全国硕士研究生入学考试辅导丛书

2010

樊博头考研系列

全国硕士研究生入学考试

历年真题精解

数学二

全国硕士研究生入学考试命题研究组 编

- 原命题组成员、阅卷组组长亲自编写，融合北京大学、清华大学权威讯息
- 深度梳理命题轨迹，解析详尽、规避误区，培养最佳解题思路
- 以题型训练为核心，全面展现题型变换
- 凸显历年试题精华，明示命题原则与规律，把握命题脉搏
- 注重实战，讲求技巧，切实提升综合应试能力

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

全国硕士研究生入学考试辅导丛书

全国硕士研究生入学考试历年真题精解

数 学

全国硕士研究生入学考试命题研究组 编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学考试历年真题精解. 数学. 2/全国硕士研究生入学考试命题研究组编. —杭州：浙江大学出版社，2009. 4

（全国硕士研究生入学考试辅导丛书）

ISBN 978-7-308-06673-0

Ⅰ. 全… Ⅱ. 全… Ⅲ. 高等数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ. G643-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 042855 号

全国硕士研究生入学考试历年真题精解·数学二

全国硕士研究生入学考试命题研究组 编

丛书策划 樊晓燕 杨晓鸣

责任编辑 王 波

出版发行 浙江大学出版社

（杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028）

（网址：http://www.zjupress.com）

排 版 杭州大漠照排印刷有限公司

印 刷 杭州杭新印务有限公司

开 本 889mm×1194mm 1/16

印 张 12

字 数 315 千

版 印 次 2009 年 4 月第 1 版 2009 年 4 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-06673-0

定 价 24.00 元

前　　言

2009 年全国硕士研究生入学考试已经拉下了帷幕，超过 124 万人参加了这种规模空前的选拔性考试。参加人数的增多，录入率的有限，彰显了竞争的激烈程度。为了指导参加 2010 年全国硕士研究生入学统一考试的广大考生数学考试的复习，把握历年命题脉搏，了解出题动态，我们组织部分多年来参加考试大纲制订和修订工作及参加考前辅导的教授、专家编写了这本《全国硕士研究生入学考试历年真题精解　数学二》，以供广大考生复习使用。

研习历年考试真题是研究生入学考试复习备考中必不可少的关键环节，也是考生掌握考试动态、赢得高分的最佳捷径。历年真题是标准的复习题。自从实行研究生入学考试以来，也时有真题重现的现象发生，如 2006 年数学一的第一大题第(3)小题与 1993 年数学一第四大题、2003 年数学一的第一大题第(3)小题与 1993 年数学一的第一大题第(3)小题、2003 年数学一的第一大题第(5)小题与 1996 年数学三的第一大题第(5)小题、2003 年数学一的第三大题与 2001 年数学三的第六大题、2003 年数学四的第四大题与 2001 年数学一的第五大题是基本雷同的。英语和政治也有真题重复出现的情况。2003 年英语第 36 题与 1996 年英语第 43 题，2003 年英语第 37 题与 1995 年英语第 34 题，2003 年英语第 26 题与 1995 年英语第 21 题，2003 年英语第 29 题与 1996 年英语第 42 题，2003 年英语第 24 题与 1997 年英语第 42 题，1996 年英语第 46 题与 1995 年英语第 6 题，等等，都是非常相似的。2003 年政治理论第 21 题与 2000 年文科政治第 31 题和 1993 年理科政治第 6 题，2003 年政治理论第 31 题与 1993 年理科政治第 32 题，2003 年政治理论第 36 题与 1995 年文科政治第 28 题和 1994 年文科政治第 29 题等等，都是相同或非常相似的。所以，对往年真题的研究是最有帮助的。循

着命题人的思路，我们就可以把握考试的脉搏，明确考试的重点和难点所在。

不论是数学理论的建立，还是数学运算和逻辑推理，无一不是以明确而又清晰的概念为基础的。考生应系统掌握大纲规定的基础知识，对大纲规定的内容进行梳理，形成知识网络；其次，在接触一定量的题型之后，头脑中留下的不是纷繁的题目，而是清晰、鲜明、深刻的基础知识和基本技能，以及基本的数学思想和方法。

解题时既要考虑解题的通性通法，又要分析它的特殊性，寻求最佳解决方法，提高解题能力和对新题型的适应能力。考生复习时演练一定量的习题是非常必要的，它是提高考试成绩的重要手段，但也不要搞题海战术，重要的是要吃透大纲规定的基本考点，提高分析问题和解决问题的能力。

本书是北京大学、清华大学和中国人民大学等广大数学教师及原考研命题组的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。其中的每一道试题，既反映了考研数学考试大纲对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势。因此，对照考试大纲分析、研究这些试题，考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌，而且可以方便地了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出各部分内容的重点、难点，以及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，从而从容应考，轻取高分。

本书是考研应试者的良师益友，也是各类院校的学生自学数学、提高数学水平和教师进行教学辅导的一本极有价值的参考书。

由于时间仓促，书中疏漏之处在所难免，诚请专家和读者指正。

编者　于清华园

目　　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限、连续

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

考点 1.1 函数的概念及其特性

1. (1990 年试题) 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, |x|\leqslant 1,\\ 0, |x|>1,\end{cases}$ 则函数 $f[f(x)]=$ ________.

【考点提示】 复合函数的定义.

【解题分析】 由 $f(x)=\begin{cases}1, |x|\leqslant 1,\\ 0, |x|>1,\end{cases}$ 知 $|f(x)|\leqslant 1$. 因此有 $f[f(x)]=1$.

2. (1992 年试题) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$ 则 ( )

A. $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0\\ -(x^2+x), & x>0\end{cases}$　　B. $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0\\ -x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

C. $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x^2-x, & x>0\end{cases}$　　D. $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

【考点提示】 复合函数的定义.

【解题分析】 $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & -x\leqslant 0\\ (-x^2)+(-x), & -x>0\end{cases}$

$$=\begin{cases}x^2-x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$$

故应选 D.

3. (1997 年试题) 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$ ( )

A. $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　B. $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

C. $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　D. $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

【考点提示】 分段函数,复合函数.

【解题分析】 由已知

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0,\\ f(x)+2, & f(x)>0.\end{cases}$$

由 $f(x)\leqslant 0$,知 $x\geqslant 0$ 且 $f(x)=-x$;

由 $f(x)>0$,知 $x<0$ 且 $f(x)=x^2$;

从而 $g[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0,\\ x^2+2, & x<0,\end{cases}$ 选 D.

4. (1999 年试题) 设 $f(x)$是连续函数,$F(x)$是 $f(x)$的原函数,则 ( )

A. 当 $f(x)$是奇函数时,$F(x)$必是偶函数

B. 当 $f(x)$是偶函数时,$F(x)$必是奇函数

C. 当 $f(x)$是周期函数时,$F(x)$必是周期函数

D. 当 $f(x)$是单调增函数时,$F(x)$必是单调增函数

【考点提示】 原函数.

【解题分析】 由已知 $f(x)$是连续函数,则$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$的一个原函数,从而 $f(x)$的任一原函数 $F(x)$可表示为$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$,即 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$,其中 C 为任意常数,且有

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C=-\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u+C.$$

当 $f(x)$是奇函数时,

$$F(-x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+C=F(x),$$

即 $F(x)$为偶函数,A 成立;

当 $f(x)$ 是偶函数时，

$$F(-x)=-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+C\neq -F(x),$$

所以 B 不成立；

关于选项 C,D 可举反例予以排除，如令 $f(x)=1+\cos x$，则周期为 2π，$F(x)=x+\sin x+C$ 不是周期函数；又令 $f(x)=x$，为单调增函数，但 $F(x)=\frac{1}{2}x^2+C$ 不是单调函数，综上，选 A.

5.（2001 年试题）设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于　（　）

A. 0　　　B. 1

C. $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　　　D. $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

【考点提示】 分段函数复合.

【解题分析】 由题设，$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则

$$f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |f(x)|>1.\end{cases}$$

由于 $f(x)$ 只能取 0,1 两个值，即 $|f(x)|\leqslant 1, x\in(-\infty,+\infty)$，所以

$$f[f(x)]=1, x\in(-\infty,\infty),$$

因而 $$f\{f[f(x)]\}=f(1)=1,$$

故选 B.

6.（2005 年试题）设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，“$M\Leftrightarrow N$”表示“M 的充分必要条件是 N”，则必有　（　）

A. $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数

B. $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

C. $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数

D. $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

【考点提示】 奇函数、偶函数、原函数.

【解题分析】 由题意可知

$$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int_0^x f(x)\mathrm{d}t+C,$$

于是

$f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数 $\Rightarrow f(x)$ 的全体原函数为偶函数；

$F(x)$ 为偶函数 $\Rightarrow F'(x)=f(x)$ 为奇函数.

所以选 A.

考点 1.2　极限概念与性质

1. (1993 年试题) 当 $x \to 0$ 时，变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是　　(　　)

A. 无穷小　　B. 无穷大

C. 有界的，但不是无穷小　　D. 无界的，但不是无穷大

【考点提示】 极限性质.

【解题分析】 若取 $x_k = \frac{1}{k\pi} \to 0(k \to \infty)$，则 $x_k^2 \sin\frac{1}{x_k} = (k\pi)^2 \sin k\pi = 0$；

而取 $x_k = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0(k \to \infty)$，则 $x_k^2 \sin\frac{1}{x_k} = (2k\pi + \frac{\pi}{2})^2 \to \infty(k \to \infty)$，

可见当 $x \to 0$ 时，$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 的极限不存在，也非无穷大，故应选 D.

2. (1998 年试题) 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，则下列断言正确的是　　(　　)

A. 若 x_n 发散，则 y_n 必发散

B. 若 x_n 无界，则 y_n 必有界

C. 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小

D. 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小

【考点提示】 数列极限.

【解题分析】 本题可采取举反例的方法——排除干扰项.

设 $x_n = \sin n, y_n = \frac{1}{n}$，则 y_n 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$. 从而可排除 A.

设 $x_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为奇数}, \\ 0, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ $y_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数}, \\ n, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 显然 x_n 无界且满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，但是 y_n 并非无穷小，从而 C 也不对. 综上，只有 D 成立，关于 D 的正确性的证明如下：

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1,\ \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n y_n \cdot \frac{1}{x_n} = 0,$$

所以 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小时，y_n 亦为无穷小，所以选 D.

3. (1999 年试题) "对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$，总存在正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$" 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的　　(　　)

A. 充分条件但非必要条件　　B. 必要条件但非充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分条件又非必要条件

【考点提示】 数列极限的定义.

【解题分析】 本题考查数列极限的 $\varepsilon - N$ 语言定义，即：$\forall \varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbf{N}$，当 $n > N$ 时有 $|x_n - a| < \varepsilon$，将此定义与题设所给条件相比较，知两者实质是相同的，因此题设条件也是 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的充要条件，所以选 C.

4.（2003 年试题）设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有　　　　（　　）

A. $a_n<b_n$对任意n成立　　　　B. $b_n<c_n$对任意n成立

C. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在　　　　D. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在

【考点提示】　数列的极限.

【解题分析】　由题设，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$及$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$知当$n$充分大时，$a_n<b_n$，但对任意$n$，$a_n<b_n$不一定成立，从而可排除A，同理$b_n<c_n$对任意$n$也不一定成立，因此B也可排除，假设$a_n=\frac{1}{n^2}$，$c_n=n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=+\infty$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，因此C也不成立，关于D，由于$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=\infty$，所以极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在，综上，选D.

考点 1.3　函数极限的计算

一、利用左、右极限求函数极限

1.（1991 年试题）$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=$______.

【考点提示】　极限定义.

【解题分析】　$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{xe^{-\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{0-1}{0+1}=-1.$

故应填-1.

2.（1992 年试题）当$x\to1$时，函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限　　　　（　　）

A. 等于 2　　　B. 等于 0　　　C. 为∞　　　D. 不存在但不为∞

【考点提示】　极限定义.

【解题分析】　因为$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$，而$\lim\limits_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$，$\lim\limits_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，故有

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=0,\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty.$$

可见，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$不存在但不为$\infty$.

故应选D.

二、求未定式$\left(\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,1^\infty,0^0,\infty^0\right)$的极限

1.（1991 年试题）求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}$.

【考点提示】　无穷小，洛必达法则.

【解题分析】　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{1}{6}.$

2.（1992 年试题）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=$ ________.

【考点提示】 极限.

【解题分析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}(-x^2)}{e^x-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x+\sin x}=0.$

3.（1992 年试题）求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

【考点提示】 极限.

【解题分析】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{6+x}\right)^{\frac{6+x}{-3}\cdot\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}.$

4.（1993 年试题）$\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=$ ________.

【考点提示】 极限.

【解题分析】 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{-1}}{-x^{-2}}=0.$

5.（1993 年试题）求$\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

【考点提示】 极限.

【解题分析】 $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100}{\sqrt{1+100x^{-2}}-1}$

$$=\frac{100}{-1-1}=-50.$$

6.（1995 年试题）求$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

【考点提示】 极限.

【解题分析】 原式$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{1+\cos x-1}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\frac{1}{2}(\cos x-1)}{x(1-\cos\sqrt{x})}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}=\frac{1}{2}.$$

7.（1996 年试题）$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=$ ________.

【考点提示】 极限、洛必达法则.

【解题分析】 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

$$\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to 0}\frac{\sin\ln(1+3t)-\sin\ln(1+t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\ln(1+3t)\cdot\frac{3}{1+3t}-\cos\ln(1+t)\cdot\frac{1}{1+t}}{1}=3-1=2$$

故应填 2.

8.（1997 年试题）求极限$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

【考点提示】 极限.

【解题分析】

$$原式=\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}\sin x}}=\frac{-2+1}{-1}=1.$$

或者

$$原式=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x-2}{\sqrt{x^2+\sin x}\cdot(\sqrt{4x^2+x-1}-x-1)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}\sin x}\cdot\left(-\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{3}{(-1)(-2-1)}=1.$$

9.（1998 年试题）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ ________.

【考点提示】 极限.

【解题分析】 求极限通常会有若干种途径，本题可采用以下几种方法：

(1) $$原式=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2-4}{x^2[\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2]}=\lim_{x\to0}\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)}{4x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x^2}=-\frac{1}{4}.$$

(2) $$原式=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{4}=-\frac{1}{4}.$$

(3) $$原式=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)-2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{4}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=-\frac{1}{4}.$$

注 *以上依次采用的方法是等价无穷小因子代换、洛必达法则和麦克劳林级数展开.*

10.（1999 年试题）求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

【考点提示】 等价无穷小、洛必达法则.

【解题分析】 $$原式=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x})(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}{x[\ln(1+x)-x](\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{2x[\ln(1+x)-x]}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{\ln(1+x)-x}\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{\ln(1+x)-x}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{2x}{\frac{1}{1+x}-1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x(1+x)}{-x}=-\frac{1}{2}.$$

11.（2000 年试题）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$ ________.

【考点提示】 等价无穷小、洛必达法则.

【解题分析】 由题设，

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-x^2}{1+x^2}}{6x^2}=-\frac{1}{6}.$$

12.（2001 年试题）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$ ________.

【考点提示】 极限.

【解题分析】 $原式=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{(x^2+x-2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(3-x)-(1+x)}{(x^2+x-2)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to1}\frac{2-2x}{x^2+x-2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to1}\frac{2(1-x)}{(x+2)(x-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to1}\frac{1-x}{(x+2)(x-1)}$$

$$=-\frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

13.（2002 年试题）设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to0$ 时，函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限 （ ）

A. 不存在　　B. 等于 1　　C. 等于 2　　D. 等于 3

【考点提示】 洛必达法则.

【解题分析】 由题设，$y(0)=y'(0)=0$，代入原微分方程，得 $y''(0)=1$，则

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{y(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{y'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2}{y''(x)}=2,$$

选 C.

14.（2004 年试题）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

【考点提示】 等价无穷小、洛必达法则.

【解题分析】 本题可采取以下两种方法计算：

(1) $原式=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{\sin x}{3}}{2x\cdot\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{(2+\cos x)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}.$$

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\cos x-1}{3}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{x^2}{6}}{x^2}=-\frac{1}{6}.$$

15. (2007 年试题) 极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$________.

【考点提示】　求极限.

【解题分析】　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}+\sin x}{6x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{2}{(1+x^2)^2}+1}{6}=-\frac{1}{6}.$$

16. (2008 年试题) 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

【考点提示】　求函数的极限.

【解题分析】

$$\lim_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\cos x\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)\cos x}{6x}$$

$$=\lim_{x\to0}\cos x\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.$$

17. (2009 年试题) 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4x}$.

【考点提示】　极限.

【解题分析】　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2[x-\ln(1+\tan x)]}{x^4}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{1}{\cos x(\sin x+\cos x)}}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sin x(\cos x-\sin x)}{\cos x(\sin x+\cos x)}}{2x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x(\sin x+\cos x)}=\frac{1}{4}.$$

考点 1.4　函数极限的逆问题

1. (1990 年试题) 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$,其中 a,b 是常数,则　(　　)

A. $a=1,b=1$　　B. $a=-1,b=1$

C. $a=1,b=-1$　　D. $a=-1,b=-1$

【考点提示】 函数极限逆问题.

【解题分析】 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=0$，于是有 $1-a=0,a+b=0$，得 $a=1,b=-1$. 故应选 C.

2. (1990 年试题) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$，求常数 a.

【考点提示】 函数极限逆问题.

【解题分析】 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}=9$，有 $2a=\ln 9$，于是$a=\ln 3$.

3. (1994 年试题) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则　　(　　)

A. $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$　　B. $a=0,b=-2$

C. $a=0,b=-\dfrac{5}{2}$　　D. $a=1,b=-2$

【考点提示】 函数极限逆问题.

【解题分析】 用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-a-2bx}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a)-(a+2b)x-2bx^2}{2x(1+x)}=2,$$

于是，必有 $1-a=0$，即 $a=1$. 从而

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-(a+2b)x-2bx^2}{2x(1+x)}=-\dfrac{1+2b}{2}=2$，得 $b=-\dfrac{5}{2}$. 故应选 A.

4. (1998 年试题) 确定常数 a,b,c 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\,(c\neq 0)$.

【考点提示】 变上限定积分求导、洛必达法则、等价无穷小.

【解题分析】 由题设表达式，因为 $\lim\limits_{x\to a}ax-\sin x=0$，但原式极限 $c\neq 0$，因此分母极限 $(x\to 0)$ 也为 0，即

$$\lim_{x\to 0}\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt=0,$$

从而 $\int_b^0\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}dt=0$，当 $b>0$ 时，$t\in(0,b)$，则 $\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}>0$，因而

$$\int_b^0\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt=-\int_0^b\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt<0.$$

当 $b<0$ 时，$t\in(\max(-1,b),0)$，则 $\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}>0$，因而 $\int_b^0\dfrac{\ln(1+t^3)}{3}dt>0$，综上 $b=0$. 于是

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt} = \lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}.$$

又由于
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1+x^3} = 0,$$

因此必有$\lim\limits_{x\to 0}(a-\cos x)=0$，即 $a=1$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{\ln(1+x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{2},$$

所以 $c=\frac{1}{2}$.

综上 $a=1, b=0, c=\frac{1}{2}$.

5. (2000 年试题) 若$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}\right)=0$，则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$为　　(　　)

A. 0　　B. 6　　C. 36　　D. ∞

【考点提示】 麦克劳林展开式、洛必达法则.

【解题分析】 由于题设未给出关于 $f(x)$ 的更多性质，故不应直接对原式应用洛必达法则，可将 $\sin 6x$ 展成麦克劳林级数，即当 $x\to 0$ 时，

$$\sin 6x = 6x - \frac{1}{3!}(6x)^3 + o(x^3) = 6x - 36x^3 + o(x^3),$$

因此
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{6x+xf(x)}{x^3} - 36 + \frac{o(x^3)}{x^3}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2} - 36 = 0,$$

所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2} = 36,$$

选 C.

或者

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x - 6x + 6x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x - 6x}{x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{6\cos 6x - 6}{3x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2(\cos 6x - 1)}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(6x)^2}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2} - 36 = 0,$$

所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2} = 36.$$

6. (2002 年试题) 已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，且满足