新世纪高职高专实用规划教材

公共基础系列

高等数学

贺楚雄 张新萍 胡铁城 王卫群 主编
袁文胜 卢惟康 刘康波 徐志尧 副主编

赠送
电子课件

清华大学出版社

新世纪高职高专实用规划教材　公共基础系列

高 等 数 学

贺楚雄　张新萍　胡铁城　王卫群　主　编

袁文胜　卢惟康　刘康波　徐志尧　副主编

清华大学出版社

北　京

内容简介

本书以教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》为指导，力求为实现高职高专院校高等数学的教学目的服务。

本书遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则；引入数学模型方法，用数学建模的方法进行概念教学，例题中增加通俗易懂应用题的分量；理论上不追求严格的论证，注重形象的直观几何说明；弱化手工计算，不追求过分复杂的计算和变换，但注意基本方法和基本技能的训练，将复杂的计算和变换交给数学软件包完成；在每章后编一节数学实验，培养学生借助于计算机及现有数学软件包求解数学模型的能力。

本书共分为12章，主要内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学和无穷级数等。

本书既适合作为高等职业院校高等数学通用教材，又可作为工程技术人员的高等数学知识更新教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/贺楚雄，张新萍，胡铁城，王卫群主编；袁文胜，卢惟康，刘康波，徐志尧副主编. —北京：清华大学出版社，2009.9
(新世纪高职高专实用规划教材　公共基础系列)
ISBN 978-7-302-20938-6

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①贺…　②张…　③胡…　④王…　⑤袁…　⑥卢…　⑦刘…　⑧徐…　Ⅲ. 高等数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第148567号

责任编辑：张　瑜　桑任松
封面设计：山鹰工作室
版式设计：杨玉兰
责任校对：李玉萍
责任印制：孟凡玉
出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京市清华园胶印厂
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　销：全国新华书店
开　本：185×260　**印　张**：16.5　**字　数**：390千字
版　次：2009年9月第1版　**印　次**：2009年9月第1次印刷
印　数：1～4000
定　价：25.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177转3103　产品编号：032861-01

前　　言

高等数学课程是高等职业院校各专业必修的一门重要的公共基础课。

高等职业院校高等数学课程的教学必须达到以下两方面的目的：一是要培养学生用数学的概念、原理和方法消化吸收专业知识的能力，为学生专业知识的学习和基本技能的形成服务；二是要培养学生用数学的概念、原理和方法借助于计算机及数学软件包解决实际问题的能力，提高学生的综合文化素质，为增强学生的创新能力和实践动手能力服务，为学生的专业发展奠定基础。

本书以教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》为指导，力求为实现高职高专院校高等数学的教学目的服务。我们这套高职高专高等数学教材具有以下特色：

(1) 以教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》为依据组织内容，突出“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则。

(2) 引入数学模型方法，把数学建模的思想与方法贯穿到整个数学教学始终。

(3) 注重概念的教学，用数学建模的方法进行概念教学，遵循从个别到一般，再回到个别的认识原则，强调数学概念与实际问题的联系，做到了概念的形成源于实际，高于实际，立足于解释实际，注重双向翻译能力的培养，例题中增加通俗易懂应用题的分量。

(4) 理论上不追求严格的论证，注重形象、直观的几何说明。

(5) 弱化手工计算，不追求过分复杂的计算和变换，但注意基本方法和基本技能的训练，将复杂的计算和变换交给数学软件包完成，在每章后编一节数学实验，培养学生借助于计算机及现有数学软件包求解数学模型的能力。

本书分为12章，主要内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学和无穷级数等。

本书由贺楚雄、张新萍、胡铁城、王卫群任主编，袁文胜、卢惟康、刘康波、徐志尧任副主编。参编人员还有朱利强、顾友付。全书由贺楚雄进行统稿和定稿。

本书既适合作为高等职业院校高等数学通用教材，又可作为工程技术人员的高等数学知识更新教材。

在本书的编写和出版的过程中，得到了清华大学出版社的大力支持和帮助，在此谨致以诚挚的谢意。

由于编者水平有限，时间也比较仓促，书中不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

目　录

第 1 章　函数的概念

实际问题中的万事万物都处在不断的联系中，它们之间总是存在着各种各样的关系. 在数学中，它们都可以用常量或变量来表示，它们之间的关系可以用函数来刻画，然后用微积分来研究其规律. 这就形成了高等数学的主要内容. 高等数学是现代数学和科学技术的基础和工具，它的研究对象就是函数.

数学的生命力在于它能有效地解决现实世界向我们提出的各种问题，而数学模型正是联系数学与现实世界的桥梁.

本章将复习函数知识，并进行适当的加深，然后对数学模型方法进行简单介绍，为高等数学的学习打下良好的基础.

1.1　函　　数

1.1.1　常量与变量、区间与邻域

1. 常量与变量

在研究实际问题时，常会遇到各种不同的量，其中有的量在某个过程中不会发生变化，总是保持不变，这种量称为**常量**；还有一些量在某个过程中会发生变化，可以取不同的值，这种量称为**变量**.

一个量是常量还是变量，要根据具体情况具体分析. 例如，一个人的身高，在成年后可以看作常量，但在成年前则应看作变量.

通常用 a,b,c 等字母表示常量，用 x,y,t 等字母表示变量.

2. 区间与邻域

一个变量总是在一定的范围内取值. 为了简单起见，变量的取值范围常用区间表示. 区间主要有以下几种：

设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，则：

(1) 数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为**开区间**，记作 (a,b).

(2) 数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记作 $[a,b]$.

(3) 数集 $\{x \mid a \leqslant x<b\}$ 称为**左闭右开区间**，记作 $[a,b)$；数集 $\{x \mid a<x \leqslant b\}$ 称为**左开右闭区间**，记作 $(a,b]$；$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 统称为**半开区间**.

以上这些区间都称为**有限区间**，a 和 b 称为这些区间的**端点**，$b-a$ 称为这些**区间的长度**. 从数轴上看，这些区间是长度有限的线段.

此外，可类似地表示无限区间，例如：

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\},\quad (a,+\infty)=\{x\mid a<x\},$$
$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\},\quad (-\infty,b)=\{x\mid x<b\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\boldsymbol{R}.$$

以上这些区间都称为**无限区间**.

以后在不需要辨明所述区间是否包含端点以及是有限区间还是无限区间的场合，就简单地称它为“区间”，且常用I表示.

特别地，把开区间$(a-\delta,a+\delta)(\delta>0)$称为**点$a$的$\delta$邻域**，记作$U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

其中，点a称为该邻域的**中心**，δ称为该邻域的**半径**.

如果在点a的δ邻域中去掉中心，那么称它为**点a的去心δ邻域**，记作$\overset{\circ}{U}(a,\delta)$，即

$$\overset{\circ}{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

1.1.2 函数的概念

在实际问题中，往往同时有几个变量在变化着，它们并不是孤立变化的，而是相互联系并遵循着一定的变化规律，现在先就两个变量的情形举几个例子.

引例 1 圆的面积.

设圆的面积为A，半径为r，它们之间的相依关系可表示为

$$A=\pi r^2,$$

当半径r在区间$(0,+\infty)$内任意取定一个数值时，由上式就可以确定圆面积A的相应数值.

引例 2 自由落体运动.

设物体下落的时间为t，落下的距离为s. 假定开始下落的时刻为$t=0$，那么s与t之间的相依关系可表示为

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

其中g是重力加速度. 假定物体着地的时刻为$t=T$，那么当时间t在闭区间$[0,T]$上任意取定一个数值时，由上式就可以确定s的相应数值.

撇开这两个例子所涉及的变量的实际意义不谈会发现，它们都反映了两个变量之间的相依关系，这种相依关系由一种对应法则来确定，根据这种对应法则，当其中的一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应，两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1.1 设x和y是两个变量，D是一个非空实数集. 如果对于每个数$x\in D$，变量y按照一定的对应法则总有确定的数值和它对应，则称y是定义在数集D上的x的**函数**，记作$y=f(x)$. 数集D称为这个函数的**定义域**，x称为**自变量**，y称为**函数**(或**因变量**).

当x取数值$x_0\in D$时，与x_0对应的y的数值称为函数$y=f(x)$在点x_0处的**函数值**，记作$f(x_0)$；当x_0遍取D的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集

$$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的**值域**.

函数 $y=f(x)$ 中，表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母，如 ϕ、φ 等，这时函数就记作 $y=\phi(x)$、$y=\varphi(x)$ 等.

对应法则和定义域是函数概念的**两个要素**. 很多函数的对应法则可用表格、图像或解析式等表示，定义域一般可用区间表示.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的，如引例 1 中，定义域 $D=(0,+\infty)$；引例 2 中，定义域 $D=[0,T]$.

在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用解析式表达的函数，这时我们约定：函数的定义域就是自变量能够取到的使解析式有意义的一切实数值的集合. 例如，函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域就是闭区间 $[-2,2]$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域就是开区间 $(-1,1)$.

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值有且只有一个，则称这种函数为**单值函数**，否则称之为**多值函数**. 本书的函数没有特殊说明，都是指单值函数.

在定义域的不同范围内用不同的式子表示的一个函数，称为**分段函数**.

例如，函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & \text{当} x>0\ ;\\ 0, & \text{当} x=0\ ;\\ -1, & \text{当} x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**，它就是一个分段函数，其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$，其图形如图 1.1 所示.

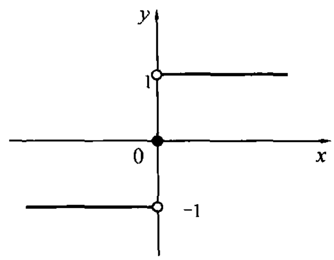

图 1.1

例 1　已知分段函数

$$y=\begin{cases}2\sqrt{x}\ , & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 1+x\ , & x>1.\end{cases}$$

试求：

(1) 函数的定义域和值域;

(2) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(1)$, $f(3)$；

(3) 画出函数的图形.

解：

(1) 函数的定义域为 $D=[0,+\infty)$，值域为 $W=[0,+\infty)$.

(2) 因为 $\dfrac{1}{2}\in[0,1]$，所以 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\sqrt{2}$；因为 $1\in[0,1]$，所以 $f(1)=2\sqrt{1}=2$；因为 $3\in(1,+\infty)$，所以 $f(3)=1+3=4$.

(3) 根据函数的定义，在 $[0,1]$ 上，函数的图形为曲线 $y=2\sqrt{x}$；在 $(1,+\infty)$ 上，函数的图形为直线 $y=1+x$，该函数的图形如图 1.2 所示.

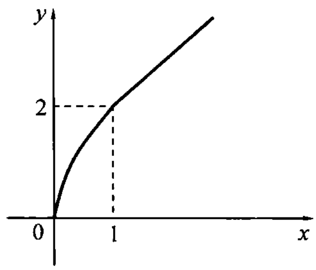

图 1.2

例 2 设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$，例如：

$$\left[\frac{4}{9}\right]=0，[\sqrt{2}]=1，[\pi]=3，[-1]=-1，[-3.6]=-4.$$

把 x 看成自变量，则函数 $y=[x]$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=Z$，此函数称为**取整函数**.

1.1.3 函数的特性

1. 函数的有界性

定义 1.2 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $A\subset D$. 如果存在正数 M，使得对于一切 $x\in A$，有

$$|f(x)|\leqslant M，$$

则称函数 $f(x)$ 在 A 上**有界**，如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 A 上**无界**.

例如：

(1) 函数 $f(x)=\sin x$，$f(x)=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为存在正数 $M=1$，无论 x 取任何实数，都有 $|\sin x|\leqslant 1$、$|\cos x|\leqslant 1$.

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无界的，因为不存在这样的正数 M，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立；但是 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的，可取 $M=1$，而 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 对于区间 $(1,2)$ 内的一切 x 都成立.

2. 函数的单调性

定义 1.3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)，$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的，区间 I 为函数 $f(x)$ 的**单调增区间**；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的，区间 I 为函数 $f(x)$ 的**单调减区间**. 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

例如，函数 $y = x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的； $y = x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调减少，在 $[0,+\infty)$ 单调增加，但在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调的.

3. 函数的奇偶性

定义 1.4　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称(即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$). 如果对于任何 $x\in D$，恒有

$$f(-x) = -f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**. 如果对于任何 $x\in D$，恒有

$$f(-x) = f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

例如， $f(x)=\sin x$ 是奇函数； $f(x)=\cos x$ 是偶函数； $f(x)=\sin x+\cos x$ 既非奇函数也非偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于坐标原点对称.

4. 函数的周期性

定义 1.5　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在不为零的实数 T，使得对于任意的 $x\in D$，有 $x+T\in D$ 且

$$f(x+T) = f(x)$$

恒成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为函数 $f(x)$ 的**周期**. 如果 $T>0$，并且它是 $f(x)$ 的所有正的周期中最小的，则称 T 为 $f(x)$ 的**最小正周期**. 通常所说的周期函数的周期都是指其最小正周期.

例如，函数 $\sin x$ 、 $\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数； $\tan x$ 、 $\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

以 T 为周期的周期函数，在整个定义域内的每个长度为 T 的区间上，其图形有相同的形状.

1.1.4　反函数

定义 1.6　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W . 若对于任一数值 $y\in W$， D 上都可以确定一个数值 x 使 $f(x)=y$，这里如果把 y 看作自变量，看作因变量，按照函数概念，就得到一个新的函数 $x=\varphi(y)$，这个新的函数称为函数 $f(x)$ 的**反函数**，可记作 $x=f^{-1}(y)$；习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，这时 $x=f^{-1}(y)$ 可按习惯表示为 $y=f^{-1}(x)$.

因为函数的实质是对应关系，改变的只是表示自变量和因变量的字母，而没有改变对应关系，所以 $x=f^{-1}(y)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 实质上是同一个函数.

在同一个直角坐标平面上，函数 $y=f(x)$ 和其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是相同的，但 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 是对称的，如图 1.3 所示.

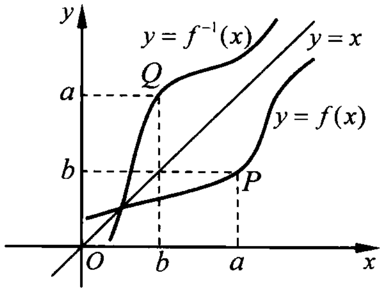

图 1.3

1.2 初等函数

1.2.1 基本初等函数

人们把幂函数 $y=x^a(a\in\mathbf{R})$、指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$、对数函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$、三角函数($y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$)和反三角函数($y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\text{arccot}\, x$)统称为**基本初等函数**.

1.2.2 复合函数

定义 1.7 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集非空，那么 y 通过中间变量 u 的联系成为 x 的函数，把这个函数称为是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$.

学习复合函数有两方面要求：一方面，会把几个作为中间变量的函数复合成一个函数，这个复合过程实际上是把中间变量依次代入的过程；另一方面，会把一个复合函数分解为几个简单函数，这些**简单函数**往往是基本初等函数或是基本初等函数与常数的四则运算所得到的函数.

例 1 已知 $y=\ln u$，$u=x^2$，试将 y 表示为 x 的函数.

解： $y=\ln u=\ln x^2$，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

例 2 设 $y=u^2$，$u=\tan v$，$v=\dfrac{x}{2}$，试把 y 表示为 x 的函数.

解： $y=u^2=\tan^2 v=\tan^2\dfrac{x}{2}$.

例 3 函数 $y=e^{\sin x}$ 是由哪些简单函数复合而成的？

解： 令 $u=\sin x$，则 $y=e^u$，故 $y=e^{\sin x}$ 是由 $y=e^u$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的.

例 4　函数 $y=\tan^3(2\ln x+1)$ 是由哪些初等函数复合而成的？

解： 令 $u=\tan(2\ln x+1)$，则 $y=u^3$；再令 $v=2\ln x+1$，则 $u=\tan v$．故 $y=\tan^3(2\ln x+1)$ 是由 $y=u^3$、$u=\tan v$ 和 $v=2\ln x+1$ 复合而成的．

例 5　分解 $y=\mathrm{e}^{\sin\left(1+3x^2\right)}$．

解： 令 $u=\sin(1+3x^2)$，得 $y=\mathrm{e}^u$，再令 $v=1+3x^2$，得 $u=\sin v$．故 $y=\mathrm{e}^{\sin\left(1+3x^2\right)}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$、$u=\sin v$ 和 $v=1+3x^2$ 复合而成的．

1.2.3　初等函数

定义 1.8　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合而成的，并且能用一个式子表示的函数，称为**初等函数**．

例如：

$$y=\frac{\sin x}{x^2+1}，\quad y=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})，\quad y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$$

等都是初等函数．

1.3　数学模型方法简介

据统计，近几年全世界所发表的科技论文中，使用频率最高的关键词为——数学模型．其实，随着科学技术的迅速发展，数学模型这个词汇越来越多地出现在现代人的生产、工作和社会生活当中．电气工程师必须建立所要控制的生产过程的数学模型，用这个模型对控制装置作出相应的设计和计算；气象工作者为了得到准确的天气预报，也离不开根据气象站、气象卫星汇集的气压、雨量、风速等资料建立的数学模型；城市规划工作者需要建立一个包括人口、经济、交通、环境等大系统的数学模型，为领导层对城市发展规划的决策提供科学依据等．

1.3.1　数学模型

日常生活中经常会遇到或用到模型，如飞机模型、坦克模型、楼群模型等实物模型，水箱中的舰艇、风洞中的飞机等物理模型，地图、电路图、分子结构图等符号模型，也有用文字、符号、图表、公式等描述客观事物的某些特征和内在联系的模型，如数据库的关系模型、网络的层次模型以及这里要介绍的数学模型等抽象模型．

模型是为了一定目的，对客观事物的一部分进行简缩、抽象、提炼出来的原型的替代物，是客观事物的一种模拟或抽象，它必须具有所研究系统的基本特征或要素，集中反映了原型中人们需要的那一部分特征．

数学模型就是对于一个现实对象，为了一个特定目的，根据其内在规律，做出必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构．简单地说，就是为了某种目的，用字母、数字及其他数学符号建立起来的等式、不等式、图表、图形和框图等描述客观事

物特征及内在联系的数学结构，是客观事物本质的抽象与简化，是沟通现实世界与数学世界的理想桥梁.

可以说，从数学诞生的第一天起就有了数学模型. 原始的人类从具体的一只羊、一头牛等事物中抽象出自然数 1 的概念，而自然数 1 也就是具体的一只羊、一头牛等的数学模型; 从光线、木棍等具体事物抽象出直线的概念，而直线也就是光线、木棍等的数学模型. 因为每一个数学概念都是从客观世界中抽象出来的，所以每一种数学概念、每个数学分支都是客观世界中某些具体事物的数学模型.

1.3.2 数学建模

建立数学模型的全过程(包括表述、求解、解释、检验等)就称为**数学建模**，即用数学的语言、方法去近似地刻画解决实际问题的过程. 这个过程需要借助抽象、简化、假设、引进变量等手段，将实际问题用数学方式表达，建立起数学模型，然后运用先进的数学方法及计算机技术进行求解.

数学建模其实并不是什么新东西，可以说有了数学并需要用数学去解决实际问题，就一定要用数学的语言、方法去近似地刻画该实际问题，这种刻画的数学表述就是一个数学模型，其过程就是数学建模的过程. 数学模型一经提出，就要用一定的技术手段(计算、证明等)来求解并验证，其中大量的计算往往是必不可少的，高性能的计算机的出现使数学建模这一方法如虎添翼，飞速发展，掀起一个高潮.

1.3.3 数学建模的意义

一般地说，当实际问题需要对所研究的现实对象提供分析、预报、决策、控制等方面的定量结果时，往往都离不开数学的应用，而建立数学模型则是这个过程的关键环节. 数学迅速进入一些诸如经济、生态、人口、地质等领域，为数学建模开拓了许多新的处女地. 在一般工程技术领域，数学建模大有用武之地，而在高新技术领域数学建模几乎是必不可少的工具. 数学建模作为用数学方法解决实际问题的第一步，越来越受到人们的重视. 数学在许多高新技术上起着十分关键的作用.

数学建模将数学知识、计算机技术及各种知识综合应用于解决实际问题中，是培养和提高同学们分析问题、解决问题的能力以及激发创造力的必备手段之一.

1.3.4 数学建模的方法与过程

1. 数学建模的基本方法

1) **机理分析**

依据对现实客观事物对象的特性的认识，分析出其因果关系，找出反映其内部机理的规律，建立的模型常有明确的物理或现实意义.

2) **测试分析**

将研究对象看作一个“黑箱”系统，内部机理无法直接寻求，可以测量系统的输入输

出数据，通过对量测数据的统计分析，按照事先确定的准则在某一类模型中选出一个与数据拟合得最好的模型.

3) **两者结合**

用机理分析建立模型结构，用测试分析确定模型参数也是常用的方法.

2. 数学建模的一般过程

1) **形成问题**

在建模前，应对实际问题的历史背景和内在机理有深刻的了解，必须对该问题进行全面的、深入细致的调查研究. 首先要明确所解决问题的目的要求，并着手收集数据. 数据是为建立模型而收集的. 因此，如果在调查研究时对建立什么样的模型有所考虑的话，那么就可以按模型需要，更有目的地、更合理地来收集有关数据. 收集数据时应注意精度要求，在对实际问题作深入了解时，向有关专家或从事相关实际工作的人员请教，可以使你对问题了解更快、更直接.

2) **模型的假设与简化**

现实问题错综复杂，常常涉及面极广. 要想建立一个数学模型来面面俱到、无所不包地反映现实问题是不可能的，也是没有必要的. 一个模型，只要它能反映所需要的某一个侧面就够了，建模前应先将问题理想化、简单化，即首先抓住主要因素，忽略次要因素，在相对简单的情况下，理清变量间的关系，建立相应的数学模型. 为此对所给问题作出必要且合理的假设，是建立模型的关键. 也是这一步重点要解决的问题.

若假设合理，所建模型就能反映实际问题的实际情况；否则假设不合理或过多地忽略一些因素将会导致模型与实际情况不能吻合，或部分吻合. 这时则要修改假设、修改模型.

3) **模型建立**

根据所作的假设以及事物间的联系，抓住问题的本质，建立各种量之间的关系，把问题转化为数学问题. 模型建立过程中要注意分清变量类型，简化变量间的关系，恰当使用数学工具，并且要有较严密的推理以及保证足够的精度.

4) **模型求解**

不同的模型要用到不同的数学工具才能求解. 由于计算机的广泛使用，利用已有的许多计算机软件为求解各种不同的数学模型带来了方便，其中著名的有 Mathematica、Matlab、Lingo 等. 掌握了它们，将会使你解决问题事半功倍.

当然，利用高级语言，也可以求解许多实际问题. 模型建立后，则要根据所建立的数学模型，结合相应数学问题的求解算法(如方程的求根方法、极值问题求解的最速下降法、微分方程的数值解法等)编程求解才行.

5) **模型分析与检验**

对模型求出的解进行数学上的分析，有助于对实际问题的解决. 分析时，有时要根据问题的要求对变量间的依赖关系进行分析和对解的结果稳定性进行分析，有时根据求出的解对实际问题的发展趋势进行预测，为决策者提供最优决策方案. 除此之外，常常还需要进行误差分析、模型对数据的稳定性分析和灵敏度分析等.

要说明一个模型是否反映了客观实际，也可用已有的数据去验证. 如果由模型计算出来的理论数据与实际数据比较吻合，则可以认为模型是成功的. 如果理论数值与实际数值