

弹性力学

(下册)

盖秉政

弹性力学

(下册)

盖秉政

哈尔滨工业大学出版社

目 录

第 7 章 直杆、薄板和薄壳问题	(359)
7.1 直杆的扭转	(359)
7.2 直杆的弯曲	(384)
7.3 薄板的弯曲	(400)
7.4 薄壳问题	(427)
习题	(456)
第 8 章 热弹性与动弹性问题	(466)
8.1 热弹性力学基本方程	(466)
8.2 热弹性方程的解	(471)
8.3 热传导方程的解	(480)
8.4 典型热弹性问题的求解	(483)
8.5 弹性动力学基本方程	(508)
8.6 一维平面波	(512)
8.7 一维柱面波	(520)
8.8 一维球面波	(526)
8.9 弹性波的分解	(529)
8.10 半空间上的 P 波与 SV 波	(533)
8.11 瑞利面波	(537)
8.12 双半空间上的 SH 波	(542)
8.13 双半空间上的 P 波与 SV 波	(545)
8.14 波导中的简谐波	(548)
8.15 弹性波的散射	(555)
8.16 动弹性问题的通解	(561)
习题	(575)
第 9 章 数值方法	(583)
9.1 有限差分法	(583)
9.2 有限元法	(597)
9.3 边界元法	(640)
9.4 加权残值法	(674)
习题	(683)

第 10 章 弹性体的平衡稳定性	(692)
10.1 基本概念	(692)
10.2 直杆的弹性压屈	(694)
10.3 杆系的弹性压屈	(705)
10.4 直杆(梁)的弯、扭屈曲	(709)
10.5 曲杆的屈曲	(722)
10.6 薄板与薄壳的小挠度屈曲	(727)
10.7 大挠度屈曲	(737)
10.8 跳跃屈曲	(747)
10.9 初始后屈曲理论	(756)
习题	(764)
参考文献	(771)

第 7 章 直杆、薄板和薄壳问题

在第 4 章我们建立了求解弹性力学问题的基本数学模型,并指出对具体给定的定解条件,它们的解将唯一确定。但是,真正地把它解出来,并不是一件很容易的事情。因此,针对(几何形状、受载条件等)不同类型问题,在基本数学模型基础上,建立相应的理论模型或求解方法是十分必要的。本章将就直杆、薄板和薄壳这三类不同几何形状的弹性体来阐述这方面的问题。

7.1 直杆的扭转

直杆是一类细长的弹性体,它在一个方向上的尺寸,要比与它垂直的其他两个方向上的尺寸大得多,并且表征杆沿长度方向几何形状的轴线是通过与它垂直的横截面形心的一条直线。与杆的轴线垂直的各横截面具有完全相同的几何形状时这样的杆被称为等截面直杆,或简称等直杆。等直杆的扭转与弯曲问题是一类有重要工程实际意义的问题,圣维南曾用弹性力学理论对这类问题进行了深入的研究,并给出了正确的解答,因此等直杆的扭转与弯曲问题也称圣维南问题,本节先来讲等直杆的扭转问题。

1. 用普朗特(Prandtl) 应力函数解扭转问题

考察如图 7.1.1 所示的等直杆,它的横截面具有任意的几何形状,杆的侧面不受力,两端面上施加一对大小相等、方向相反的扭矩 M ,不计体力。现在按图中所示坐标,来确定杆的变形与应力分布。

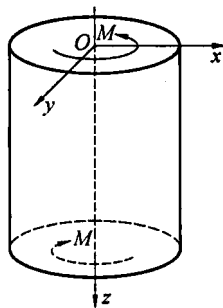


图 7.1.1

从材料力学对圆截面等直杆扭转问题的分析结果可以知道,杆中不恒为零的应力只有 τ_{xz}, τ_{yz} 。现在把这一结果扩展到弹性力学,即认为对任意横截面形状的杆,材料力学中得到的这一特殊情况下的结果在弹性力学中也适用。于是需要检查,杆中应力分布

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} \neq 0, \quad \tau_{yz} \neq 0 \quad (7.1.1)$$

看它们是否满足弹性力学的基本数学模型。为此,把上式代入力法方程中的应力平衡方程及用应力表示的连续性方程,可得

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (7.1.2a, b, c)$$

$$\nabla^2 \tau_{xz} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tau_{xz} = 0 \quad (7.1.2d)$$

$$\nabla^2 \tau_{yz} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tau_{yz} = 0 \quad (7.1.2e)$$

其余未写出的方程自动满足。从式(7.1.2a, b)可知 τ_{xz}, τ_{yz} 只是 (x, y) 的函数,若令

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (7.1.3a, b)$$

则式(7.1.2c)也能满足。把上式代入式(7.1.2d, e)得

$$\nabla^2 \tau_{xz} = \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \phi = 0, \quad \nabla^2 \tau_{yz} = -\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \phi = 0$$

因此有

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = C \quad (C \text{ 为常数}) \quad (7.1.3c)$$

这表明当 $\phi = \phi(x, y)$ 取为方程(7.1.3c)的解,且杆中不恒为零的应力 τ_{xz}, τ_{yz} 通过式(7.1.3a, b)用 ϕ 来表示时,力法的基本方程(平衡方程及用应力表示的连续方程)全都被满足。 $\phi(x, y)$ 称为扭转问题的应力函数或普朗特应力函数。下面来看边界条件。在杆的侧面,它的法线 N 对 x, y 及 z 轴夹角的方向余弦为

$$l = \cos(\hat{N}, x) \neq 0, \quad m = \cos(\hat{N}, y) \neq 0, \quad n = \cos(\hat{N}, z) \neq 0$$

把它们及应力分量式(7.1.1)代入边界条件表达式(4.16.3),并注意到在杆的侧面没外力作用(即 $\bar{p}_x = \bar{p}_y = \bar{p}_z = 0$),则需要被满足的只剩下一个,即

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = 0$$

把式(7.1.3a, b)代入上式,并注意到在杆侧面边界上 $l = \frac{dy}{ds}, m = -\frac{dx}{ds}$,可得

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{d\phi}{ds} = 0$$

由此可见应力函数 ϕ 在边界 Γ 上应取常数值

$$\phi|_{\Gamma} = \text{常数} \quad (7.1.4a)$$

从应力的表达式(7.1.3a, b)可以看出,当应力函数 ϕ 改变一个常数时,杆中的应力并不受影响,因此当杆的横截面为一单连通区域,即杆是一个不带孔的实心杆时,总可以增减一个常数,使应力函数在杆侧面上的边界值为零,即

$$\phi|_{\Gamma} = 0 \quad (\Gamma \text{ 为杆的边界}) \quad (7.1.4b)$$

现在再来看杆的端面边界条件。在上端面,它的法线方向余弦 $l = m = 0, n = -1$,把它们代入式(4.16.3),需要被满足的条件是

$$-\tau_{xz} = \bar{p}_x, \quad -\tau_{yz} = \bar{p}_y$$

端面上的面力分布 \bar{p}_x, \bar{p}_y 是未知的,但它们应合成力偶矩 M ,于是有

$$\iint \bar{p}_x dx dy = 0, \quad \iint \bar{p}_y dx dy = 0 \quad (7.1.5a, b)$$

$$\iint (y\bar{p}_x - x\bar{p}_y) dx dy = M \quad (7.1.5c)$$

以上各积分的积分域是杆横截面的整个区域。把式(4.16.3)、(7.1.3a, b)代入以上各式,得

$$\iint \bar{p}_x dx dy = \iint (\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n) dx dy = \iint \tau_{xz} n dx dy = -\iint \tau_{xz} dx dy =$$

$$\begin{aligned}
& - \iint \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy = \int dx \int \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = \int_{\Gamma} (\phi_2 - \phi_1) dx = 0 \\
\iint \bar{p}_y dx dy &= \iint (\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n) dx dy = \iint \tau_{yz} n dx dy = - \iint \tau_{yz} dx dy = \\
& \iint \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy = \int dy \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \int_{\Gamma} (\phi_4 - \phi_3) dy = 0 \\
\iint (\bar{y} p_x - \bar{x} p_y) dx dy &= \iint [y(\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n) - x(\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n)] dx dy = \\
& \iint (y \tau_{xz} - x \tau_{yz}) n dx dy = - \iint \left(y \frac{\partial \phi}{\partial y} + x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy = \\
& - \iint \left[\frac{\partial (y\phi)}{\partial y} + \frac{\partial (x\phi)}{\partial x} \right] dx dy + 2 \iint \phi dx dy = \\
& - \int_{\Gamma} dx \int \frac{\partial (y\phi)}{\partial y} dy - \int_{\Gamma} dy \int \frac{\partial (x\phi)}{\partial x} dx + 2 \iint \phi dx dy = \\
& - \int_{\Gamma} (y_2 \phi_2 - y_1 \phi_1) dx - \int_{\Gamma} (x_2 \phi_4 - x_1 \phi_3) dy + 2 \iint \phi dx dy = \\
& 2 \iint \phi dx dy
\end{aligned}$$

以上各式中的单积分都是沿杆横截面边界线 Γ 的积分。 $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ 是杆横截面边界线 Γ 上的 ϕ 值, 对单连通域, 依式(7.1.4), 它们都等于零, 因此关于它们的积分自然是零。 x_1, x_2, y_1, y_2 是 Γ 上点的坐标。从以上三个式子可以看出, 当引入扭转应力函数 ϕ 后, 所设应力(即式(7.1.1)) 满足杆上端面合力为零的条件(即式(7.1.5a, b))。把上面最后一式代入式(7.1.5c), 得

$$2 \iint \phi dx dy = M \quad (7.1.6)$$

这说明在杆的上端面 2ϕ 应合成力偶矩 M 。对杆的下端面进行相同的处理, 可得到完全相同的结果。

至此可以看出在扭杆中假定的应力分布(即式(7.1.1)), 在圣维南原理的提法下, 通过扭转应力函数 $\phi(x, y)$ 求出, 它们能够满足弹性力学的基本方程和全部边界条件, 因此它们也就是扭杆唯一的弹性力学解答。于是等直杆扭转问题的求解归结为扭转应力函数 ϕ 的求解。对于横截面为单连通域的实心杆, 确定 ϕ 的基本方程和定解条件分别是式(7.1.3c)、(7.1.4) 和(7.1.6)。

下面来确定杆中的位移。为此, 把式(7.1.1) 代入物理方程(2.4.1), 并应用式(7.1.3a, b), 得

$$\begin{aligned}
& \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \\
& \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = -\frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial x}
\end{aligned}$$

把以上各式代入几何方程(4.7.11), 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7.1.7a, b, c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (7.1.7d)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (7.1.7e)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (7.1.7f)$$

积分式(7.1.7a,b,c),得

$$u = f_1(y, z), \quad v = f_2(x, z), \quad w = f_3(x, y) \quad (7.1.8)$$

式中 f_1, f_2, f_3 是所含宗量的任意函数。把以上三式代入式(7.1.7d),得

$$\frac{\partial f_1(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial f_2(x, z)}{\partial x} = 0$$

由此有

$$\frac{\partial f_1(y, z)}{\partial y} = - \frac{\partial f_2(x, z)}{\partial x} = f(z)$$

式中 $f(z)$ 为 z 的任意函数。积分上式得

$$u = f_1(y, z) = yf(z) + \alpha_1(z) \quad (7.1.9a)$$

$$v = f_2(x, z) = -xf(z) + \alpha_2(z) \quad (7.1.9b)$$

式中, $\alpha_1(z), \alpha_2(z)$ 是 z 的任意函数。把以上二式分别代入式(7.1.7e)及式(7.1.7f),得

$$\frac{\partial w}{\partial y} = - \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial x} + x \frac{df(z)}{dz} - \frac{d\alpha_2(z)}{dz} \quad (7.1.10a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \frac{df(z)}{dz} - \frac{d\alpha_1(z)}{dz} \quad (7.1.10b)$$

从式(7.1.8)的第三式可知,以上二式左端项是 x, y 的函数,因此二式的右端项也只能是 x, y 的函数,于是要求

$$\frac{df(z)}{dz} = -K, \quad \frac{d\alpha_1(z)}{dz} = \omega_y, \quad \frac{d\alpha_2(z)}{dz} = -\omega_x$$

式中, K, ω_x, ω_y 为任意常数。积分以上三式,得

$$f(z) = -Kz - \omega_z, \quad \alpha_1(z) = u_0 + \omega_y z, \quad \alpha_2(z) = v_0 - \omega_x z$$

式中 u_0, v_0, ω_z 为任意常数,把以上三式代入式(7.1.9)、(7.1.10),得

$$u = u_0 + \omega_y z - \omega_z y - Kyz$$

$$v = v_0 - \omega_x z + \omega_z x + Kxz$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} + Ky - \omega_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = - \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial x} - Kx + \omega_x$$

显然,以上各式中, u_0, v_0 表示杆的刚体平动位移在 x, y 方向上的分量, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 是杆的刚体转动角矢在 x, y, z 方向上的分量,如果去掉这些与杆的变形无关的刚体运动,以上各式变为

$$u = -Kyz, \quad v = Kxz \quad (7.1.11a, b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} + Ky \quad (7.1.12a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = - \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial x} - Kx \quad (7.1.12b)$$

将式(7.1.12a)对 y 求导减去式(7.1.12b)对 x 求导,得

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2GK \quad (7.1.13)$$

把上式与式(7.1.3)比较,得

$$C = 2GK$$

从式(7.1.11),有

$$|D|^2 = u^2 + v^2 = K^2(x^2 + y^2)z^2 = K^2 r^2 z^2$$

由此有

$$|D| = Krz \quad \text{或} \quad K = \frac{|D|}{rz}$$

式中, r 是杆横截面形心(坐标原点)到截面上一点的矢径长; $|D|$ 是该点的位移矢量长,如图 7.1.2 所示,于是 $\frac{|D|}{r}$ 即是杆 z 处截面的转角 $\alpha(z)$,所以 $K = \frac{|D|}{rz}$ 即表示杆单位长度的扭转角。

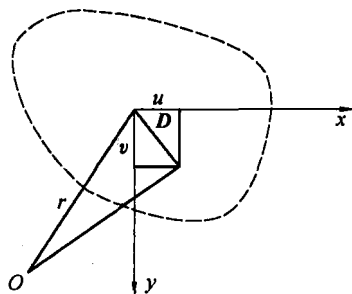


图 7.1.2

2. 用圣维南共轭扭转函数 ψ 解扭转问题

引入圣维南共轭扭转函数 ψ ,使

$$\phi(x, y) = GK \left[\psi(x, y) - \frac{x^2 + y^2}{2} \right] \quad (7.1.14)$$

把上式分别代入式(7.1.13)、(7.1.4)、(7.1.3a, b),得

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (7.1.15a)$$

$$\psi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \text{常数} \quad (x, y \in \Gamma) \quad (7.1.15b)$$

$$\tau_{xz} = GK \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - y \right) \quad (7.1.16a)$$

$$\tau_{yx} = GK \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} + x \right) \quad (7.1.16b)$$

把式(7.1.14)代入式(7.1.6),得

$$\begin{aligned} 2 \iint \phi \, dx dy &= - \iint \left(y \frac{\partial \phi}{\partial y} + x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy = - GK \iint \left[y \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - y \right) + x \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - x \right) \right] dx dy = \\ &GK \iint \left(x^2 + y^2 - x \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy = M \end{aligned}$$

或

$$M = GKJ, \quad J = \iint \left(x^2 + y^2 - x \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy \quad (7.1.17a, b)$$

通常把 J 称为等直杆的抗扭断面系数; GJ 称为抗扭刚度。把式(7.1.14)代入式(7.1.12),得

$$\frac{\partial w}{\partial x} = K \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = K \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7.1.18)$$

3. 用圣维南扭转函数 φ 解扭转问题

引用圣维南扭转函数 φ ,使

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (7.1.19)$$

上式的第二式对 x 求导减第一式对 y 求导,得

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (7.1.20a)$$

若令 N 是杆横截面边界的外法线方向(参见图 3.3.1),应用式(7.1.19)和(7.1.15b),有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial N} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial N} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial N} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos(\hat{N}, x) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos(\hat{N}, y) = \\ &= y \cos(\hat{N}, x) - x \cos(\hat{N}, y) \quad (x, y \in \Gamma) \end{aligned} \quad (7.1.20b)$$

$$\text{或} \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) l + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) m = 0 \quad (x, y \in \Gamma) \quad (7.1.20c)$$

$$l = \cos(\hat{N}, x), \quad m = \cos(\hat{N}, y)$$

把式(7.1.19)代入式(7.1.16)和(7.1.17b),得

$$\tau_{xz} = GK \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \quad (7.1.21a)$$

$$\tau_{yz} = GK \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \quad (7.1.21b)$$

$$J = \iint \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dy \quad (7.1.22)$$

把式(7.1.19)代入式(7.1.18),得

$$\frac{\partial w}{\partial x} = K \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = K \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

对 x 积分上式的第一式,对 y 积分上式的第二式,得

$$w(x, y) = K\varphi(x, y) + f_1(y)$$

$$w(x, y) = K\varphi(x, y) + f_2(x)$$

式中 $f_2(y), f_1(x)$ 分别是 y, x 的函数。以上二式同时成立的条件为 $f_1(y) = f_2(x) =$ 常数,它们显然是杆沿 z 方向的刚体平动分量。若不计与杆变形无关的运动,则 w 可写为

$$w(x, y) = K\varphi(x, y) \quad (7.1.23)$$

上面引入的函数 $\varphi(x, y)$ 称为圣维南扭转函数, ψ 是 φ 的共轭函数,称为圣维南共轭扭转函数。

4. 扭转问题的复变函数解法

引入复扭转函数 F ,使

$$F = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (7.1.24)$$

由于它的实部 φ 与虚部 ψ 满足柯西-黎曼条件(7.1.19),所以 $F = F(z)$ 是杆横截面内复变量 $z = x + iy$ 的解析函数(注意:这里用 z 表示复变量,而非直角坐标的 z 坐标)。由上式, φ, ψ 又可以用 F 写为

$$\varphi(x, y) = \frac{F(z) + \overline{F(z)}}{2} \quad (7.1.25a)$$

$$\psi(x, y) = \frac{F(z) - \overline{F(z)}}{2i} \quad (7.1.25b)$$

把式(7.1.24b)代入式(7.1.15b),得

$$\frac{F(z) - \overline{F(z)}}{2i} = \frac{1}{2} \bar{z}z + \text{常数} \quad (z \in \Gamma)$$

或

$$F(z) - \overline{F(z)} - iz\bar{z} = \text{常数} \quad (z \in \Gamma) \quad (7.1.26)$$

式(7.1.21a) - i × 式(7.1.21b),并应用式(7.1.25a)、(7.1.17a),有

$$\begin{aligned} \tau_{xz} - i\tau_{yz} &= GK \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y - ix \right) = GK \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - i\bar{z} \right) = \\ &= GK \left(\frac{\partial (F + \bar{F})}{\partial z} - i\bar{z} \right) = GK \left(\frac{\partial F}{\partial z} - i\bar{z} \right) = \frac{M}{J} \left(\frac{\partial F}{\partial z} - i\bar{z} \right) \end{aligned} \quad (7.1.27)$$

在引入复自变量 $z = x + iy$ 时,等直杆的抗扭断面系数 J (式(7.1.22))还可以作如下变换

$$\begin{aligned} J &= \iint \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dy = \\ &= \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} (xy^2) + \frac{\partial}{\partial y} (x^2y) \right] dx dy + \iint \left[\frac{\partial}{\partial y} (x\varphi) - \frac{\partial}{\partial x} (y\varphi) \right] dx dy = \\ &= \oint_{\Gamma} [(-x^2y)dx + (xy^2)dy] - \oint_{\Gamma} (x\varphi dx + y\varphi dy) = \\ &= - \oint_{\Gamma} xy(xdx - ydy) - \oint_{\Gamma} \varphi d \frac{x^2 + y^2}{2} = \\ &= - \frac{1}{8i} \oint_{\Gamma} (z^2 - \bar{z}^2)(zdz + \bar{z}d\bar{z}) - \oint_{\Gamma} \varphi d \frac{\bar{z}z}{2} \end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} z^3 dz &= 0, \quad \oint_{\Gamma} \bar{z}^3 d\bar{z} = 0 \\ \oint_{\Gamma} z^2 \bar{z} d\bar{z} &= \oint_{\Gamma} z^2 d \frac{\bar{z}^2}{2} = \frac{z^2 \bar{z}^2}{2} \Big|_{\Gamma} - \oint_{\Gamma} \bar{z}^2 z dz = - \oint_{\Gamma} \bar{z}^2 z dz \end{aligned}$$

把以上结果代回 J 的表达式,得

$$J = \frac{1}{4i} \oint_{\Gamma} \bar{z}^2 z dz - \int_{\Gamma} \varphi d \left(\frac{\bar{z}z}{2} \right) \quad (7.1.28)$$

5. 多连通域问题

当等直杆的横截面是包含有孔洞的所谓多连通域时,在如图 7.1.3 所示杆横截面各边界 $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k, \dots$ 上,用圣维南共轭扭转函数 ψ 表示的边界条件(7.1.15b)将出现与边界闭围线数相同个数的常数。如前所述,这些常数只能在一个如最外面的 Γ_0 边界上取为零,而在其余各边界上,这些常数仍然是

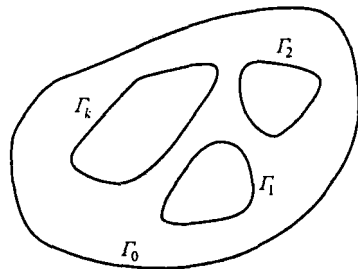


图 7.1.3

任意的。为了确定它们,需要补充与闭边界个数相同的补充条件。在第 4 章 4.16 节中已经说过,弹性体在变形时,各点的位移必须是单值。对于等直杆的扭转问题而言,位移由式(7.1.11a,b)、(7.1.23)给出,从这几个式子可以看出,位移分量 u, v 恒是单值,唯一可能

出现多值的位移分量是 $w(x, y)$ 。为此应规定它绕任何一个闭边界线 $\Gamma_k (k = 0, 1, 2, \dots, n)$ 转一周时必须回到原值。在 Γ_0 上可取 $\varphi = 0$, 而在其余内孔洞的边界 $\Gamma_k (k = 1, 2, \dots, n)$ 上必须有

$$\oint_{\Gamma_k} dw = K \oint_{\Gamma_k} d\varphi = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

或

$$\oint_{\Gamma_k} d\varphi = \oint_{\Gamma_k} \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

但

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial N} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial N} = -\frac{\partial \psi}{\partial N}$$

由此有

$$\oint_{\Gamma_k} \frac{\partial \psi}{\partial N} ds = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (7.1.29)$$

这样便得到了由上式给出的 n 个补充方程, 再加上 Γ_0 上 $\varphi = 0$ 的条件即可用来决定出 $(n+1)$ 连通 $(n+1)$ 个边界条件中出现的常数。补充条件(7.1.29)也可以用普朗特应力函数 ϕ 来写, 为此只需将联系圣维南共轭扭转函数 ψ 与普朗特应力函数中的关系式(7.1.14)代入式(7.1.29), 于是有

$$\frac{1}{GK} \oint_{\Gamma_k} \frac{\partial \phi}{\partial N} ds + \oint_{\Gamma_k} \left(x \frac{\partial x}{\partial N} + y \frac{\partial y}{\partial N} \right) ds = 0$$

而

$$\oint_{\Gamma_k} \left(x \frac{\partial x}{\partial N} + y \frac{\partial y}{\partial N} \right) ds = \oint_{\Gamma_k} [x \cos(\hat{N}, x) + y \cos(\hat{N}, y)] ds = 2\Omega_k$$

式中, Ω_k 是边界 Γ_k 所围面积。这样便得到

$$\oint_{\Gamma_k} \frac{\partial \phi}{\partial N} ds = -2GK\Omega_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (7.1.30)$$

对多连通域, 杆横截面上的扭矩 M 为

$$\begin{aligned} M &= \int (\gamma \bar{p}_x - x \bar{p}_y) dx dy = - \iint (\gamma \tau_{xz} - x \tau_{yz}) dx dy = - \iint \left(y \frac{\partial \phi}{\partial y} + x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy = \\ &= - \iint \left(\frac{\partial (y\phi)}{\partial y} + \frac{\partial (x\phi)}{\partial x} \right) dx dy + 2 \iint \phi dx dy = \\ &= \sum_{k=0}^n \oint_{\Gamma_k} \phi (y dx - x dy) + 2 \iint \phi dx dy = \\ &= \oint_{\Gamma_0} \phi (y dx - x dy) + \sum_{k=1}^n \oint_{\Gamma_k} \phi (y dx - x dy) + 2 \iint \phi dx dy = \\ &= 2\phi_0 \Omega_0 + 2 \sum_{k=1}^n \phi_k \Omega_k + 2 \iint \phi dx dy \end{aligned} \quad (7.1.31)$$

式中 $\phi_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ 是普朗特应力函数 ϕ 在边界 Γ_k 上的值, 其中一个可以取为零, $\Omega_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ 是边界 Γ_k 所围出的面积。

6. 扭杆横截面上剪应力的分布特征

下面对等直杆受扭时, 杆横截面上剪应力的分布特征作一简单的叙述。

(1) 剪应力环流(循环应力)。在杆的横截面上任取一闭围线 Γ , 如图 7.1.4 所示, 围线上任意一点沿该点切线方向的剪应力 τ_s 可写为

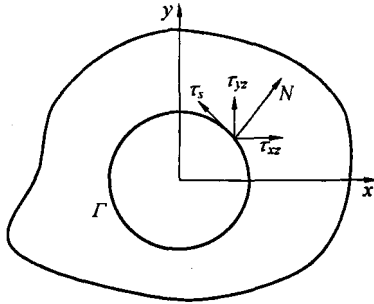


图 7.1.4

$$\begin{aligned} \tau_s &= -\tau_{xz} \cos(\hat{N}, y) + \tau_{yz} \cos(\hat{N}, x) = -\tau_{xz} \frac{\partial y}{\partial N} + \tau_{yz} \frac{\partial x}{\partial N} = \\ &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial N} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial N} = -\frac{\partial \phi}{\partial N} \end{aligned} \quad (7.1.32a)$$

上式沿 Γ 积分一周, 并应用式(7.1.3)、(7.1.13) 及格林公式, 有

$$\begin{aligned} J_s &= \oint_{\Gamma} \tau_s ds = -\oint_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial N} ds = -\oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial N} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial N} \right) ds = \\ &= -\oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial s} \right) ds = \oint_{\Gamma} \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} dx - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dy \right] = \\ &= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] dx dy = -\iint_{\Omega} \nabla^2 \phi dx dy = \\ &= 2GK \iint_{\Omega} dx dy = 2GK\Omega \end{aligned} \quad (7.1.32b)$$

式中 Ω 为 Γ 所围出的面积。上式左端的 J_s 称为剪应力在闭围 Γ 上的剪应力环流(或循环应力), 于是该式表明等直杆受扭时, 杆横截面上沿任何闭曲线的剪应力环流正比于该闭曲线所包围的面积。若用 L 记围线 Γ 的长度, $\bar{\tau}_s$ 记围线 Γ 上剪应力的平均值, 应用中值定理, 上式还可以写为

$$\bar{\tau}_s = 2GK \frac{\Omega}{L} \quad (7.1.33)$$

可见杆横截面上任意闭曲线上沿闭曲线的平均剪应力与曲线的长度 L 成反比, 而与此曲线所围面积 Ω 成正比。

(2) 剪应力极值。等直杆受扭时, 横截面上任意一点的剪应力矢量 τ 与它沿 x, y 方向的分量 τ_{xz}, τ_{yz} 有如下关系:

$$\tau^2 = \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \quad (7.1.34)$$

在上式两边作 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 运算, 并应用式(7.1.3), 可得

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tau^2 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] = \\ &= 2 \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)^2 = C^2 > 0 \end{aligned}$$

在杆横截面内任取一点,并以该点为心,以充分小的 r 为半径在横截面内作圆,则 $\frac{d\tau^2}{dr}$ 沿圆边界的线 Γ_σ 的积分,应用格林公式可变换为

$$\oint_{\Gamma_\sigma} \frac{d\tau^2}{dr} ds = \iint_{\sigma} \nabla^2 \tau^2 dx dy > 0$$

式中 σ 是 Γ_σ 所围区域。由上式可知, $\frac{d\tau^2}{dr}$ 为杆横截面所占区域任一内点,并且对任意的 r 方向都大于零,显然这是不可能的,除非我们取的点在杆横截面的边界上。这说明扭杆中最大剪应力发生在横截面的边界上。

(3) 等高线上的剪应力。在图 7.1.4 中,若 Γ 是杆横截面上 ϕ 值处处相等的曲线,则称 Γ 是 ϕ 的等值线或等高线。沿等高线 Γ 法线 N 及切线 S 方向上的剪应力 $\tau_{zN}, \tau_{zS} = \tau$, 依式 (7.1.3), 可写为

$$\begin{aligned} \tau_{zN} &= \tau_{zx} \cos(\hat{N}, x) + \tau_{zy} \cos(\hat{N}, y) = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial s} \Big|_{\Gamma} \\ \tau_{zS} &= -\tau_{zx} \cos(\hat{N}, y) + \tau_{zy} \cos(\hat{N}, x) = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial N} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial N} = -\frac{\partial \phi}{\partial N} \Big|_{\Gamma} \end{aligned}$$

在 Γ 上因普朗特应力函数 ϕ 为常值,所以 $\frac{\partial \phi}{\partial s} = 0$, 即 $\tau_{zN} = 0$ 。这表明在等高线上,剪应力与沿此等高线切线方向的剪应力 τ , 相同,且其值等于 $-\frac{\partial \phi}{\partial N}$ 。

7. 薄膜比拟

普朗特在提出用应力函数 ϕ 求解等直杆扭转问题的同时,也建立了一种分析此类问题的薄膜比拟方法。下面就来阐述这种方法的实质。设有一张薄膜,周边固定,薄膜在内压 q 的作用下微微隆起,如图 7.1.5 所示。假设薄膜均匀柔软,不计薄膜质量,则薄膜隆起十分微小时,从薄膜中切取的微元体 $ABCD$ 上作用的所有力的平衡条件为

$$\begin{aligned} -Tdy \frac{\partial z}{\partial x} + Tdy \frac{\partial}{\partial x} \left(z + \frac{\partial z}{\partial x} dx \right) - Tdx \frac{\partial z}{\partial y} + \\ Tdx \frac{\partial}{\partial y} \left(z + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) + q dx dy = 0 \end{aligned}$$

式中, T 是薄膜的张力; z 是薄膜隆起的高度。化简上式后,再用 $dx dy$ 除,得

$$T \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) + q = 0$$

或

$$\nabla^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{T} \quad (x, y \in \mathcal{D}) \quad (7.1.35)$$

在薄膜的边界,即 Γ 上

$$z = 0 \quad (x, y \in \Gamma) \quad (7.1.36)$$

把式(7.1.35)、(7.1.36)同式(7.1.3)(或7.1.13)、(7.1.4b)比较,可以看出两者在数学形

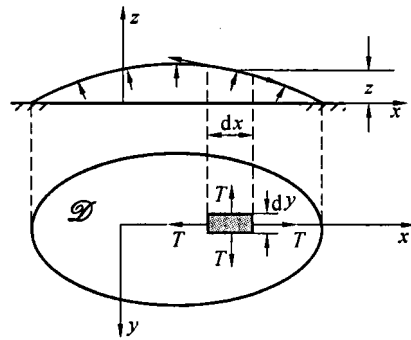


图 7.1.5

式上是完全相同的,薄膜隆起的高度 z 相当于普朗特应力函数 ϕ , $\frac{q}{T}$ 相当于 $2GK$, 即这两类不同的问题有如下的比例关系

$$\frac{\phi}{z} = \frac{2GK}{\frac{q}{T}} \quad \text{或} \quad \phi = \frac{2GK}{\frac{q}{T}} z \quad (7.1.37)$$

在这种比例关系下,如果知道了薄膜的隆起高度 z , 通过上式也就可以求出普朗特应力函数 ϕ , 这就是薄膜比拟的实质。把式(7.1.37)两边分别对 x 及 y 求导, 并应用普朗特应力函数 ϕ 与剪应力之间的关系式(7.1.3), 可得

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{2GK}{\frac{q}{T}} \frac{\partial z}{\partial y} \quad (7.1.38a)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{2GK}{\frac{q}{T}} \frac{\partial z}{\partial x} \quad (7.1.38b)$$

这两个式子说明扭杆横截面上剪应力的大小与薄膜隆起高度的斜率成正比。由于坐标 x, y 是人为选定, 所以 x, y 轴可以取在相互垂直的任意两个方向上, 由此可见, 扭杆横截面上任一点, 沿任一方向的剪应力的大小均比例于该点处薄膜隆起高度沿垂直方向的斜率; 扭杆横截面上的最大剪应力发生在薄膜隆起高度斜率最大的边界点上, 其值与最大斜率成正比, 方向与斜率方向垂直。把式(7.1.37)代入式(7.1.6), 加于扭杆横截面上的扭矩 M 又可写为

$$M = 2 \iint \frac{2GK}{\frac{q}{T}} z dx dy = \frac{2GK}{\frac{q}{T}} 2V \quad (7.1.39)$$

式中 $V = \iint z dx dy$ 是薄膜与边界平面间的体积, 它表明扭矩 M 与薄膜体积成正比, 以此也可以建立两者的定量比例关系。

如果在薄膜上面放上质量可以忽略的“刚板”, 其数量与扭杆横截面内孔洞的数量相同, “刚板”的形状与孔的形状一致, 放置的位置也与孔洞的位置相对应, 并且当薄膜隆起时, 使“刚板”保持水平, 如图 7.1.6 所示, 这时薄膜隆起时在边界 $\Gamma(\Gamma_k, k = 1, 2, \dots)$ 上的边界条件可写为

$$z|_{\Gamma} = \text{常数} \quad (7.1.40)$$

上式与式(7.1.4a)相对应, 于是用这种方法即可实现多连通域问题的薄膜比拟。

薄膜比拟确定了一种用实验求解等直杆扭转问题的方法, 但它更重要的用途是这种方法给了我们一种简单的几何形象, 对分析等直杆扭转剪应力分布有所帮助。

例 1 试用普朗特应力函数 ϕ 求如图 7.1.7 所示椭圆横截面等直杆的扭转问题。椭圆的长、短半轴分别为 a 及 b , 对杆施加的扭矩为 M 。

解 等直杆横截面的边界线方程为

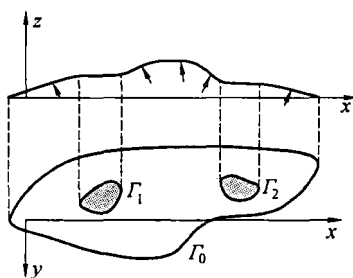


图 7.1.6

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (1)$$

基于这个方程,如果把普朗特应力函数 ϕ 取为

$$\phi = m \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (m \text{ 为待定常数}) \quad (2)$$

那么它满足边界 $\phi = 0$ 的边界条件(7.1.4b)。

把上式代入式(7.1.13),得

$$\frac{2m}{a^2} + \frac{2m}{b^2} = -2GK$$

解出 m ,得

$$m = \frac{2GK}{\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}} = -GK \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \quad (3)$$

把式(3)代入式(2),得

$$\phi = -GK \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (4)$$

这样求得的 ϕ 即可以满足扭杆的基本方程又可以满足边界条件,所以它就是椭圆截面杆

扭转问题的解。把上式代入式(7.1.6),并在区域 $\mathcal{D}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ 上积分,得

$$\begin{aligned} 2 \iint_{\mathcal{D}} \phi dx dy &= -2GK \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) dx dy = \\ &= -2GK \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{1}{a^2} \iint_{\mathcal{D}} x^2 dx dy + \frac{1}{b^2} \iint_{\mathcal{D}} y^2 dx dy - \iint_{\mathcal{D}} dx dy \right) = \\ &= -2GK \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{\pi ab}{4} + \frac{\pi ab}{4} - \pi ab \right) = M \end{aligned}$$

由此求得扭杆单位长度的扭转角为

$$K = \frac{(a^2 + b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} \quad (5)$$

把上式代入式(4),得

$$\phi = -\frac{M}{\pi ab} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (6)$$

由此按式(7.1.3)求得扭杆中剪应力分量为

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{2M}{\pi ab^3} y, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2M}{\pi a^3 b} x \quad (7)$$

合剪应力为

$$\tau = (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2M}{\pi ab} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

应用薄膜比拟可以想象到,固定于椭圆边界上的薄膜在隆起时,在椭圆短半轴端点(A,B)处薄膜的斜率最大,因此扭杆的最大剪应力将发生在这两点,把 $x = 0, y = \pm b$ 代入式

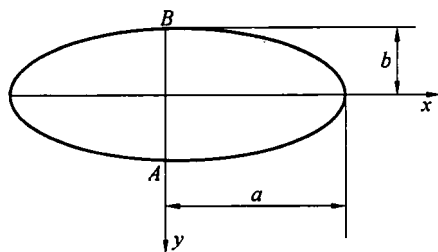


图 7.1.7

(8),得

$$\tau_{\max} = \tau_A = \tau_B = \frac{2M}{\pi ab^2} \quad (9)$$

把式(5)代入式(7.11)、(7.12)得扭杆的位移分量为

$$u = -\frac{(a^2 + b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} yz, \quad v = \frac{(a^2 + b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} xz \quad (10a, b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{(a^2 - b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} y, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{(a^2 - b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} x$$

对上面最后两个式子积分,得

$$w = -\frac{(a^2 - b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} xy + f_1(y) = -\frac{(a^2 - b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} xy + f_2(x)$$

可见,从两个式子积分出的任意函数 $f_1(y)$ 及 $f_2(x)$ 应等于同一常数 w_0 ,而这个常数 w_0 显然就是扭杆沿 z 方向的刚体位移,它与扭杆的变形无关,去掉它后。扭杆沿 z 方向的位移分量可写为

$$w = -\frac{(a^2 - b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} xy \quad (10c)$$

由这个式子可以看到,扭杆的横截面在受扭矩 M 作用时一般来说不能再保持平面,而是翘曲成曲面,曲面的等高线在 xy 平面上的投影是渐近线为 x 轴及 y 轴的双曲线。上式只在 $a = b$,即扭杆的横截面为圆截面时 $w = 0$,只在这种情况下扭杆扭转时,其横截面才能保持平面的形状不变,且能从式(5)、(8)、(10)得到材料力学中给出的全部结果,即

$$K = \frac{M}{GJ_P}, \quad J_P = \frac{\pi a^4}{2}$$

$$|D| = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{Mr}{GJ_P} z = \frac{\tau}{G} z \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{M}{J_P} r$$

例2 试用圣维南扭转函数 φ ,求如图7.1.8所示矩形横截面等直杆的扭转问题。这矩形的半边长为 a 及 b ,对杆施加的扭矩为 M 。

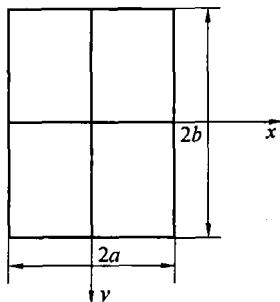


图 7.1.8

解 为简化边界条件,对圣维南扭转函数 φ 作如下变换

$$\varphi = xy - \varphi_1 \quad (1)$$

依式(7.1.20a),可知函数 φ_1 同 φ 一样也是调和函数,即