。

2. 向量的减法

与向量 $\vec{a}$ 大小相等，方向相反的向量称为 $\vec{a}$ 的**负向量**或**反向量**，记为 $-\vec{a}$。

定义 2 向量 $\vec{a}$ 减 $\vec{b}$ 为 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$。

如果把向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的起点放在一起，那么 $\vec{a}-\vec{b}$ 就是由 $\vec{b}$ 的终点到 $\vec{a}$ 的终点的向量，如图 2.3。

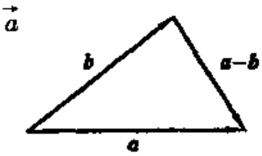

图 2.3

规定，对任意向量 $\vec{a}$，有 $\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$。

设向量 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$-\vec{a}=\{x,y,z\}$，因为

$$\vec{a}-\vec{a}=\vec{a}+(-\vec{a})=\{a_x+x,a_y+y,a_z+z\}=\{0,0,0\},$$

故有 $x=-a_x,y=-a_y,z=-a_z$，即负向量 $-\vec{a}=\{-x,-y,-z\}$。

设向量 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，根据向量减法的定义及负向量的坐标表示可得向量减法的坐标运算表达式：

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\}。 \tag{2.2}$$

3. 向量与数量的乘法

定义 3 对任意的 $\lambda\in R$ 和向量 $\vec{a}$，规定 λ 与 $\vec{a}$ 的乘积为一个向量，记为 $\lambda\vec{a}$。该向量的模与方向规定如下：

1) $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$；

2) 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$。

向量与数量的乘法又称为数乘。实际上，数 λ 起作拉伸或压缩向量的模和改变向量方向的

作用,如图 2.4 所示。

图 2.4

下面我们来推导向量数乘运算的坐标运算表达式。设 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,其方向角为 α、β 和 γ,由第一节公式(1.4),得

$$a_x=|\vec{a}|\cos\alpha,\ a_y=|\vec{a}|\cos\beta,\ a_z=|\vec{a}|\cos\gamma。\tag{2.3}$$

又设 $\lambda\vec{a}=\{x,y,z\}$,其方向角为 α'、β' 和 γ'。当 $\lambda>0$ 时,因为 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向,所以 $\alpha'=\alpha,\beta'=\beta,\gamma'=\gamma$,从而

$$x=|\lambda\vec{a}|\cos\alpha'=\lambda|\vec{a}|\cos\alpha=\lambda a_x。$$

同样有 $y=\lambda a_y,z=\lambda a_z$。当 $\lambda<0$ 时,因为 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向,所以 $\alpha'=\pi-\alpha,\beta'=\pi-\beta,\gamma'=\pi-\gamma$,如图 2.5,应用公式(2.3),得

$$x=|\lambda\vec{a}|\cos\alpha'=-\lambda|\vec{a}|\cos(\pi-\alpha)=\lambda a_x。$$

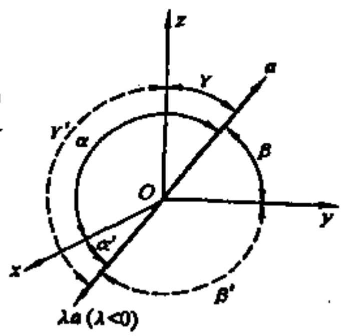

图 2.5

同理有 $y=\lambda a_y,z=\lambda a_z$。当 $\lambda=0$ 时,$x=0,y=0,z=0$,同样亦有 $\lambda a_x=0,\lambda a_y=0$,和 $\lambda a_z=0$。

综上讨论知,对 $\forall\lambda\in R$,有

$$x=\lambda a_x,y=\lambda a_y,z=\lambda a_z。$$

于是得数量 λ 与向量 $\vec{a}$ 数乘的坐标运算表达式:

$$\lambda\vec{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\},\tag{2.4}$$

即数与向量乘积的三个坐标分别等于向量的三个坐标与该数之积。

数与向量的乘积具有以下运算规律:

1) 结合律: $\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$;

2) 第一分配律: $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;

3) 第二分配律: $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$。

以上运算规律请读者运用数乘向量的坐标运算公式自行证明。

应用数乘向量的运算可得向量的几个重要性质。

定理 1 $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$。

证明 因为 $|(-1)\vec{a}|=|-1||\vec{a}|=|\vec{a}|,|-\vec{a}|=|\vec{a}|$,所以向量 $(-1)\vec{a}$ 与 $-\vec{a}$ 具有相同的模。另一方面,由数乘向量的定义及负向量的定义知,向量 $(-1)\vec{a}$ 与 $-\vec{a}$ 同向。故 $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$。

设 $\vec{a}$ 是非零向量,则 $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ 是与 $\vec{a}$ 同方向的单位向量,记为 $\vec{a}^0=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$。易知

$$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^0。\tag{2.5}$$

表达式 $\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^0$ 明确地表示出了向量 $\vec{a}$ 的大小和方向。这种表达式十分有用,在许多学科上经常被采用。应用数乘的计算公式(2.4),得

$$\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left\{\frac{a_x}{|\vec{a}|},\frac{a_y}{|\vec{a}|},\frac{a_z}{|\vec{a}|}\right\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}。\tag{2.6}$$

求 $\vec{a}^0$ 的过程称为单位化向量。由公式(2.6)知,求向量 $\vec{a}$ 的方向余弦只需将其单位化即可。

定理 2 设向量 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,且 $\vec{a}\neq\vec{0}$,$\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,则 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ 的充分必要条件是存在 $\lambda\in R$,使 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$,即

$\vec{a}\times\vec{b}=0$

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}。\tag{2.7}$$

证明 (必要性)若 $\vec{b}=\vec{0}$,则取 $\lambda=0$,就有 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$。若 $\vec{b}\neq\vec{0}$,由 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ 知,$\vec{a}^0\,/\!/\,\vec{b}^0$,所以有 $\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\pm\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$。于是 $\vec{b}=\pm\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$。取 $\lambda=\pm\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$,则有 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$。

(充分性)若 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$,由数乘的定义知 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$。

进一步,若 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$,则

$$b_x=\lambda a_x,b_y=\lambda a_y,b_z=\lambda a_z,$$

即(2.7)成立。

这里若 $b_x=0$(或 $b_y=0$ 或 $b_z=0$),应相应地理解为 $a_x=0$(或 $a_y=0$ 或 $a_z=0$)。

例 1 已知三角形 ABC 的三边 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$,$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$,$\overrightarrow{CA}=\vec{c}$,如图 2.6 所示。设三边的中点依次为 D,E,F,求 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$。

解 因为

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c},$$

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a},$$

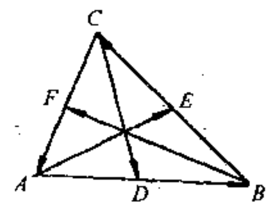

图 2.6

所以

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}$$

$$=\frac{3}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})。$$

又 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$,故 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$,即它们构成一个三角形的三边。

例 2 设 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 为两已知点,AB 线上的点 M 把有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 分为两个有向线段 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\overrightarrow{MB}$,且

$$\frac{AM}{MB}=\lambda(\lambda\neq-1),$$

试求点 M 的坐标 x、y 及 z。

解 如图 2.7 所示,因为 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 在一条直线上,所以有

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}。$$

而 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$,所以

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})。$$

从而 $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB})$,即

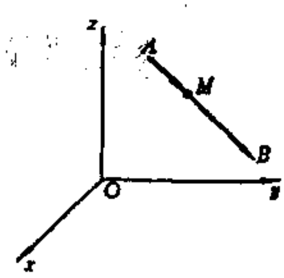

图 2.7

$$\{x,y,z\} = \frac{1}{1+\lambda}(\{x_1,y_1,z_1\} + \lambda\{x_2,y_2,z_2\})$$
$$= \frac{1}{1+\lambda}\{x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2\}。$$

故点 M 的坐标为

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}。$$

点 M 叫做有向线段$\overrightarrow{AB}$ 的定比分点。当 $\lambda = 1$ 时,点 M 是有向线段$\overrightarrow{AB}$ 的中点,其坐标为

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}。$$

二、向量的分解及分量表达式

在物理学中讨论力时,常常把力分解为不同方向上的分力。对一般的向量,也可作同样的分解。

设向量 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$,由向量的代数运算,得

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \{a_x, a_y, a_z\} \\ &= \{a_x,0,0\} + \{0,a_y,0\} + \{0,0,a_z\} \\ &= a_x\{1,0,0\} + a_y\{0,1,0\} + a_z\{0,0,1\}。\end{aligned}$$

记 $\vec{i} = \{1,0,0\}$, $\vec{j} = \{0,1,0\}$, $\vec{k} = \{0,0,1\}$,

于是
$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}。\tag{2.8}$$

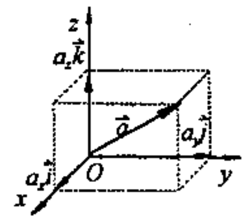

图 2.8

这里,向量 $\vec{i}$ 是与 x 轴同向的单位向量,$\vec{j}$ 是与 y 轴同向的单位向量,$\vec{k}$ 是与 z 轴同向的单位向量。$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 称为**基本单位向量**。

(2.8) 式表明,任何向量 $\vec{a}$ 总可以表示为基本向量 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 的线性组合,组合系数 a_x, a_y, a_z 就是该向量的坐标。可以证明:向量 $\vec{a}$ 按基本向量 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 的线性组合的系数是唯一的。式(2.8) 叫做向量 $\vec{a}$ 的按基本单位向量的**分解表达式**,其中的向量 $a_x\vec{i}$, $a_y\vec{j}$, $a_z\vec{k}$ 分别叫做向量 $\vec{a}$ 在 x 轴、y 轴及 z 轴上的**分向量**,显然,向量 $\vec{a}$ 等于各分向量之和。今后,向量既可以用坐标来表示,又可以用分向量来表示:

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}。$$

习 题 8－2

1. 设向量 $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + (n-1)\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + l\vec{j} + 3\vec{k}$,求向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的模及方向余弦,并求出数 m、n、l,使 $\vec{a} = 2\vec{b}$。
2. 证明:若一四边形对角线互相平分,则它是平行四边形。
3. 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边五等分,设分点依次为 D_1, D_2, D_3, D_4,再把各分点与点 A 连接。试以 $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$, $\overrightarrow{D_2A}$, $\overrightarrow{D_3A}$, $\overrightarrow{D_4A}$。

$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BD}$

4. 设向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + 5\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = -6\vec{a} + 18\vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = 8(\vec{a} - \vec{b})$,试证明 A、B、D 三点共线。
5. 设向量 $\vec{a} = \{4, -3, 4\}$,试单位化向量,并求 $\vec{a}$ 的方向余弦。
6. **静电场力** 设在点 P 处有一个带正电的点电荷,所带电量为 q,在它的周围一点 M 处

$2.\ \vec{E}=|\vec{E}|\cdot\vec{r^0}=k\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\vec{r^0}$

放一单位正电荷(电荷 $q=1$),按库仑定律,点电荷 P 作用在这个单位正电荷上的力电场 $\vec{E}$ 的大小与 q 成正比,与两点间距离的平方成反比,即 $E=k\frac{q}{r^2}$。试写出力 $\vec{E}$ 的表达式。

7. **飞机的速度** 飞机以 250km/h 的空速向北偏东 60° 的方向飞行,有风自西北方向(北偏西 45°)以 50km/h 的速度吹来,求飞机的实际航向和地面速度(所谓地面速度即是合成速度的大小)。

§8.3 向量的乘法运算

一、向量的数量积

1.数量积的概念

在物理学中,如果某物体在恒力 $\vec{F}$ 的作用下沿直线从点 M_0 移动至点 M_1,且力 $\vec{F}$ 与物体的位移成角度 θ,如图 3.1,则力 $\vec{F}$ 所作的功是

$$W=|\vec{F}|\cdot|\overrightarrow{M_0M_1}|\cos\theta,$$

即数量功 W 由两向量按照一定的方式运算而得。数学上我们把向量的这种运算抽象出来,引入向量的一种乘法运算概念。

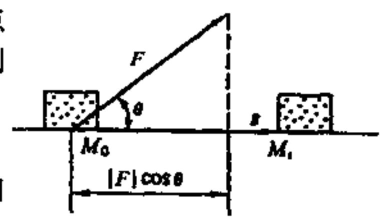

图 3.1

定义 1 规定两向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积(Scalar Product)是一个数量,记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$,并且

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta, \tag{3.1}$$

其中 θ 是向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角。

向量的数量积也叫向量的点积(Dot Product)或内积(Inner Product)。

按照数量积的定义,力 $\vec{F}$ 所做的功可以表示为 $W=\vec{F}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}$。

2.数量积的坐标计算

设有向量 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,$\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,将 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的起点放在一起,以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为两边作一个三角形,如图 3.2 所示。根据余弦定理,三角形的第三边长度为

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta,$$

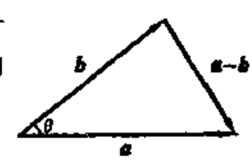

图 3.2

所以

$$\begin{aligned}|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta&=\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2)\\&=\frac{1}{2}\{(a_x^2+a_y^2+a_z^2)+(b_x^2+b_y^2+b_z^2)\\&\quad-[(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2+(a_z-b_z)^2]\}\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z。\end{aligned}$$

由此求得向量数量积的坐标运算公式:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\{a_x,a_y,a_z\}\cdot\{b_x,b_y,b_z\}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z。\tag{3.2}$$

公式(3.2)表明,两向量的数量积等于两向量对应坐标的乘积之和。

3.数量积的运算规律及性质

根据向量数量积的定义及坐标运算公式,对任意向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$,及 λ、$\mu \in R$,向量的数量积满足以下运算规律:

1) 交换律:$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2) 分配律:$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

3) 结合律:$(\lambda\vec{a}) \cdot (\mu\vec{b}) = \lambda\mu(\vec{a} \cdot \vec{b})$。

以上运算规律请读者自己证明。

向量积还具有以下性质。

定理1 设 $\vec{a}$ 是任意向量,则 $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$。

定理2 设向量 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$,$\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$,$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ,则

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}。\tag{3.3}$$

应用数量积的定义容易证明定理1及定理2。

定理3 设向量 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$,$\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$,则 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 的充分必要条件是 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$,即

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0。\tag{3.4}$$

证明 若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$,则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\frac{\pi}{2} = 0$,公式(3.4)成立。反之,若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta = 0$,则必有 $\theta = \frac{\pi}{2}$,或 $|\vec{a}| = 0$,或 $|\vec{b}| = 0$。总之,有 $\vec{a} \perp \vec{b}$。

例1 设向量 $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$,$\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$,求向量 $2\vec{a} + 3\vec{b}$ 的模、$2\vec{a} + 3\vec{b}$ 与 $3\vec{a} - 2\vec{b}$ 夹角 θ 的余弦。

解 因为

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = 2(\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}) + 3(\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) = 5\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k},$$

$$3\vec{a} - 2\vec{b} = 3(\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}) - 2(\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) = \vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k},$$

所以

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{5^2 + 7^2 + 5^2} = 3\sqrt{11},$$

$$|3\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-12)^2} = \sqrt{161}。$$

从而

$$\cos\theta = \frac{(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - 2\vec{b})}{|(2\vec{a} + 3\vec{b})| \cdot |(3\vec{a} - 2\vec{b})|} = \frac{5 \cdot 1 + 7 \cdot 4 - 5 \cdot 12}{3\sqrt{11} \cdot \sqrt{161}} = -\frac{9}{\sqrt{1771}}。$$

例2 **液体的流量** 设密度均匀的液体流过平面 S 上面积为 A 的一个区域,液体在这区域上各点处的流速均为常向量 $\vec{v}$。设 $\vec{n}$ 为垂直于 S 的单位向量,如图3.3(a)。试计算单位时间内流经该区域流向 $\vec{n}$ 所指一方的液体的流量(设液体密度为 ρ)。

解 单位时间内流过这区域的液体组成一个底面积为 A、斜高为 $|\vec{v}|$ 的斜柱体,如图3.3(b)。这个柱体的斜高与底面的垂线的夹角就是 $\vec{v}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角 θ,所以该柱体的高为 $|\vec{v}|\cos\theta$,体积为

$$V = A|\vec{v}|\cos\theta = A\vec{v} \cdot \vec{n}。$$

从而,单位时间内流经该区域流向 $\vec{n}$ 所指一方的液体的流量为