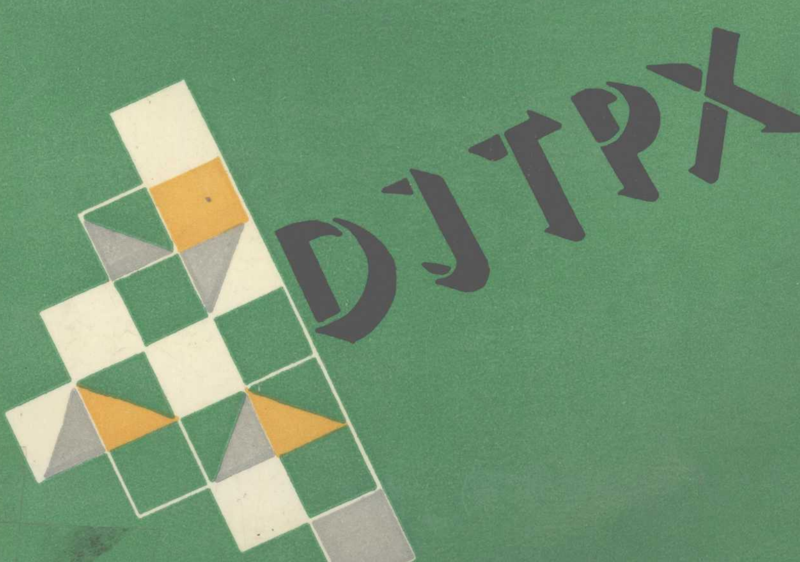
DIANJITUOPUXUE

陆文钊
陈肇姜 编

点集拓扑学



NANJINGDAXUECHUBANSHE
南京大学出版社

点集拓扑学

陆文钊 陈肇姜 编著

（苏）新登字011号

点集拓扑学

陆文钊　陈肇姜　编著

*

南京大学出版社出版

（南京大学校内，邮编：210008）

江苏省新华书店发行　江苏省阜宁印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32　印张 6.75　字数 152千

1995年8月第1版　　1995年8月第1次印刷

印数1—1000

ISBN 7-305-01301-3/O·68

定价：8.00元

编 者 的 话

1979年我校为基础数学专业三年级学生开设"初等拓扑学",为此编写了该课程的讲义,内容包括点集拓扑学初步及代数拓扑学中基本群部分。随后又为四年级开设选修课之需编写了"点集拓扑学讲义",在"初等拓扑学"的基础上进一步加深点集拓扑的内容。两份讲义使用多年来(其中"初等拓扑学"讲义前后用过 10 次)根据教学情况作过数次修改,不断更新。1989年开始,我校把教学计划调整为"点集拓扑学"作为基础数学三年级的课程,同伦论初步作为四年级的选修课,相应地我们合并上述两本讲义中点集拓扑部分并参照综合大学数学专业拓扑学教学大纲改编为"点集拓扑学",把"初等拓扑学"中基本群部分放到"同伦论初步"中讲授。

本书就是在1989年开始使用的"点集拓扑学"讲义的基础上进一步提炼而成。用较少的篇幅组织了较多的内容。考虑到同学们初次接触拓扑学,为避免过于抽象,我们既注意到后续课程的需要,又尽量注意与先行课程的联系,以拓扑空间理论为主线,尽可能借助度量空间及欧氏空间的直观,使同学们了解拓扑学中许多概念产生的具体背景,而概念的抽象性会带来适用范围的广泛性。

全书共七章。第一章是关于集合的预备知识。第二章拓扑空间,是本书的理论基础。第三章连通性质。第四章介绍网与滤子的收敛理论。第五章分离性与紧性,主要介绍$[T_1]$—$[T_4]$公理及各种紧性,Tietze扩张定理,Urysohn度量化

定理及一点紧化。第六章是积空间、商空间和函数空间。第七章介绍仿紧空间及单位分解的概念以及一般的度量化定理。若学时不够，带"*"号的部分可略去，此外有4个附录可供参考备查。

本书正文与习题相辅相成，有机结合，不少有用的结果有意让学生通过自己的练习去获得，这不仅可以加深对基本概念的理解，而且有助于基本技能的训练。题号前标有"△"号者都是正文中要用到的结果。

本书可供基础数学专业本科生及其他专业研究生作教学用书。

编者衷心感谢张克民教授、王体翔副教授对本书的编写提供了不少宝贵的意见和建议。这些意见和建议已为编者采纳。编者还衷心感谢南京大学数学系主任郑维行教授、数学研究所所长仇庆久教授等以及南京大学出版社的有关同志对本书的编写出版给予的支持和帮助。

限于编者水平，有不当之处恳请广大读者批评指正。

编者

1991年2月于南京大学

目　录

第一章　集论初步

§1.1　集合代数

关于集合的朴素的概念，读者都已熟悉。集合及其元素是数学中不加定义的原始概念。本书涉及的集合是指经典集合，即要求构成集合的元素是确定的。给定任一元素 a 以及任一集合A，a属于A(记作$a\in A$)或a不属于 A($a\notin A$) 二者必居且只居其一。以后说集，族，类，系等都是集合的同义词。集合的元素也叫元，成员或干脆就叫“点”。

对于一个集合，除可用语言文字描述外，也可将其元素一一列举在括号内来表示，如$\{a, b, c\}$表示由字母 a，b，c为元素的集合，$\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$ 表示全体自然数组成的集合。通常用符号$\{x|x$ 具有性质$P\}$表示一切具有性质P的那些x组成的集合。例如 $\{x|x$为实数且$x^2=1\}$ 表示由-1，$+1$ 两个元素组成的集合。只含一个元素的集合叫单元集或单点集，含 n 个元素的集合叫 n 元集*，没有任何元素的集合叫空集，记作$\varnothing$。$\{x|x\neq x\}$，$\{x|x$为实数且$x^2=-1\}$都表示空集$\varnothing$。下述常用的集合的记号将贯穿本书：

$\mathbf{R}=\{x|x$为实数$\}$，$\mathbf{Q}=\{x|x$为有理数$\}$，

---

* n元集的确切定义见 §1.3。

$\mathbf{N}=\{n|n$为自然数$\}$，$\mathbf{Z}=\{x|x$为整数$\}$。

为叙述方便，本书还采用下述符号：

设P，Q为两个命题，

1．$P\Rightarrow Q$，表示P蕴含Q，即若P则Q。

2．$P\Leftrightarrow Q$，表示P与Q等价，即P当且仅当Q，亦即P的充要条件是Q。

3．$P\vee Q$，表示P或Q。

4．$P\wedge Q$，表示P与Q，即P且Q。

5．$\forall x\cdots$，表示对于每个(任意的)$x\cdots$。

6．$\exists x\cdots$，表示存在$x\cdots$。

7．s.t.…，表示使得…。

8．i.e.…，表示就是…。

9．】　表示证毕。

定义1.1.1　(1)集A是B的子集，或说A含于B，记作$A\subset B$，意指$x\in A\Rightarrow x\in B$。等价地，也叫B包含A，记作$B\supset A$。

(2)　$A=B\Leftrightarrow(A\subset B)\wedge(B\subset A)$。

(3)　A为B的真子集$\Leftrightarrow(A\subset B)\wedge(A\neq B)$。

$\varnothing$是任一集合A的子集。

由某些集合为元素的集合，叫做集族。由集X的一切子集构成的集族叫做X的幂集，记作$\mathscr{P}(X)$或2^X。提请读者注意，必须区分集合的元素与集合本身这两个不同的概念。例如只含一个元x的集是$\{x\}$，$x\in\{x\}$，但$x\neq\{x\}$。$\varnothing\in\{\varnothing\}$，但$\varnothing\neq\{\varnothing\}$。这恰好表示$\{\varnothing\}$是以$\varnothing$为元的单元集而不是空集。"由所有集合构成的集合"这种说法是不允许的。否则会产生悖论。假定A是由所有集合构成的集合，令

$$B=\{x|x\in A,\ x\notin x\}$$

则$B\in A$. 现若$B\in B$，则由B的定义可见$B\notin B$，得一矛盾。又若$B\notin B$，则由$B\in A$，可见$B\in B$，还是一个矛盾。这就是著名的Russell悖论。

定义1.1.2（1）设$\mathscr{A}$为集合的非空族，则$\mathscr{A}$的并$\cup\mathscr{A}$与交$\cap\mathscr{A}$分别定义为：

$$\cup\mathscr{A}=\cup\{A\mid A\in\mathscr{A}\}=\{x\mid \exists A\in\mathscr{A}\ \text{s.t.}\ x\in A\},$$

$$\cap\mathscr{A}=\cap\{A\mid A\in\mathscr{A}\}=\{x\mid \forall A\in\mathscr{A},\ x\in A\}.$$

（2）设A，B为两个集合，B在A中的(相对)补集$A-B$(或记作$\mathscr{C}_A B$)定义为：

$$A-B=\{x\mid (x\in A)\wedge(x\notin B)\}.$$

注(1) 依集合族的并与交的定义，如果$\mathscr{A}$只含一个集合A时，则$\cup\mathscr{A}=\cap\mathscr{A}=A$.

（2）当$\mathscr{A}=\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\}$时，也记

$$\cup\mathscr{A}=A_1\cup A_2\cdots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i,$$

$$\cap\mathscr{A}=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i,$$

对于两个集合A，B，如果$A\cap B=\varnothing$，就说A与B不相交，否则叫相交。

（3）当在某个问题中所涉及的集合都是某固定集合X的子集时，则子集B在X中的补集$\mathscr{C}_X B$就简称B的补集，并记作$\mathscr{C}B$.

定理1.1.1 设A，B，C为任意集合，则关于并、交、补的运算下述定律成立：

（1）交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$;

（2）结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

（3）分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

（4）De-Morgen 定律

$C-(A\cup B)=(C-A)\cap(C-B)$，

$C-(A\cap B)=(C-A)\cup(C-B)$；

证明　由定义直接验证。▮

这个定理的一般形式如下：

定理1.1.2　设$\mathscr{A}$，$\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$都是集合的非空族，$\mathscr{A}=\mathscr{A}_1\cup\mathscr{A}_2$，$C$为集合，则有

（1）结合律　$\bigcup\mathscr{A}=(\bigcup\mathscr{A}_1)\cup(\bigcup\mathscr{A}_2)$，

$\bigcap\mathscr{A}=(\bigcap\mathscr{A}_1)\cap(\bigcap\mathscr{A}_2)$；

（2）分配律　$C\cap(\bigcup\mathscr{A})=\bigcup\{C\cap A\mid A\in\mathscr{A}\}$，

$C\cup(\bigcap\mathscr{A})=\bigcap\{C\cup A\mid A\in\mathscr{A}\}$；

（3）De-Morgen 定律

$C-(\bigcup\mathscr{A})=\bigcap\{C-A\mid A\in\mathscr{A}\}$，

$C-(\bigcap\mathscr{A})=\bigcup\{C-A\mid A\in\mathscr{A}\}$。

即并之补等于补之交，交之补等于补之并。

证明　作为例子我们证第一个分配律与第一个 De-Morgen定律。

因　$x\in C\cap(\bigcup\mathscr{A})\Leftrightarrow(x\in C)\wedge(x\in\bigcup\mathscr{A})$

$\Leftrightarrow(x\in C)\wedge(\exists A\in\mathscr{A}\ \text{s.t.}\ x\in A)\Leftrightarrow\exists A\in\mathscr{A}\ \text{s.t.}$

$x\in C\cap A\Leftrightarrow x\in\bigcup\{C\cap A\mid A\in\mathscr{A}\}$。

所以　$C\cap(\bigcup\mathscr{A})=\bigcup\{C\cap A\mid A\in\mathscr{A}\}$。

因　$x\in C-(\bigcup\mathscr{A})\Leftrightarrow(x\in C)\wedge(x\notin\bigcup\mathscr{A})$

$\Leftrightarrow(x\in C)\wedge(\forall A\in\mathscr{A};\ x\notin A)$

$\Leftrightarrow\forall A\in\mathscr{A},\ x\in C-A\Leftrightarrow x\in\bigcap\{C-A\mid A\in\mathscr{A}\}$，

所以　$C-(\bigcup\mathscr{A})=\bigcap\{C-A\mid A\in\mathscr{A}\}$。

定义1.1.3 集合族$\{\{x\},\{x,y\}\}$叫做一个序偶，记作$\langle x,y\rangle$。如果A，B为集合，则称序偶集合$A\times B=\{\langle x,y\rangle\mid x\in A,y\in B\}$为$A$与$B$的笛卡儿积。

容易验证 $\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle\Leftrightarrow x=u\wedge y=v$。而一般地$A\times B\neq B\times A$(见习题1.1.5(3))。

定理1.1.3 设A，B，C，D为任意集合，则

(1) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$，

(2) $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$。

证明 (1) $\langle x,y\rangle\in(A\cap B)\times(C\cap D)\Leftrightarrow(x\in A\cap B)\wedge(y\in C\cap D)\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in B)\wedge(y\in C\wedge y\in D)\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\in B\wedge y\in D)\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in A\times C\wedge\langle x,y\rangle\in B\times D\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times C)\cap(B\times D)$

(2) 类似。▌

习　题

1.1.1 证明定理1.1.2中省略的部分。

1.1.2 证明对任意集合A，B下述条件等价：

(1) $A\subset B$，(2) $A\cap B=A$，(3) $A\cup B=B$。

1.1.3 设X为一固定集合，A，$B\subset X$，证明下述条件等价：

(1) $A\subset B$，　　(2) $\mathscr{C}B\subset\mathscr{C}A$，

(3) $A\cap\mathscr{C}B=\varnothing$，　　(4) $(\mathscr{C}A)\cup B=X$。

1.1.4 设A，B，C为任意集合，证明：

(1) $A-(A-B)=A\cap B$。

(2) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-C=(A-C)\cap B$。

(3) $A-(A\cap B)=A-B$。

(4) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$。

1.1.5 设A，B，C，D为任意的集合，证明

(1) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$，

(2) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$。

(3) 若$C\neq\varnothing$,$D\neq\varnothing$，则$C\times D\subset A\times B\Leftrightarrow(C\subset A)\wedge D\subset B$，从而$A\times B=B\times A\Leftrightarrow A=B$。

1.1.6 设A是n元集($n\in N$)，试证A有2^n个不同的子集。

§1.2 关 系 与 映 射

我们常说两个事物a与b有某种关系，比如次序关系，函数关系等等。我们可以用集合的语言给以简洁的描述。

定义1.2.1 集合X到Y的一个关系r是$X\times Y$的一个子集。$r\subset X\times Y$。若$\langle x,y\rangle\in r$，则说x与y r-相关，也记作xry。X的子集

$$\mathrm{Dom}(r)=\{x\in X\mid\exists y\in Y\ \mathrm{s.t.}\langle x,\ y\rangle\in r\}$$

叫做r的定义域，Y的子集

$$r(X)=\{y\in Y\mid\exists x\in X\ \mathrm{s.t.}\langle x,\ y\rangle\in r\}$$

叫做r的值域。

若$Y=X$时，就简单地说r是X中的关系，又若$\mathrm{Dom}(r)=X$，就说r是X上的关系。

设$A\subset X$，r为X到Y的关系，记

$$r(A)=\{y\in Y\mid\exists x\in A\ \mathrm{s.t.}\langle x,\ y\rangle\in r\}.$$

当$A=\{x\}$时，也记 $r(\{x\})=r[x]$。

例1.2.1 $id_X=\{\langle x,\ x\rangle\mid x\in X\}$是$X$上的恒等关系，也叫$X\times X$的对角线。以后我们总是用$id_X$表示$X$上的恒等关系。

例1.2.2 $r=\{\langle x,\ y\rangle\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\mid y-x\geqslant0\}$就是实数间

通常的“不大于”关系。

例1.2.3 设 X 为实数域$\mathbf{R}$上一切 $n\times m$ 矩阵所成的集合，此处$n>1$且是固定的，m 为一切不超过 n 的自然数，设

$$s=\{\langle a,\ b\rangle\in X\times X\mid \exists\, n\text{阶满秩矩阵}\, p\ \mathrm{s.t.}\ p^{-1}ap=b\},$$

则 s 是 X 中的关系，是X中一切 n 阶方阵间的相似关系。这里$\mathrm{Dom}(s)\subset X\wedge \mathrm{Dom}(s)\neq X$。

例1.2.4 设X为任一非空集合，$P=\mathscr{P}(X)-\{\varnothing\}$。

$$t=\{\langle A,\ B\rangle\in P\times P\mid A\cap B\neq\varnothing\},$$

则 t 是X的非空子集间的相交关系。

例1.2.5 设X为平面点集$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$，令

$$u=\{\langle x,\ y\rangle\in X\times X\mid \text{存在绕原点的旋转使}x\text{变到}y\},$$

称u为等周关系。

定义1.2.2 设 r 为集合X中的一个关系，

(1) 若$\forall x\in X$，xrx，则称 r 是自反的。

(2) 若$\forall x,\ y\in X$，$xry\Rightarrow yrx$，则称 r 是对称的。

(3) 若$\forall x,y,z\in X$，$(xry\wedge yrz)\Rightarrow xrz$，则称 r 是传递的。

(4) 若 r 同时是自反的，对称的，传递的，则称 r 是X上的等价关系。

易见，例1.2.2的 r 是自反的、传递的但不对称。例1.2.3的s 是传递的、对称的但不自反。例1.2.4的 t 是自反的、对称的但不传递。可见等价关系的三个条件是独立的。例1.2.1的id_X与例1.2.5的 u都是等价关系。

定义1.2.3 (1) 设$r\subset X\times Y$，令$r^{-1}=\{\langle y,x\rangle\in Y\times X\mid \langle x,\ y\rangle\in r\}$，称$r^{-1}$为 r 的逆关系。

(2) 设 $r\subset X\times Y$，$s\subset Y\times Z$，令

$$s\circ r=\{\langle x,\ z\rangle\in X\times Z\mid \exists\, y\in Y\ \mathrm{s.t.}\ \langle x,\ y\rangle\in r\wedge\langle y,\ z\rangle\in s\},$$

称$s\circ r$为r与s的复合关系。

定理1.2.1 设r为集X中的关系，则

(1) r是自反的$\Leftrightarrow id_X\subset r$。

(2) r是对称的$\Leftrightarrow r^{-1}=r$。

(3) r是传递的$\Leftrightarrow r\circ r\subset r$。

证明 由定义1.2.2，1.2.3直接可得.▌

定理1.2.2 设X，Y，Z，W为集合，$r\subset X\times Y$，$s\subset Y\times Z$，$t=Z\times W$，则

(1) $(r^{-1})^{-1}=r$， (2) $r\circ id_X=id_Y\circ r=r$，

(3) $(s\circ r)^{-1}=r^{-1}\circ s^{-1}$， (4) $t\circ(s\circ r)=(t\circ s)\circ r$。

证明 作为例子，我们证明(4)。

$$\langle x,\ w\rangle\in t\circ(s\circ r)\Rightarrow\exists z\in Z\ \text{s.t.}$$

$$\langle x,\ z\rangle\in(s\circ r)\wedge\langle z,\ w\rangle\in t.$$

而$\langle x,\ z\rangle\in s\circ r\Rightarrow\exists y\in Y\ \text{s.t.}\langle x,\ y\rangle\in r\wedge\langle y,\ z\rangle\in s$。

又 $\langle y,\ z\rangle\in s\wedge\langle z,\ w\rangle\in t\Rightarrow\langle y,\ w\rangle\in t\circ s$.

$\langle x,\ y\rangle\in r\wedge\langle y,\ w\rangle\in t\circ s\Rightarrow\langle x,\ w\rangle\in(t\circ s)\circ r$。

所以 $t\circ(s\circ r)\subset(t\circ s)\circ r$。

同理 $(t\circ s)\circ r\subset t\circ(s\circ r)$，从而 $t\circ(s\circ r)=(t\circ s)\circ r$。▌

利用等价关系可以将一个集合的元素进行分类，如在例1.2.5中，凡与x u-相关的点构成的集，即是以原点为中心，$\|x\|$为半径的圆周，它构成一个"等价类"。一般地，有

定义1.2.4 设r是X上的等价关系，若xry，便说x与y是r-等价的，X的子集$r[x]=\{y\in X\mid xry\}$叫做含x的r-等价类，每个$y\in r[x]$都叫$r[x]$的代表，X的子集族$\{r[x]\mid x\in X\}$叫做X的mod$r$商集合，记作X/r。

当不致引起混淆时，上述陈述中的"r"可省去，并记$r[x]=[x]$。

定理1.2.3 设r为非空集X上的等价关系，则

(1) $\forall x\in X$，$x\in[x]$，从而$[x]\neq\varnothing$。

(2) $\forall x$，$y\in X$，$[x]=[y]\Leftrightarrow xry$，$[x]\cap[y]\neq\varnothing\Rightarrow[x]=[y]$。

证明 (1)显然。(2)中$[x]=[y]\Rightarrow xry$也显然。现证$xry\Rightarrow[x]=[y]$。任取$z\in[y]$，则yrz，由xry，得xrz，即$z\in[x]$，从而$[y]\subset[x]$。又据对称性，$xry\Rightarrow yrx$，在上述证明中，互换x，y的位置即得$[x]\subset[y]$。所以$[x]=[y]$。

现若$[x]\cap[y]\neq\varnothing$，则存在$z\in[x]\cap[y]$，于是$xrz\wedge yrz$，据上一段得$[x]=[z]=[y]$。∎

这个定理表明X中每个元素属于而且只属于一个等价类，等价类的记法与代表元的选取无关。

定义1.2.5 设f为非空集X到非空集Y的关系，如果$\forall x\in X$，集合$f[x]=\{y\in Y|\langle x, y\rangle\in f\}$恰有一点，并记作$f(x)$，我们就叫$f$是$X$到$Y$的映射，写作 $f: X\to Y$。叫$f(x)$为x在f下的像(或值)，X叫f的定义集合，Y叫目标集合.有时，为了明确表示f所确定的关系，常记为

$$f: X\to Y,\ x\mapsto f(x).$$

注 以后我们写出$f: X\to Y$即表示X,Y均为非空集合，f为X到Y的映射。

例1.2.6 设$f=\{\langle x, y\rangle\in\mathbf{R}\times[-1,1]|y=\sin x\}$，则$f$是$\mathbf{R}$到$[-1, 1]$的映射，可记为：$f: \mathbf{R}\to[-1, 1]$，$x\mapsto\sin x$。

由定义可见，如果$y=f(x)$是《微积分》中定义的实变量的实值函数，其定义域为D，那么这个函数的图像就是现在定义的映射$f: D\to\mathbf{R}$中的关系f。以后，我们说函数，变换，对应，算子等术语，都是映射的同义词。

下列映射，今后常常用到。

例1.2.7 设A为集X的非空子集，映射

$$i_A: A\to X,\ x\mapsto x,$$

叫做包含映射。当$A=X$时，$i_A=id_X$，X上的恒等关系id_X也叫恒同映射。

例1.2.8 $f: X\to Y, x\mapsto f(x)=y_0$（此处$y_0$为$Y$中固定的点）叫$f$为常值映射。

例1.2.9 由自然数集$\mathbf{N}$到集X的映射

$$\zeta: \mathbf{N}\to X,\ n\mapsto x_n,$$

也常常记作 $\zeta=\langle x_n\rangle_{n\in N}$，并叫做$X$中的序列。

例1.2.10 设r为集X上的等价关系，映射

$$q: X\to X/r,\ x\mapsto [x]$$

叫自然映射。

现设$f: X\to Y$为映射，$A\subset X$，$S\subset Y$，则叫

$$f(A)=\{f(x)\in Y\,|\,x\in A\}$$

为A在f之下的像，

$$f^{-1}(S)=\{x\in X\,|\,f(x)\in S\}$$

叫S在f之下的原像.特别要注意，这里f^{-1}是f的逆关系，未必是映射。

定义1.2.6 设$f: X\to Y$为映射，

(1) 如果$f(X)=Y$，则称f为满射，

(2) 如果$\forall x_1, x_2\in X, x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$，则称$f$为单射，

(3) 如果f既是满的又是单的，就叫一一映射。

(4) 如果f是一一映射，那么逆关系f^{-1}是Y到X的映射，叫做f的逆映射。

定义1.2.7 设$f: X\to Y$，$g: Y\to Z$，则复合关系$g\circ f\subset X\times Z$也是映射，$g\circ f: X\to Z$叫做$f$与$g$的复合映射。