

高等代数附册

习题答案与提示

(第二版)

北京大学数学系几何与代数教研室代数小组 编

高等教育出版社

015

330

高等学校教学参考书

高等代数附册

习题答案与提示

(第二版)

北京大学数学系
几何与代数教研室代数小组 编

高等教育出版社

本书是北京大学数学系几何与代数教研室代数小组所编《高等代数》(第二版)一书的附册. 内容为习题、答案与提示. 第一部分把原书的习题集中起来了, 第二部分是各章习题的答案或提示.

本书第二版除对第一版内容作了一些订正外, 主要是根据《高等代数》第二版因增加章节而补充的习题, 相应作出了提示和答案.

图书在版编目(CIP)数据

《高等代数》附册: 习题答案与提示/北京大学数学系几何与代数教研室代数小组编. —2版. —北京: 高等教育出版社, 1992. 6(2004 重印)
ISBN 7-04-003753-X

I. 高… II. 北… III. 高等代数 IV. 015

中国版本图书馆CIP数据核字(95)第20284号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	河北省香河县印刷厂	版 次	1979年3月第1版
开 本	850×1168 1/32		1992年6月第2版
印 张	4	印 次	2004年2月第15次印刷
字 数	90 000	定 价	5.60 元

凡购买高等教育出版社图书, 如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

再 版 前 言

由于《高等代数》于1988年出了第二版,我们决定对本书第一版进行修订.除对第一版中某些不妥之处,以及印刷错误作了校订之外,主要是根据《高等代数》第二版因新增加的章节而增补的习题,相应作出了提示和答案.此项工作是由北京大学数学系几何与代数教研室王鲁燕同志完成的.

北 京 大 学 数 学 系

几何与代数教研室代数小组

1991.8

前 言

应广大读者的要求，我们对我校编的《高等代数》一书中的习题和补充题作了答案和提示。计算题只给答案，有少数计算题因答案不是唯一的，就不给答案。对一部分证明题，特别是补充题给了提示。作提示的目的是启发思考、提供解题的方法和线索。但是解题的思路和方法是多种多样的，不要因为提示而束缚了思想。我们赞成刻苦钻研，独立思考，方法不拘一格，这样才能起到对内容加深理解和灵活运用的作用。

北 京 大 学 数 学 力 学 系

几何与代数教研室代数小组

1979. 2.

目 录

第一部分 习 题

第一章 多项式	1
习题	1
补充题	4
第二章 行列式	8
习题	8
补充题	14
第三章 线性方程组	17
习题	17
补充题	22
第四章 矩 阵	26
习题	26
补充题	32
第五章 二次型	35
习题	35
补充题	37
第六章 线性空间	40
习题	40
补充题	45
第七章 线性变换	46
习题	46
补充题	52
第八章 λ -矩阵	54

习题	54
第九章 欧几里得空间	57
习题	57
补充题	61
第十章 双线性函数	64
习题	64
第十一章 代数基本概念介绍	69
习题	69

第二部分 答案与提示

第一章 多项式	72
习题	72
补充题	74
第二章 行列式	77
习题	77
补充题	78
第三章 线性方程组	81
习题	81
补充题	83
第四章 矩阵	85
习题	85
补充题	89
第五章 二次型	91
习题	91
补充题	91
第六章 线性空间	96
习题	96
补充题	97

第七章 线性变换.....	99
习题.....	99
补充题.....	104
第八章 λ -矩阵.....	106
习题.....	106
第九章 欧几里得空间.....	109
习题.....	109
补充题.....	112
第十章 双线性函数.....	115
习题.....	115
第十一章 代数基本概念介绍.....	117
习题.....	117

第一部分 习 题

第一章 多 项 式

习 题

1. 用 $g(x)$ 除 $f(x)$, 求商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$:
 - 1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1, g(x) = 3x^2 - 2x + 1$;
 - 2) $f(x) = x^4 - 2x + 5, g(x) = x^2 - x + 2$.
2. m, p, q 适合什么条件时, 有
 - 1) $x^2 + mx - 1 \mid x^3 + px + q$;
 - 2) $x^2 + mx + 1 \mid x^4 + px^2 + q$.
3. 用综合除法求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$:
 - 1) $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x, g(x) = x + 3$;
 - 2) $f(x) = x^3 - x^2 - x, g(x) = x - 1 + 2i$.
4. 用综合除法把 $f(x)$ 表成 $x - x_0$ 的方幂和, 即表成

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots$$

的形式:

- 1) $f(x) = x^5, x_0 = 1$;
 - 2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3, x_0 = -2$;
 - 3) $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1+i)x^2 - 3x + 7 + i, x_0 = -i$.
5. 求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式:
 - 1) $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1, g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$;
 - 2) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1, g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$;

$$3) f(x) = x^4 - 10x^2 + 1,$$

$$g(x) = x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1.$$

$$6. \text{ 求 } u(x), v(x) \text{ 使 } u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x));$$

$$1) f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2,$$

$$g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2;$$

$$2) f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9,$$

$$g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4;$$

$$3) f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1, g(x) = x^2 - x - 1.$$

7. 设 $f(x) = x^3 + (1+t)x^2 + 2x + 2u$, $g(x) = x^3 + tx + u$ 的最大公因式是一个二次多项式, 求 t, u 的值.

8. 证明; 如果 $d(x) | f(x)$, $d(x) | g(x)$, 且 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合, 那么 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

9. 证明; $(f(x)h(x), g(x)h(x)) = (f(x), g(x))h(x)$, ($h(x)$ 的首项系数为 1).

10. 如果 $f(x), g(x)$ 不全为零, 证明:

$$\left(\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}, \frac{g(x)}{(f(x), g(x))} \right) = 1.$$

11. 证明; 如果 $f(x), g(x)$ 不全为零, 且

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x)),$$

那么 $(u(x), v(x)) = 1$.

12. 证明: 如果 $(f(x), g(x)) = 1$, $(f(x), h(x)) = 1$, 那么

$$(f(x), g(x)h(x)) = 1.$$

13. 设 $f_1(x), \dots, f_m(x), g_1(x), \dots, g_n(x)$ 都是多项式, 而且

$$(f_i(x), g_j(x)) = 1 (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n),$$

求证: $(f_1(x)f_2(x)\dots f_m(x), g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x)) = 1$.

14. 证明: 如果 $(f(x), g(x)) = 1$, 那么 $(f(x)g(x), f(x) + g(x)) = 1$.

15. 求多项式 $x^n - 1$ 在复数范围内和在实数范围内的因式分解.

16. 求下列多项式的公共根:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1; g(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1.$$

17. 判别下列多项式有无重因式:

$$1) f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8;$$

$$2) f(x) = x^4 + 4x^2 - 4x - 3.$$

18. 求 t 值使 $f(x) = x^3 - 3x^2 + tx - 1$ 有重根.

19. 求多项式 $x^3 + px + q$ 有重根的条件.

20. 如果 $(x-1)^2 \mid Ax^4 + Bx^2 + 1$, 求 A, B .

21. 证明: $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ 不能有重根.

22. 如果 a 是 $f'''(x)$ 的一个 k 重根, 证明 a 是

$$g(x) = \frac{x-a}{2} [f'(x) + f'(a)] - f(x) + f(a)$$

的一个 $k+3$ 重根.

23. 证明: x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根的充分必要条件是 $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, 而 $f^{(k)}(x_0) \neq 0$.

24. 举例说明断语“如果 α 是 $f'(x)$ 的 m 重根, 那么 α 是 $f(x)$ 的 $m+1$ 重根”是不对的.

25. 证明: 如果 $(x-1) \mid f(x^n)$, 那么 $(x^n-1) \mid f(x^n)$.

26. 证明: 如果 $(x^2+x+1) \mid f_1(x^3) + xf_2(x^3)$, 那么

$$(x-1) \mid f_1(x), (x-1) \mid f_2(x).$$

27. 求下列多项式的有理根:

$$1) x^3 - 6x^2 + 15x - 14;$$

$$2) 4x^4 - 7x^2 - 5x - 1;$$

$$3) x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3.$$

28. 下列多项式在有理数域上是否可约?

- 1) x^2+1 ;
- 2) $x^4-8x^3+12x^2+2$;
- 3) x^6+x^3+1 ;
- 4) x^p+px+1 , p 为奇素数;
- 5) $x^4+4kx+1$, k 为整数.

29. 用初等对称多项式表出下列对称多项式:

- 1) $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$;
- 2) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$;
- 3) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$;
- 4) $x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_1^2x_4^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_4^2+x_2^2x_4^2$;
- 5) $(x_1x_2+x_3)(x_2x_3+x_1)(x_3x_1+x_2)$;
- 6) $(x_1+x_2+x_1x_2)(x_2+x_3+x_2x_3)(x_1+x_3+x_1x_3)$.

30. 用初等对称多项式表出下列 n 元对称多项式:

- 1) $\sum x_1^4$;
- 2) $\sum x_1^2x_2x_3$;
- 3) $\sum x_1^2x_2^2$;
- 4) $\sum x_1^2x_2^2x_3x_4$.

($\sum ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ 表示所有由 $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ 经过对换得到的项的和.)

31. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是方程 $5x^3-6x^2+7x-8=0$ 的三个根, 计算

$$(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2)(\alpha_2^2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3^2)(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_3^2).$$

32. 证明: 三次方程 $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 的三个根成等差数列的充分必要条件为

$$2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0.$$

补 充 题

1. 设 $f_1(x)=af(x)+bg(x)$, $g_1(x)=cf(x)+dg(x)$, 并且

$ad-bc \neq 0$, 证明: $(f(x), g(x)) = (f_1(x), g_1(x))$.

2. 证明: 只要 $\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}$, $\frac{g(x)}{(f(x), g(x))}$ 的次数都大于零, 就可以适当选择适合等式

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$$

的 $u(x)$ 与 $v(x)$, 使

$$\partial(u(x)) < \partial\left(\frac{g(x)}{(f(x), g(x))}\right),$$

$$\partial(v(x)) < \partial\left(\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}\right).$$

3. 证明: 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素, 那么 $f(x^m)$ 与 $g(x^m)$ ($m \geq 1$) 也互素.

4. 证明: 如果 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{s-1}(x)$ 的最大公因式存在, 那么 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{s-1}(x), f_s(x)$ 的最大公因式也存在, 且

$$\begin{aligned} & (f_1(x), f_2(x), \dots, f_{s-1}(x), f_s(x)) \\ &= ((f_1(x), f_2(x), \dots, f_{s-1}(x)), f_s(x)). \end{aligned}$$

再利用上式证明, 存在多项式 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_s(x)$ 使

$$\begin{aligned} & u_1(x)f_1(x) + u_2(x)f_2(x) + \dots + u_s(x)f_s(x) \\ &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)). \end{aligned}$$

5. 多项式 $m(x)$ 称为多项式 $f(x), g(x)$ 的一个最小公倍式, 如果 1) $f(x) | m(x), g(x) | m(x)$, 2) $f(x), g(x)$ 的任一个公倍式都是 $m(x)$ 的倍式. 我们以 $[f(x), g(x)]$ 表示首项系数是 1 的那个最小公倍式. 证明: 如果 $f(x), g(x)$ 的首项系数都是 1, 那么

$$[f(x), g(x)] = \frac{f(x)g(x)}{(f(x), g(x))}.$$

6. 证明定理 5 的逆, 即: 设 $p(x)$ 是次数大于零的多项式, 如果对于任何两个多项式 $f(x), g(x)$, 由 $p(x) | f(x)g(x)$ 可以推出 $p(x) | f(x)$ 或者 $p(x) | g(x)$, 那么 $p(x)$ 是不可约多项式.

7. 证明: 次数 > 0 且首项系数为 1 的多项式 $f(x)$ 是某一不可约多项式的方幂的充分必要条件是, 对任意的多项式 $g(x)$ 必有 $(f(x), g(x)) = 1$, 或者对某一正整数 m , $f(x) \mid g^m(x)$.

8. 证明: 次数 > 0 且首项系数为 1 的多项式 $f(x)$ 是某一不可约多项式的方幂的充分必要条件是, 对任意多项式 $g(x), h(x)$, 由 $f(x) \mid g(x)h(x)$ 可以推出 $f(x) \mid g(x)$, 或者对某一正整数 m , $f(x) \mid h^m(x)$.

9. 证明: $x^n + ax^{n-m} + b$ 不能有不为零的重数大于 2 的根.

10. 证明: 如果 $f(x) \mid f(x^n)$, 那么 $f(x)$ 的根只能是零或单位根.

11. 如果 $f'(x) \mid f(x)$, 证明: $f(x)$ 有 n 重根, 其中 $n = \partial(f(x))$.

12. 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是 n 个不同的数, 而

$$F(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n).$$

证明:

$$1) \sum_{i=1}^n \frac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)} = 1;$$

2) 任意多项式 $f(x)$ 用 $F(x)$ 除所得的余式为

$$\sum_{i=1}^n \frac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}.$$

13. $a_1, a_2, \dots, a_n$ 与 $F(x)$ 同上题, $b_1, b_2, \dots, b_n$ 是任意 n 个数, 显然

$$L(x) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}$$

适合条件

$$L(a_i) = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

这称为拉格朗日 (Lagrange) 插值公式.

利用上面的公式求:

1) 一个次数 < 4 的多项式 $f(x)$, 它适合条件: $f(2) = 3$,

$$f(3)=-1, f(4)=0, f(5)=2;$$

2) 一个二次多项式 $f(x)$, 它在 $x=0, \frac{\pi}{2}, \pi$ 处与函数 $\sin x$ 有相同的值;

3) 一个次数尽可能低的多项式 $f(x)$, 使得 $f(0)=1, f(1)=2, f(2)=5, f(3)=10$.

14. 设 $f(x)$ 是一个整系数多项式, 试证; 如果 $f(0)$ 与 $f(1)$ 都是奇数, 那么 $f(x)$ 不能有整数根.

15. 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是方程 $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ 的根, 证明: $x_2, \dots, x_n$ 的对称多项式可以表成 x_1 与 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 的多项式.

$$16. f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n. \text{ 令 } s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k (k=0, 1, 2, \dots).$$

1) 证明:

$$x^{k+1} f'(x) = (s_0 x^k + s_1 x^{k-1} + \dots + s_{k-1} x + s_k) f(x) + g(x)$$

其中 $g(x)$ 的次数 $< n$ 或 $g(x)=0$.

2) 由上式证明牛顿(Newton)公式:

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \dots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} s_1 + (-1)^k k \sigma_k = 0,$$

对于 $1 \leq k \leq n$;

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n s_{k-n} = 0, \text{ 对于 } k > n.$$

17. 根据牛顿公式用初等对称多项式表示 s_2, s_3, s_4, s_5, s_6 .

18. 证明: 如果对于某一个 6 次方程有 $s_1=s_3=0$, 那么

$$\frac{s_7}{7} = \frac{s_5}{5} \cdot \frac{s_2}{2}.$$

19. 求一个 n 次方程使

$$s_1 = s_2 = \dots = s_{n-1} = 0.$$

20. 求一个 n 次方程使

$$s_2 = s_3 = \dots = s_n = 0.$$

第二章 行列式

习 题

- 决定以下 9 级排列的逆序数, 从而决定它们的奇偶性:
 - 134782695;
 - 217986354;
 - 987654321.
- 选择 i 与 k 使
 - 1274*i*56*k*9 成偶排列;
 - 1*i*25*k*4897 成奇排列.
- 写出把排列 12435 变成排列 25341 的那些对换.
- 决定排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数, 并讨论它的奇偶性.
- 如果排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为 I , 排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少?
- 在 6 级行列式中, $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$; $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ 这两项应带有什么符号?
- 写出 4 级行列式中所有带有负号并且包含因子 a_{23} 的项.
- 按定义计算行列式:

$$\begin{aligned}
 &1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}; \\
 &3) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

9. 由行列式定义证明:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

10. 由行列式定义计算

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中 x^4 与 x^3 的系数, 并说明理由.

11. 由

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

证明: 奇偶排列各半.

12. 设

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}, \text{ 其中 } a_1, a_2, \cdots, a_{n-1} \text{ 是互}$$

不相同的数.

1) 由行列式定义, 说明 $P(x)$ 是一 $(n-1)$ 次多项式;

2) 由行列式性质, 求 $P(x)$ 的根.